so folgt aus (94), (124), (91) und (92)

$$\Lambda_{r,s+1}(\nu) = \pi^r \Gamma^{-2}\left(\frac{r}{2}+s\right) d^{\frac{1-r}{2}} (2h\log\eta)^{-s} \mathfrak{T}_{r,s}(\nu)$$

$$+ o\left(N\nu^{\frac{r}{2}+s-1}\log^{-s} N\nu\right) \sum_{\omega<\nu,\ \omega'<\nu'} 1$$

$$= \pi^r \Gamma^{-2}\left(\frac{r}{2}+s+1\right) d^{\frac{1-r}{2}} (2h\log\eta)^{-s-1} N\nu^{\frac{r}{2}+s} \log^{-s-1} N\nu \cdot \mathfrak{S}_{r,s+1}(\nu)$$

$$+ o\left(N\nu^{\frac{r}{2}}\log^{-s-1} N\nu\right),$$

d. h. es gilt (125) mit $s+1$ statt s. Also ist auch (93) mit $s+1$ richtig, w. z. b. w.

Radość, den 24. November 1934.

Sur le calcul absolu des variations

par

Z. Horák.

Introduction. Les problèmes les plus importants du calcul des variations sont des problèmes géométriques ou au moins peuvent s'interpréter géométriquement, comme par exemple ceux de la Mécanique analytique. Au point de vue général, il s'agit de problèmes concernant les espaces riemanniens à plusieurs dimensions dont l'étude conduisit à la généralisation du calcul différentiel ordinaire connue sous le nom du calcul différentiel absolu. Cela suggère l'idée de chercher une *formulation absolue du calcul des variations*. C'est à ce problème que j'ai consacré le présent travail. Le calcul des variations est — par sa nature même — indépendant du choix de variables et l'on peut donc s'attendre que le calcul absolu des variations se confond avec le calcul ordinaire. Il en est bien ainsi tant qu'on se borne à des espaces holonomes à connexion symétrique. Par contre, au cas d'espaces non holonomes, on trouve des différences essentielles qui sont en faveur du calcul absolu. A savoir, il est bien connu depuis longtemps que le principe d'Hamilton, au cas de systèmes matériels non holonomes, ne peut plus être envisagé comme un principe stationnaire au sens réel du mot, car les trajectoires de tels systèmes ne sont plus des extrémales relatives à l'intégrale que l'on appelle l'action hamiltonienne, si l'on considère les liaisons non intégrables comme conditions supplémentaires[1]). D'autre part, les géodésiques d'un espace riemannien non holonome, définies comme lignes dont les tangentes, en tous leurs points, ont la même direction, diffèrent de lignes de longueur stationnaire au sens habituel du

[1]) Voir par exemple A. Voss, Ueber die Differentialgleichungen der Mechanik, Math. Ann. 25 (1885) p. 258 — 286.

calcul des variations[2]). Or, le calcul absolu des variations conduit, encore dans le cas d'un espace non holonome, aux équations des extrémales identiques à celles des géodésiques, de sorte que ces dernières se confondent avec les lignes de longueur stationnaire. De même, en appliquant le calcul absolu des variations, les équations du mouvement d'un système non holonome découlent du principe d'Hamilton exactement comme s'il s'agissait d'un système holonome et le dit principe garde donc, pour tous les systèmes, son caractère stationnaire.

Dans ce qui va suivre, je pose d'abord le problème général du calcul absolu des variations et je déduis les conditions du premier ordre pour l'extremum libre qui peuvent être traduises en annulant la variation absolue de l'intégrale en question. J'arrive aux équations absolues des extrémales qui découlent des équations connues d'Euler, en y remplaçant simplement la dérivée ordinaire par celle absolue. J'en tire la conséquence que, *dans le cas des connexions holonomes et symétriques, le calcul absolu des variations se réduit au calcul ordinaire.* Puis je donne la forme explicite des équations des extrémales dans le cas d'une fonction homogène et montre qu'elles sont identiques aux équations d'Euler, lorsque la connexion est symétrique. Après avoir étendu les résultats obtenus aux variétés non holonomes, je fais voir que les équations absolues gardent leur forme encore dans le cas de paramètres non holonomes ce qui n'est plus vrai pour les équations d'Euler. Enfin, en m'occupant du problème de l'*extremum lié* — en cas de conditions supplémentaires *non intégrables* — au point de vue des calculs ordinaire et absolu, je retrouve une différence essentielle: les équations obtenues par l'application du calcul absolu sont de la même forme comme dans le cas de conditions holonomes, tandis que les équations ordinaires diffèrent de celles valables pour les conditions holonomes.

