Problème topologique sur les équations différentielles

par

J. Hadamard.

Je voudrais indiquer ici une voie dans laquelle pourraient être recherchés de nouveaux progrès de l'étude qualitative des équations différentielles.

1. Les principes de la Topologie se sont présentés sous un jour lumineusement simple à Riemann dans le cas qu'il a abordé, celui des variétés à deux dimensions. C'est cette heureuse circonstance qui a permis à Riemann lui-même de transformer par leur intervention la Théorie des fonctions algébriques, à Poincaré d'en montrer la fécondité ou mieux, le rôle indispensable dans l'étude des équations différentielles du premier ordre.

Circonstance heureuse et exceptionnelle. La simplicité dont avait bénéficié Riemann disparait lorsque le nombre des dimensions dépasse deux: elle fait place à des complications et à des difficultés sérieuses. Néanmoins, à la suite de la puissante impulsion donnée par Poincaré et grâce surtout aux travaux des écoles américaine et russe, les bases de la nouvelle doctrine sont aujourd'hui solidement assises: doctrine dont l'intervention, aussi bien pour le cas général que pour celui de deux dimensions, ne peut être évitée dans l'étude des principaux problèmes du Calcul intégral.

Une application en a été faite, au cours de ces dernières années, par les géomètres américains [1], à un problème d'un caractère élémen-

[1] Marston Morse, Proceed. Nat. Acad. of Sciences, t. XIII (1927), p. 813; Transact Amer. Math. Soc., t. XXVII, p. 345 et t. XXXIII, p. 72. Whyburn, Bull Amer. Math. Soc. t. XXXV (1929), p. 701. Brown., Amer. Journ. Math. t. LII (1930), p. 251 et Ann. of Math. t. XXXI (1930), p. 449.

taire lorsqu'on le considère dans le plan, mais qui se complique rapidement lorsqu'on en vient à l'espace et aux hyperespaces. Soit f une fonction des n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, fonction que, pour fixer les idées, on suppose continue et dérivable. Comment se déformera la surface $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c$ lorsqu'on fera varier la constante arbitraire c? (La déformation est ici étudiée au point de vue qualitatif, topologique). Tant que les hypersurfaces en question sont dépourvues de points singuliers, elles restent homéomorphes les unes aux autres, comme le montre le théorème des fonctions implicites (il en est même encore ainsi, jusqu'à un certain point, alors que la surface variable a, quel que soit c, un ou plusieurs points singuliers fixes). La question ne se pose donc que lorsque c passe par une „valeur critique", c'est à dire par une valeur telle que la surface correspondante admette un point singulier, autrement dit, contienne un point où les n dérivées partielles de f s'annulent simultanément. C'est la déformation au voisinage de pareilles valeurs critiques qui'est étudiée dans les travaux américains auxquels nous avons fait allusion plus haut. Une telle étude soulève au moins une partie des délicates questions qu'a rencontrées la Topologie moderne et est rendue possible par la solution qui leur a été donnée.

2. L'Analysis Situs de Riemann étudiait des surfaces au sens ordinaire du mot, c'est à dire des variétés à deux dimensions. L'Analysis Situs de Poincaré se plaçait à un point de vue tout semblable à l'augmentation du nombre des dimensions près: les variétés envisagées sont, au voisinage de chacun de leurs points, homéomorphes à une portion d'hyperplan à p dimensions, p étant constant.

Ce point de vue est aujourd'hui dépassé, ainsi que cela s'imposait Les travaux récents ont pour objet d'étendre les méthodes de l'Analysis Situs combinatoire à des ensembles de nature quelconque.

Nous n'avons pas en vue, ici, une pareille généralité. Seulement on va appliquer ces méthodes à des figures comprenant, à la fois des points, des lignes, des surfaces, etc, et il est aisé de constater que des figures de cette espèce s'introduisent naturellement dans l'étude des équations différentielles ordinaires.