En terminant, j'applique les résultats précédents au cas de lignes de longueur stationnaire et à celui des trajectoires de systèmes matériels. Or, les extrémales du premier problème sont identiques aux géodésiques indifféremment pour les espaces riemanniens holonomes ou non. Quant au second problème, j'envisage l'espace des configurations du système comme un espace de Riemann dont le tenseur fondamental est choisi de la manière que le carré de la vitesse du système soit égal à sa force vive. Cela fait, les extrémales relatives à l'action hamiltonienne se confondent avec les trajectoires du système encore au cas de liaisons non

[2]) J. A. Schouten, On non-holonomic connexions, Proc. Kon. Acad. v. Wetenschappen, Amsterdam, 31, No 3 (1928) p. 291—299, § 6. — Über nichtholonome Übertragungen in einer L_n, Math. Zeitschr., 30 (1929) p. 149—172, § 11.

holonomes, comme je l'ai fait remarqué déjà plus haut. A cette occasion, je suis arrivé — en cas de système conservatifs — à une *forme absolue des équations de Lagrange*, restant la même encore si le système et les paramètres sont non holonomes.

Notations. Je me sers de quatre espèces d'indices:

$\lambda, \mu, \nu, \rho, \sigma, \tau$	prenant	n	valeurs	différentes,
α, β, γ	„	n	„	„ ,
$i, j, k, l; r, s$	„	m	„	„ ,
K	„	$n-m$	„	„ .

Je désigne par ∂_λ, ∂_α, ∂_i les dérivées $\frac{\partial}{\partial x^\lambda}, \frac{\partial}{\partial q^\alpha}, \frac{\partial}{\partial q^i}$ et par

$2\,A_{[\lambda\mu]}$ la différence $A_{\lambda\mu} - A_{\mu\lambda}$.

1. La position du problème. Considérons une variété X_n à n dimensions dont chaque élément (point) est déterminé au moyen des n paramètres indépendants x^ν. Dans cette variété, une *connexion linéaire* soit définie, les différentielles absolues des vecteurs v^ν, w_λ supposées sous la forme[3])

$$(1)\quad D v^\nu = \nabla_\mu v^\nu\, d x^\mu = (\partial_\mu v^\nu + \Gamma^\nu{}_{\lambda\mu} v^\lambda)\, d x^\mu = d v^\nu + \Gamma^\nu{}_{\lambda\mu} v^\lambda\, d x^\mu,$$

$$(2)\quad D w_\lambda = \nabla_\mu w_\lambda\, d x^\mu = (\partial_\mu w_\lambda - \Gamma^\nu{}_{\lambda\mu} w_\nu)\, d x^\mu = d w_\lambda - \Gamma^\nu{}_{\lambda\mu} w_\nu\, d x^\mu.$$

Dans ces équations, ∇_μ désigne la *dérivée absolue* ou covariante et les $\Gamma^\nu{}_{\lambda\mu}$, qui ne sont pas des affineurs, sont des fonctions arbitraires. Les *différentielles absolues* des affineurs généraux s'obtiennent, en les regardant comme produits de vecteurs, par exemple:

où
$$D a^\nu_{\lambda\mu} = \nabla_\rho a^\nu_{\lambda\mu}\, d x^\rho$$

$$(3)\quad \nabla_\rho a^\nu_{\lambda\mu} = \partial_\rho a^\nu_{\lambda\mu} + \Gamma^\nu_{\sigma\rho} a^\sigma_{\lambda\mu} - \Gamma^\sigma_{\lambda\rho} a^\nu_{\sigma\mu} - \Gamma^\sigma_{\mu\rho} a^\nu_{\lambda\sigma}.$$

La différentielle absolue d'un scalaire est égale à sa différentielle ordi-

[3]) Nous excluons, par cette supposition, les connexions générales que J. A. Schouten (Der Ricci-Kalkül, Berlin (1924), p. 75, dans la suite désigné par *R. K.*) appelle „nichtüberschiebungsinvariant". Pour ces connexions, les coefficients $\Gamma^\nu{}_{\lambda\mu}$ ne sont pas les mêmes dans les deux équations (1) et (2).

naire et les différentielles ordinaires dx^ν sont des composantes du vecteur contravariant, appelé élément linéaire.

Avant d'aborder notre problème je rappellerai un théorème qui nous sera utile dans la suite[4]):

(I) Les dérivées partielles d'ordre p des composantes d'un affineur quelconque Q d'ordre q par rapport aux composantes d'un autre affineur R d'ordre r sont des composantes d'un affineur d'ordre $q+pr$ appelé dérivée d'ordre p de l'affineur Q par rapport à l'affineur R.

Ce théorème reste valable encore lorsque certains des nombres p, q, r, deviennent nuls. Le nombre des indices covariants de la dérivée en question égale celui des indices covariants de Q élevé du nombre des indices contravariants de R multiplié par p. Un énoncé analogue est vrai pour les indices contravariants.

Considérons le cas: $p=1$, $q=o$ (Q est une fonction scalaire que nous désignerons par F), $r=3$, $R=a^\nu{}_{\lambda\mu}$. On voit que la dérivée

$$\frac{\partial F}{\partial a^\nu{}_{\lambda\mu}} = A^{\lambda\mu}_{\nu}$$

est un affineur d'ordre 3 dont les indices contravariants correspondent aux indices covariants de $a^\nu{}_{\lambda\mu}$ et réciproquement. Les choses se passent tout pareillement, si la fonction scalaire F dépend de plusieurs affineurs $a, b, \ldots$, en particulier aussi de vecteurs et de scalaires.