3. Soit donné un système d'équations différentielles

$$\text{(S)} \qquad \frac{dx_1}{X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots\ldots = \frac{dx_n}{X_n} = dt.$$

Une méthode classiquement employée pour obtenir des renseignements sur des solutions d'un tel système consiste à partir d'une fonction

arbitrairement choisie des n coordonnées, soit $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et de la formule

$$\text{(1)} \qquad \frac{dg}{dt} = g' = X_1 \frac{\partial g}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial g}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial g}{\partial x_n} = X(g)$$

qui en exprime la dérivée par rapport à t, les dérivées suivantes étant de même exprimées en fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par les formules

$$g'' = \frac{d^2 g}{dt^2} = XX(g),$$

$$g''' = \frac{d^3 g}{dt^3} = XXX(g),$$

etc.

A l'égard de cette fonction g, deux cas peuvent évidemment se présenter. Il peut arriver que le long d'une courbe — solution, elle varie toujours dans le même sens, au moins à partir d'un certain moment, cas exceptionnel qui, au moins dans un certain nombre d'applications importantes, se discute aisément.

Sinon, g, considéré comme fonction de t, passera indéfiniment par une succession de maxima et de minima. Or les uns et les autres (la fonction g étant supposée continument dérivable) correspondront nécessairement a des positions oú dg/dt s'annule, c'est à dire en des points de la variété définie par l'équation

$$\text{(2)} \qquad X(g) = 0.$$

En chacun de ces points. il y aura minimum ou maximum suivant le signe de la quantité

$$g'' = XX(g).$$

Ceci conduit à diviser la variété (2) en régions, les unes positives, c'est à dire en chaque point desquelles $g^n > 0$, les autres négatives, c'est à dire où $g^n < 0$. Si pour fixer les idées, on est dans le cas $n = 3$, là ou les variétés (2) seront des surfaces et sur celles ci on devra (en général) tracer certaines lignes, à savoir celles qui sont définies par l'adjonction de l'équation

$$\text{(2')} \qquad g'' = XX(g) = 0$$

lesquelles délimiteront entre elles les régions positives en les séparant des régions négatives.

Les lignes ainsi tracées doivent être en général considérées à notre point de vue comme retranchées de la variété (2) puisque qu'un quelconque de leurs points ne correspond ni à un maximum ni à minimum de g. On doit imaginer leurs différents arcs comme incorporés, suivant les cas, aux régions de l'espace qui sont, pour g, des régions de croissance ($X(g) > 0$) ou des régions de décroissance ($X(g) < 0$). Exception sera seulement faite pour les points satisfaisant à $XXX(g) = 0$, lesquels seront positifs ou négatifs suivant le signe de $X^{IV}(g)$.

Si le nombre n est quelconque, il y aura, de même, une suite de variétés à nombres de dimensions décroissants depuis $n-1$ jusqu'à zéro, les premières étant définies par la relation (2). les suivantes étant obtenues en adjoignant successivement à cette équation les conditions (2^1), ($2''$), etc., de manière que chacune d'elles soit située sur l'une des précédentes et y sépare une région positive d'une région négative.

4. Tout ceci peut tomber et tombe effectivement en défaut dans des cas spéciaux qu'il faut noter. Les principaux d'entre eux auxquels on peut même commencer par le borner correspondent d'ailleurs à des cas excessivement heureux de la fonction g, je veux dire — des fonctions g qui donnent des renseignements très précis sur l'intégration du système. Le premier est celui où $X(g)$ est identiquement nul: g est alors une intégrale première.

Il peut arriver, ensuite, que sur toute la surface $X(g) = 0$ ou, du moins, sur toute une portion S de cette surface, $XX(g)$ soit nul. $X(g) = 0$ est alors ce que Painlevé a nommé une „intégrale premiére particularisée. S est un lieu de courbes — solutions du système; sur S d'ailleurs, les quantités suivantes $XXX(g)$, etc. sont également toutes nulles.

Il faut aussi, bien entendu, mettre à part les points singuliers du système, c'est à dire ceux où $X_1 = X_2 \ldots = X_n = 0$, puisqu'en un de ces points ne passe plus une trajectoire bien déterminée.