La différentielle ordinaire de la fonction scalaire F égale la différentielle absolue et l'on peut donc écrire

$$(5)\qquad dF = DF = \frac{\partial F}{\partial a}\nabla_\lambda a\, dx^\lambda + \ldots = \frac{\partial F}{\partial a} Da + \frac{\partial F}{\partial b} Db + \ldots \quad .$$

Cette expression donne alors, aux quantités infiniment petites du deuxième ordre près, l'accroissement que la fonction F éprouve pendant un déplacement de composantes dx^ν. On peut donc poser

$$(6)\qquad F[a(x+dx),\ b(x+dx), \ldots] = F(x) + DF = F(a, b, \ldots) + \frac{\partial F}{\partial a} Da + \frac{\partial F}{\partial b} Db + \ldots$$

et l'on s'assure aisément que, en raison du théorème I, tous les termes

[4]) Z. Horák, Sur les dérivées par rapport aux affineurs. Ens. Mathém., XXVIII (1929) p. 212—214.

en (5) et (6) sont des scalaires. La dernière formule s'obtient aussi, lorsqu'on développe en série (en se bornant aux quantités du 1er ordre) l'expression:

$$F(a+Da,\ b+Db, \ldots)$$

représentant la valeur de F au point voisin comme fonction des valeurs prises, à ce point, au sens du calcul absolu par les affineurs $a, b, \ldots$.

Le problème fondamental du calcul ordinaire des variations consiste à trouver les n fonctions x^ν de la variable indépendante t donnant à l'intégrale

$$\int f\, dt$$

un extremum, f étant une fonction connue de t, des x^ν et de leurs dérivées par raport à t (d'ordre premier ou aussi d'ordres supérieurs). Dans notre variété X_n, on peut se poser un problème analogue: *Trouver les n fonctions $x^\nu(t)$, donnant à l'intégrale*

$$(7)\qquad I = \int_{t_1}^{t_2} F\left[a(x),\ b(x), \ldots;\ \frac{dx}{dt};\ t\right] dt$$

un extremum, F étant une fonction scalaire des champs affinoriels $a, b, \ldots$, du vecteur $\frac{dx^\nu}{dt}$ et de la variable indépendante t.

On peut interpréter ce problème géométriquement, en représentant l'ensemble de fonctions $x^\nu(t)$ par une courbe tracée dans un espace à $n+1$ dimensions. Mais cet ensemble représente aussi une trajectoire d'un point mobile dans la variété X_n, si l'on regarde la variable t comme le temps. C'est cette dernière interprétation dont nous nous servirons dans la suite pour simplifier le langage.

Pour que le problème, que nous venons d'énoncer, soit complètement déterminé, il faut préciser le mot *extremum* dont la signification dépend essentiellement des fonctions admises au concours. Sans entrer dans les détails, je vais le faire, en définissant les fonctions admissibles comme il suit. Construisons dans la X_n un champ vectoriel dont les composantes ω^ν sont des fonctions continues et dérivables des x^ν et considérons l'ensemble de fonctions

$$(8)\qquad y^\nu(t) = x^\nu(t) + \omega^\nu[x(t)],$$

satisfaisant aux conditions

(9) $$|\omega^\nu| < \varepsilon$$

ou bien

(10) $$y^\nu - x^\nu < \varepsilon$$

où ε est un nombre positif. Pour un certain choix du vecteur ω^ν, vérifiant (9), on obtient un système de n fonctions y^ν, définissant dans X_n une trajectoire voisine à celle primitive. Nous dirons donc que les $x^\nu(t)$ correspondent pour l'intégrale (7) à un minimum (maximum), si l'on peut assigner un nombre ε tel que toutes les fonctions $y^\nu(t)$ compatibles avec (10) donnent à cette intégrale une valeur supérieure (inférieure) ou égale à I.

2. Conditions du premier ordre pour l'extremum. Dans la suite, je me bornerai au cas où la fonction F ne contient, outre la variable t, qu'un seul affineur a — du reste quelconque — et le vecteur $\frac{dx^\nu}{dt}$ que je désignerai par $\dot{x}^\nu$. Nous écrirons de plus

$$I(x) = \int_{t_1}^{t_2} F\left[a(x), \dot{x}, t\right] dt, \quad I(y) = \int_{t_1}^{t_2} F\left[a(y), \dot{y}, t\right] dt$$

et nous supposerons que le vecteur ω^ν prenne la valeur 0 aux extrémités de l'intervalle d'intégration:

(11) $$\omega^\nu[x(t_1)] = 0, \quad \omega^\nu[x(t_2)] = 0.$$

Donc la condition du minimum s'écrit

(12) $$I(y) \geq I(x),$$

le nombre ε supposé suffisamment petit, et nous allons admettre que, sous cette réserve, la fonction F soit développable en série de puissances des ω^ν. Dans ces conditions, nous pouvons regarder le vecteur ω^ν comme un déplacement infinitésimal et nous allons le désigner par δx^ν, pour le distinguer de la différentielle dx^ν prise le long de la trajectoire. Le vecteur δx^ν — dit *variation* — définit indépendamment du choix de paramètres x^ν, le passage de la trajectoire $x^\nu(t)$ à des *trajectoires variées*, infiniment voisines, correspondant aux fonctions y^ν définies moyennant (8). Pour une fonction des paramètres x^ν, on aura

$$\delta f(x) = \partial_\lambda f \, \delta x^\lambda.$$

J'appellerai *variation ordinaire* cette expression, en désignant par le mot *variation absolue* l'expression

(13) $$\Delta a(x) = \nabla_\lambda a \, \delta x^\lambda,$$

$a(x)$ étant un champ affinoriel quelconque. Pour une fonction scalaire, les deux variations se confondent bien entendu et nous aurons par suite

(14) $$\delta F = \Delta F = \frac{\partial F}{\partial a} \Delta a + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_\lambda} \Delta \dot{x}_\lambda.$$

ce qui donne, aux quantités du deuxième ordre près, l'accroissement de la fonction F pendant le déplacement δx^ν. On peut donc poser

$$F[a(y), \dot{y}, t] = F[a(x), \dot{x}, t] + \delta F$$

et la condition (12) pour le minimum devient d'après (14)

(15) $$\int_{t_1}^{t_2} \Delta F \, dt \geqslant o$$

ou bien

(16) $$\Delta \int_{t_1}^{t_2} F \, dt \geqslant o.$$

Pour calculer la variation du vecteur vitesse $\dot{x}^\nu$, appliquons la définition (1) au vecteur $\omega^\nu(x) = \delta x^\nu$

$$D \, \delta x^\nu = d \, \delta x^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} \, dx^\lambda \, \delta x^\mu$$

et substituons, dans la formule (13), à l'affineur a le vecteur dx^ν, en tenant compte de (1):

$$\Delta \, dx^\nu = \delta \, dx^\nu + \Gamma^\nu_{\lambda\mu} \, dx^\lambda \, \delta x^\mu.$$

Donc

(17) $$\Delta \, dx^\nu - D \, \delta x^\nu = \delta \, dx^\nu - d \, \delta x^\nu + 2 \Gamma^\nu_{[\lambda\mu]} \, dx^\lambda \, \delta x^\mu.$$

Mais sous les suppositions faites sur ω^ν, il vient d'après (8)

$$\delta x^\nu = y^\nu - x^\nu$$

(18) $$\frac{d}{dt} \delta x^\nu = \dot{y}^\nu - \dot{x}^\nu = \delta \dot{x}^\nu$$

ce qui entraîne

$$\Delta\, d\, x^\nu - D\, \delta\, x^\nu = 2\, \Gamma^\nu_{[\lambda\mu]}\, d\, x^\lambda\, \delta\, x^\mu.$$ [5])

Donc en restreignant nos considérations aux *connexions symétriques*, définies d'une manière invariante moyennant les relations

(19) $$\Gamma^\nu_{[\lambda\mu]} = 0,$$

on aura

(20) $$\Delta\, d\, x^\nu = D\, \delta\, x^\nu\,.$$

C'est ce que nous ferons dans la suite de sorte qu'il vient d'après (14) et (13)

$$\Delta F = \frac{\partial F}{\partial a} \nabla_\lambda a\, \delta\, x^\lambda + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\lambda} \frac{D}{dt} (\delta\, x^\lambda)$$

$$= \left\{ \frac{\partial F}{\partial a} \nabla_\lambda a - \frac{D}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\lambda} \right\} \delta\, x^\lambda + \frac{D}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\lambda} \delta\, x^\lambda \right)$$

$$= \left\{ \frac{\partial F}{\partial a} \nabla_\lambda a - \frac{D}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\lambda} \right\} \delta\, x^\lambda + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\lambda} \delta\, x^\lambda \right)$$

car la différentielle absolue d'un scalaire se réduit à celle ordinaire. En portant cette valeur dans (15), on obtient, en raison de (11),

(21) $$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial F}{\partial a} \nabla_\lambda a - \frac{D}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\lambda} \right\} \delta\, x^\lambda\, dt \geqq 0.$$

Or, si pour un certain vecteur $\delta\, x^\lambda$, cette intégrale est positive, elle devient pour le vecteur $-\delta\, x^\lambda$ négative. On arrive donc à la condition nécessaire du minimum, en remplaçant l'inégalité (21) par l'égalité. Par un raisonnement analogue, on obtient le même résultat pour le maximum de sorte que la condition nécessaire pour l'extremum est la suivante:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial F}{\partial a} \nabla_\lambda a - \frac{D}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\lambda} \right\} \delta\, x^\lambda\, dt = 0.$$

Cette équation doit être vérifiée pour tous les vecteurs $\delta\, x^\lambda$ remplissant les conditions (9) et s'annulant pour $t = t_1, t_2$. Cela entraîne, d'après le lemme fondamental du calcul des variations, les n équations

[5]) Cf. Schouten *R. K.*, § 4.