En dehors de ces cas, il ne resterait plus à réserver que ceux où toutes les dérivées successives de g le long de la trajectoire (leur existence étant supposée) s'annuleraient à la fois. Plus particulièrement, il faudrait, en théorie, examiner l'hypothèse où g, prenant en un certain point et, par exemple, pour $t = 0$, une valeur déterminée g_0, prendrait un nombre infini de fois, pour t très petit et positif (ou pour t très petit et négatif) des valeurs supérieures à g_0 aussi bien que des valeurs inférieures à g_0. Ce cas ne peut pas se présenter si g et les X sont analytiques; et, même sans imposer cette condition, on peut exclure, par hypothèse, la circonstance que nous venons de mentionner.

5. Revenons au cas général. Du moment que g devra présenter indéfiniment des maxima et des minima, la courbe-solution devra rencontrer une infinité de fois la variété (2), et cela alternativement dans une région positive et dans une région négative, étant admis qu'on incorpore à ces régions toute une ligne à rétablir par convention certains points de la variété (ligne pour $n=3$) définie par l'ensemble des relations (2), (2^1), conformément à ce qui a été dit plus haut.

Les trajectoires sur lesquelles g est monotone à partir d'une certaine valeur de t peuvent également être discutées à l'aide de cette même figure, dans des cas assez généraux: il en est ainsi lorsque g est borné ainsi que $XX(g)$. En effet, g, étant borné et monotone, tend vers une limite pour $t \to \infty$ et il suffit d'appliquer un thèorème obtenu dans ce but, [1]) indépendamment par Kneser et nous même, puis, à nouveau (en vue d'applications à la théorie analytique des nombres), par MM. Hardy et Littlewood, pour en déduire que la dérivée première $g' = X(g)$ tend vers zéro. On peut même ajouter, que si les expressions suivantes $XXX(g)$, etc. sont également bornées, ces expressions, ainsi que $XX(g)$ lui-même, devront tendre vers zêro, de sorte que la courbe considérée devra soit aboutir à un point singulier, soit tendre asymptotiquement vers une ligne définie sur une surface $g = \text{const.}$ par un certain nombre des relations $X(g) = 0$, $XX(g) = 0$, etc.

6. Comme nous l'avons rappelé, le principe précédent est d'application constante dans l étude des formes des courbes définies par les équations différentielles: il intervient tant chez Poincaré lui-même que dans les Mémoires de Liapounoff et de leurs continuateurs — parfois alors même qu'il n'est pas explicitement invoqué. Son application peut remplacer et simplifier la démonstration, d'apparence assez délicate, donnée par Poincaré [2]) de son premier théo-

[1]) On peut encore noter le fait que la valeur de g, en un point P où la trajectoire rencontre une région positive de la surface (2) est nécessairement plus petite que la valeur de cette même quantité aux points P', P'' immediatement précédent et suivant où la même trajectoire rencontre les régions négatives.

[2]) Premier *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle* Journ. de Math. tome VII_3 (1881); Oeuvres, tome I, pages 8 à 10. Les X étant, dans ce Mémoire de Poincaré supposée être des polynômes, toute fonction $g(x, y)$ rationnelle (ou, un peu plus généralement algebrique et uniforme pour les valeurs réelles des variables) donne un cycle $X(g) = 0$ répondant à la question.

Toutefois, pour être tout à fait complet, il faudrait tenir compte de la possibilité d'une croissance monotone de g. Pour appliquer la remarque du texte, on prendra pour cela g borné, ainsi quel ses derivées pour toutes les valeurs réelles des variables et, d'autre part, pour que les X et leurs dérivées, donc les expressions $X(g)$, $XX(g) \ldots$, soient bornées, il suffira, conformément à une remarque célèbre employée par Poincaré à une autre occasion, de substituer à la variable indépendante t une autre variable u définie par $du = dt\,(1 + X_1^2 + \ldots + X_n^2)$. On voit ainsi immédiatement que la cour-

réme: *toute trajectoire qui n'a pas de point double ni de point d'arrêt rencontre un nombre infini de fois des cycles algébriques convenablement choisis.*

En général, on cherche à choisir d'une manière convenable la fonction g, en vue de la conclusion particulière que l'on se propose d'établir.

Mais l'on peut aussi se demander s'il n'y aurait pas intêrêt à laisser à cette fonction une certaine généralité.