(22) $$\frac{\partial F}{\partial a} \nabla_\lambda a - \frac{D}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\lambda} = 0$$

car la validité du dit lemme est évidemment compatible avec les conditions (9). Les dernières équations peuvent être encore modifiées, lorsqu'on envisage F comme fonction des $2n+1$ variables: x^ν, $\dot{x}^\nu$, t. Les x^ν n'intervenant que dans les composantes de l'affineur a, on a

$$\partial_\lambda F = \frac{\partial F}{\partial a} \partial_\lambda a.$$

Cette dérivée n'a pas de sens invariant quoique F est une fonction scalaire. Au contraire, les expressions

(23) $$\nabla_\lambda F = \frac{\partial F}{\partial a} \nabla_\lambda a$$

sont, d'après le théorème *I.* des composantes d'un vecteur covariant que je vais appeler *dérivée partielle absolue* (*covariante*) de la fonction F. En vertu de (23), les relations (22) prennent la forme

(24) $$\nabla_\lambda F - \frac{D}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\lambda} = 0$$

qui reste la même, si la fonction F contient plusieurs champs affinoriels $a, b, \ldots$

En regardant les relations (16) et (24), on constate qu'elles ne diffèrent, en forme, des relations analogues du calcul ordinaire des variations, la différentiation et la dérivée ordinaires y étant remplacées par celles absolues. En outre, si l'on posait [6])

$$D\, x^\nu \equiv d\, x^\nu, \quad \Delta\, x^\nu \equiv \delta\, x^\nu,$$

les équations (20) deviendraient

(25) $$\Delta\, D\, x^\nu = D\, \Delta\, x^\nu$$

et l'on pourrait dire que la différentielle et la variation absolues sont permutables.

On voit que l'égalité correspondant à (16) est identique à la condition classique

[6]) Les opérations $D\, x^\nu$, $\Delta\, x^\nu$ ne sont pas définies *a priori*, car les x^ν ne sont pas ni des composantes d'un vecteur ni des scalaires.

$$\delta \int F\,dt = 0,$$

tant que F est un scalaire, bien entendu, et puisque (20) est une conséquence de (18), il s'en suit que de même les équations résultantes (24) sont équivalentes aux équations classiques d'Euler. Comme nous n'avons considéré que des variétés holonomes, nous pouvons alors énoncer le théorème suivant:

(*II*) *Au cas des connexions holonomes et symétriques, le calcul absolu des variations se réduit au calcul ordinaire.*

En somme, nous n'avons donc obtenu qu'une *forme absolue* du calcul ordinaire des variations, mais nous allons voir qu'il n'en est plus de même au cas de variétés non holonomes.

Conformément au calcul ordinaire, nous allons appeler *extrémales* les trajectoires qui satisfont aux conditions du premier ordre, exprimées moyennant la relation

$$\Delta \int F\,dt = 0 \tag{26}$$

ou moyennant les équations (24). Je les désignerai comme *équations absolues* des extrémales et déduirai leur forme explicite dans le cas où F est une fonction homogène en $\dot{x}^\nu$, son degré d'homogénéité étant $h \geqslant 0$. [7]) Il vient

$$\dot{x}^\nu \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\nu} = h F, \ldots, \qquad \dot{x}^{\nu_1} \ldots \dot{x}^{\nu_h} \frac{\partial^h F}{\partial \dot{x}^{\nu_1} \ldots \partial \dot{x}^{\nu_h}} = h!\, F,$$

de sorte que les x^ν n'interviennent das F que moyennant les expressions

$$\frac{\partial^h F}{\partial \dot{x}^{\nu_1} \ldots \partial \dot{x}^{\nu_h}}$$

qui d'après le théorème I sont des composantes d'un tenseur (*c'est-à-dire d'un affineur symétrique*) covariant. On aura d'abord

$$h!\, \nabla_\lambda F = \dot{x}^{\nu_1} \ldots \dot{x}^{\nu_h} \nabla_\lambda \frac{\partial^h F}{\partial \dot{x}^{\nu_1} \ldots \partial \dot{x}^{\nu_h}}$$

et par analogie de (3)

[7]) Les résultats que nous allons déduire, restent valables encore si F est une somme de fonctions homogènes de différents degrès $h_1, h_2, \ldots \geqq 0$. Par exemple, pour l'action hamiltonienne $h_1 = 2$, $h_2 = 0$.

$$h!\, \nabla_\lambda F = h!\, \partial_\lambda F - \dot{x}^{\nu_1} \ldots \dot{x}^{\nu_h} \Gamma^\mu_{\nu_1\lambda} \frac{\partial^h F}{\partial \dot{x}^\mu \partial \dot{x}^{\nu_2} \ldots \partial \dot{x}^{\nu_h}} - \ldots$$

$$- \dot{x}^{\nu_1} \ldots \dot{x}^{\nu_h} \Gamma^\mu_{\nu_h\lambda} \frac{\partial^h F}{\partial \dot{x}^{\nu_1} \ldots \partial \dot{x}^{\nu_{h-1}} \partial \dot{x}^\mu}$$

ce qui entraîne, en raison de la symétrie mentionnée,

$$h!\, \nabla_\lambda F = h!\, \partial_\lambda F - h\, \dot{x}^{\nu_1} \Gamma^\mu_{\nu_1\lambda} \dot{x}^{\nu_2} \ldots \dot{x}^{\nu_h} \frac{\partial^{h-1}}{\partial \dot{x}^{\nu_2} \ldots \partial \dot{x}^{\nu_h}} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\mu}\right)$$

$$= h!\, \partial_\lambda F - h\, \dot{x}^{\nu_1} \Gamma^\mu_{\nu_1\lambda} (h-1)!\, \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\mu},$$

car la dérivée $\dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}^\mu}$ est une fonction homogène de degré $h-1$. En somme

$$\nabla_\lambda F = \partial_\lambda F - \dot{x}^\nu \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\mu}. \tag{27}$$

D'autre part

$$\frac{D}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\lambda} = \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\lambda} - \Gamma^\mu_{\lambda\nu} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\mu} \dot{x}^\nu$$

et les équations (24) s'écrivent alors

$$\partial_\lambda F - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\lambda} + 2\, \Gamma^\mu_{[\lambda\nu]} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\mu} \dot{x}^\nu = 0. \tag{28}$$

Pour les connexions symétriques, ces équations se confondent, en effet, avec celles d'Euler.

3. Cas de variétés non holonomes. Dans la suite, je vais montrer que les équations absolues des extrémales gardent leur forme encore pour une variété plongée dans un espace de Riemann. J'aborderai tout de suite le cas général d'une *variété riemannienne non holonome* V^m_n, plongée dans un espace riemannien holonome V_n et définie moyennant les $n-m$ équations non intégrables [8])

$$\Phi^K_\nu\, dx^\nu = 0, \quad K = 1, 2, \ldots n-m. \tag{29}$$

[8]) Voir Horák, Mécanique absolue et sa représentation dans l'espace-temps des configurations. Prace Mat.-Fiz., Warszawa, XLII, (1934) p. 64—112, nos 1, 3, 16, (dans la suite désigné par M. A.); Schouten, Über nichtholonome Übertragungen in einer L_n. Math. Zeitschr., 30 (1929) p. 149—172; Schouten — van Kampen, Zur Einbettungs— und Krümmungstheorie nichtholonomer Gebilde, Math. Ann., 103 (1930) p. 752—783.

Désignant par B^{ν}_{λ} les composantes de l'affineur unitaire de la V^m_n, on a

(30) $$\Phi^K_{\nu} B^{\nu}_{\mu} = 0, \quad B^{\nu}_{\mu} B^{\mu}_{\lambda} = B^{\nu}_{\lambda}$$

et la composante tangentielle v'^{ν} d'un vecteur v^{ν} est définie comme suit

$$v'^{\nu} = B^{\nu}_{\lambda} v^{\lambda}, \quad v_{\lambda}' = B^{\nu}_{\lambda} v_{\nu}$$

de sorte que pour les vecteurs v^{ν}, w_{λ} tangents à la V^m_n, on a les relations

(31) $$v^{\nu} = v'^{\nu} = B^{\nu}_{\lambda} v^{\lambda}, \quad w_{\lambda} = w_{\lambda}' = B^{\nu}_{\lambda} w_{\nu}.$$

La différentielle absolue, correspondant à la connexion riemannienne induite dans la V^m_n, d'un vecteur tangentiel s'écrit donc

(32) $$D' v^{\nu} = B^{\nu}_{\lambda} D v^{\lambda} = D v^{\nu} - v^{\lambda} D B^{\nu}_{\lambda}.$$

En introduisant l'affineur [9])

(33) $$H^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\mu\lambda} = B^{\sigma}_{\mu} B^{\rho}_{\lambda} \nabla_{\sigma} B^{\nu}_{\rho},$$

on obtient, en vertu de (1) et de la relation

(34) $$B^{\nu}_{\mu} d x^{\mu} = d x^{\nu},$$

exprimant que l'élément linéaire est, en raison de (29), tangent à la V^m_n,

(35) $$D' v^{\nu} = D v^{\nu} - H^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\lambda\mu} v^{\mu} d x^{\lambda} = d v^{\nu} + \left(\begin{Bmatrix} \lambda\mu \\ \nu \end{Bmatrix} - H^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\lambda\mu} \right) v^{\mu} d x^{\lambda},$$

(36) $$D' w_{\lambda} = D w_{\lambda} - H^{\cdot\cdot\nu}_{\mu\cdot\lambda} w_{\nu} d x^{\mu} = d w_{\mu} - \left(\begin{Bmatrix} \lambda\mu \\ \nu \end{Bmatrix} + H^{\cdot\cdot\nu}_{\mu\cdot\lambda} \right) w_{\nu} d x^{\mu}.$$

Pour deux vecteurs tangentiels, on aura

$$w_{\nu} D' v^{\nu} + v^{\mu} D' w_{\mu} = D(v^{\nu} w_{\nu}) - w_{\nu} H^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\lambda\mu} v^{\mu} d x^{\lambda} -$$

$$- v^{\lambda} H^{\cdot\cdot\nu}_{\mu\cdot\lambda} w_{\nu} d x^{\mu} = d(v^{\nu} w_{\nu})$$

car l'affineur $H^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\mu\lambda}$ vérifie les relations (voir Schouten l. c.)

(37) $$H^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\mu\lambda} B^{\rho}_{\nu} = 0.$$

[9]) Schouten: *R. K.* et les autres travaux cités.