Tout d'abord, après avoir construit, comme nous l'avons indiqué, l'ensemble de surfaces, de lignes, etc. déduit d'une fonction déterminée g, il est assurément intéressant d'introduire ensuite, de la même façon, la fonction $g' = X(g)$, qui donne lieu au tracé de le surface $XX(g) = 0$, laquelle passe précisément par les lignes qui ont servi à diviser la surface (2) en régions positives et négatives. Éntre deux points d'intersection consécutifs P_1, P_2 d'une courbe-solution quelconque avec la surface (2), devra exister un nombre impair de points de rencontre avec cette nouvelle surface (2') et si, par exemple, le premier point P_1 est positif, et le second négatif, le premier et le dernier point de rencontre avec (2') devront être négatifs.

7. De toute façon, les propriétés topologiques de la figure déduite d'une fonction quelconque g sont susceptibles de renseigner sur les propriétés des trajectoires. Il s'agit comme on le voit — pour $n = 3$, par exemple — de propriétés topologiques qui concernent non plus une ou plusieurs surfaces, mais un ensemble de portions de surfaces, de lignes délimitant ces portions et de points particuliers pris sur ces lignes.

Cette figure dépend d'un élement que nous sommes libres de choisir arbitrairement (sous réserve des conditions de régularité que nous avons admises): la fonction g. Qu'arrivera-t-il maintenant si nous faisons varier cette fonction d'une manière continue? La continuité doit d'ailleurs évidemment porter non seulement sur les valeurs de g lui-même, mais sur celles de ses dérivées; δg, variation de g, ne devra être considéré comme très petit que si les fonctions g et $g + \delta g$ ont

be correspondante devra tendre soit vers un cycle limite C, soit vers un noeud ou un foyer.

Ceci étant le but principal visé par Poincaré, on pourraités'en tenir là. Mais, de toute façon, pour établir le théorème en lui-même et sans exception, autre que l'aboutissement aux points singuliers, il suffit, dans le cas du cycle limite, de remarquer que toute ligne coupant ce cycle possède la propriété demandée.

On peut aussi remarquer que si g_1 est uns seconde fonction telle que le jacobien de g et de g_1 ne s'annule pas, ces deux quantités ne prenent pas simullanément tendre chacune versun limite sans que le point mobile tende quels une position déterminèe.

un voisinage d'ordre p suffisamment étroit, p étant un entier que l'on se réservera d'assigner, mais qui en tout cas, d'après la manière dont notre figure à été construite, devra être au moins égal à $n+1$.

g variant dans ces conditions, la figure, en se déformant, restera en général, pendant un certain temps, homéomorphe à elle-même. Il n'en sera autrement que lorsqu'elle prendra certaines formes „critiques". Il y aura forme critique et, par conséquent, détermination critique de la fonction g:

lorsque la surface (2) aura un point singulier, c'est à dire lorsque $X(g)$ et ses n dérivées partielles seront susceptibles de s'annuler simultanément;

lorsque la variété (ligne, pour $n = 3$) définie par (2) et (2') aura un point singulier, c'est à dire lorsque les divers déterminants fonctionnels de $X(g)$ et de $XX(g)$ par rapport aux variables prises deux à deux s'annuleront en un même point de ces variétés; etc.;

lorsqu'on sera dans un des cas considérés au n^0 4, certaines trajectoires étant situées sur la variété (2). Toutefois le cas le plus spécial, celui où g est égal à une intégrale première G n'apasd'intérêt, notre construction, appliquée à $G + \delta g$, ne donnant d'autre résultat que si on l'appliquait à δg lui-même.

Pour un système différentiel donné, si l'on se donne en outre une fonction déterminée dont g sera supposée voisine, la forme de la figure correspondante s'étudiera par une adaptation convenable des méthodes qui servent à discuter les méthodes aujourd'hui connues pour l'étude des valeurs critiques d'une fonction. Il resterait à trouver quelles sont, pour un système différentiel donné, les formes topologiques possibles et comment elles dérivent les unes des autres. Cette tâche conviendrait à des géomètres familiarisés avec les méthodes topologiques récentes, s'ils veulent s'intéresser à la question que je me suis contenté de poser.