Donc la règle ordinaire pour la différentiation d'un produit reste valable encore pour l'opérateur D'.

Il s'agit maintenant de la position du problème du calcul absolu des variations dans la variété non holonome V^m_n. D'après (34), le vecteur $\dot{x}^{\nu}$ est tangent à la V^m_n et nous allons supposer qu'aussi les champs affinoriels, intervenant dans F, soient situés dan la V^m_n. Conséquemment, nous allons exiger que de même *la variation* δx^{ν} *soit un vecteur tangent à la* V^m_n, d'ailleurs arbitraire. Donc les δx^{ν} vérifient les mêmes conditions que les $d x^{\nu}$, à savoir:

(38) $$\Phi^K_{\lambda} \delta x^{\lambda} = 0.$$

Par suite, en introduisant la variation absolue dans la V^m_n que je désigne par Δ' et définis comme suit

(39) $$\Delta' v^{\nu} = B^{\nu}_{\lambda} \Delta v^{\lambda}$$

on tire de (38) les équations

(40) $$B^{\nu}_{\mu} \delta x^{\mu} = \delta x^{\nu},$$

(41) $$\Delta' v^{\nu} = \Delta v^{\nu} - H^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\mu\lambda} v^{\lambda} \delta x^{\mu} = \delta v^{\nu} + \left(\begin{Bmatrix} \lambda\mu \\ \nu \end{Bmatrix} - H^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\mu\lambda} \right) v^{\lambda} \delta x^{\mu}$$

analogues à celles (34), (35), découlant de (29). En appliquant la différentiation absolue au vecteur δx^{ν}, il vient

$$D \delta x^{\nu} = d \delta x^{\nu} + \begin{Bmatrix} \mu\lambda \\ \nu \end{Bmatrix} d x^{\lambda} \delta x^{\mu}$$

et en raison de (32) et (35)

$$D' \delta x^{\nu} = B^{\nu}_{\lambda} D \delta x^{\lambda} = D \delta x^{\nu} - H^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\lambda\mu} d x^{\lambda} \delta x^{\mu}.$$

Par analogie, en appliquant (39) et (41) au déplacement $d x^{\nu}$, on obtient

$$\Delta d x^{\nu} = \delta d x^{\nu} + \begin{Bmatrix} \lambda\mu \\ \nu \end{Bmatrix} d x^{\lambda} \delta x^{\mu},$$

$$\Delta' d x^{\nu} = B^{\nu}_{\lambda} \Delta d x^{\lambda} = \Delta d x^{\nu} - H^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\mu\lambda} d x^{\lambda} \delta x^{\mu}.$$

En combinant les quatres dernières équations, on trouve

(42) $$\Delta d x^{\nu} - D \delta x^{\nu} = \delta d x^{\nu} - d \delta x^{\nu}$$

(43) $$\Delta' d x^{\nu} - D' \delta x^{\nu} = B^{\nu}_{\lambda} (\Delta d x^{\lambda} - D \delta x^{\lambda}) =$$

$$= \Delta\, d\, x^\nu - D\, \delta\, x^\nu + 2\, H_{[\lambda\mu]}^{\cdot\cdot\nu}\, d\, x^\lambda\, \delta\, x^\mu.$$

D'après (42), les différences $\delta\, d\, x^\nu - d\, \delta\, x^\nu$ sont des composantes d'un vecteur, joignant le point initial au point final du parallélogramme engendré par les deux vecteurs $d\, x^\nu$, $\delta\, x^\nu$. Sa composante tangentielle est donnée moyennant l'équation (43). En retranchant cette composante du vecteur lui-même, on obtient sa composante *normale*. Si l'on désigne par v''^ν la composante normale du vecteur v^ν, il est donc

(44) $$v''^\nu = v^\nu - v'^\nu = C_\lambda^\nu\, v^\lambda$$

où

(45) $$C_\lambda^\nu = A_\lambda^\nu - B_\lambda^\nu, \quad A_\lambda^\nu = \begin{cases} 1 & \text{si } \nu = \lambda \\ 0 & \text{si } \nu \neq \lambda. \end{cases}$$

Par conséquent, la composante normale du vecteur en question est donnée, en vertu de (43), par l'expression

(46) $$C_\rho^\nu\, (\delta\, d\, x^\rho - d\, \delta\, x^\rho) = 2\, H_{[\mu\lambda]}^{\cdot\cdot\nu}\, d\, x^\lambda\, \delta\, x^\mu.$$

Or, les conditions nécessaires et suffisantes d'holonomie de la variété V_n^m s'écrivent [10])

(47) $$H_{[\mu\lambda]}^{\cdot\cdot\nu} = 0.$$

Donc, pour une variété *holonome*, la composante normale du vecteur $\delta\, d\, x^\nu - d\, \delta\, x^\nu$ est *nécessairement égale à zéro*, tandis que dans une variété *non holonome*, il est *impossible* de construire un parallélogramme *fermé* infiniment petit [11]). On voit que, pour une variété non holonome, toutes les différences $\delta\, d\, x^\nu - d\, \delta\, x^\nu$ ne peuvent pas s'annuler simultanément et que par conséquent les opérations d et δ *ne sont pas permutables*, car la composante normale du vecteur $\delta\, d\, x^\nu - d\, \delta\, x^\nu$ est déterminée par (46). D'autre part, sa composante tangentielle est complètement arbitraire et nous allons supposer qu'elle s'annulle:

(48) $$\Delta'\, d\, x^\nu - D'\, \delta\, x^\nu = B_\lambda^\nu\, (\Delta\, d\, x^\lambda - D\, \delta\, x^\lambda) = B_\lambda^\nu\, (\delta\, d\, x^\nu - d\, \delta\, x^\nu) = 0.$$

Il est à souligner que cette dernière supposition est l'unique possible, si l'on veut que dans le cas où V_n^m devient holonome, les symboles d et δ soient permutables. En effet, lorsqu'on ajoute aux conditions

[10]) Schouten, l. c. Math. Zeitschr. 30.

[11]) Cf. le travail de Schouten que je viens de citer et Horák, *M. A.*, no 16.

$\delta\, d\, x^\nu = d\, \delta\, x^\nu$ l'équation (47), on tire de (42) et (43) les relations (48). Donc la supposition (48) est suffisante et nécessaire pour que le calcul absolu des variations relatif à une variété non holonome se réduise au calcul ordinaire, lorsque la variété devient holonome.

En somme, nous avons donc supposé que l'affineur a et le vecteur $\dot{x}^\nu$ soient situés dans la V_n^m et que les trajectoires voisines s'obtiennent en prenant pour $\delta\, x^\nu$ un vecteur infinitésimal soumis aux conditions (38) et (48).

Par un raisonnement analogue à celui que nous avons fait au no **2**, on s'assure que la condition nécessaire pour le minimum s'écrit encore ici

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} F\, d\, t \geqslant 0$$

ou bien

(49) $$\Delta \int_{t_1}^{t_2} F\, d\, t \geqslant 0$$

car, pour la fonction scalaire F, a lieu la relation

$$\delta\, F = \Delta\, F,$$

lorsque Δ désigne la variation absolue correspondant à la connexion riemannienne définie dans la variété holonome V_n. Nous verons que de même

$$\delta\, F = \Delta\, F = \Delta'\, F$$

de sorte que la condition du minimum devient

(50) $$\Delta' \int_{t_1}^{t_2} F\, d\, t \geqslant 0$$

Pour le démontrer, je me servirai du théorème suivant, facile à déduire:

(*III*) *La dérivée d'une fonction scalaire par rapport à un affineur, situé dans une variété non holonome V_n^m, est aussi un affineur situé dans la même variété.*

Considérons par exemple l'affineur $a_{\sigma\tau}^\rho$, situé dans la V_n^m, de sorte qu'il se confond avec sa composante tangentielle

$$a_{\sigma\tau}'^\rho = B_\nu^\rho\, B_\sigma^\lambda\, B_\tau^\mu\, a_{\lambda\mu}^\nu = a_{\sigma\tau}^\rho.$$

Donc

$$\frac{\partial F}{\partial \overset{\nu}{a}_{\lambda\mu}} = \frac{\partial F}{\partial \overset{\prime}{a}{}^{\rho}_{\sigma\tau}} \frac{\partial \overset{\prime}{a}{}^{\rho}_{\sigma\tau}}{\partial \overset{\nu}{a}_{\lambda\mu}} = \frac{\partial F}{\partial a^{\rho}_{\sigma\tau}} B^{\rho}_{\nu} B^{\lambda}_{\sigma} B^{\mu}_{\tau}$$

ce qui veut dire que la dérivée est égale à sa composante tangentielle et par suite située dans la V_n^m. Notre théorème se trouve ainsi démontré pour un choix particulier de l'affineur a, mais sa validité est évidemment générale. Or, la variation absolue de F s'écrit

$$\Delta F = \frac{\partial F}{\partial a} \Delta a + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^{\lambda}} \Delta \dot{x}^{\lambda}.$$

D'après le théorème *III*, la dérivée $\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^{\lambda}}$ est un vecteur tangent à la V_n^m et l'on peut donc remplacer, dans le produit scalaire $\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^{\lambda}} \Delta \dot{x}^{\lambda}$, le vecteur $\Delta \dot{x}^{\lambda}$ par sa composante tangentielle $\Delta' \dot{x}^{\lambda}$. Le même raisonnement s'applique évidemment au produit $\frac{\partial F}{\partial a} \Delta a$ de sorte que

$$\Delta F = \frac{\partial F}{\partial a} \Delta' a + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^{\lambda}} \Delta' \dot{x}^{\lambda} = \Delta' F$$

ce qui prouve l'équivalence des équations (49) et (50).

Je me propose maintenant de déduire de (50) les équations des extrémales. D'après ce qui précède

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial F}{\partial a} \Delta' a + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^{\mu}} \Delta' \dot{x}^{\mu} \right] dt \geqq 0$$

et, en vertu de (48),

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial F}{\partial a} \nabla'_{\mu} a \, \partial x^{\mu} + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^{\mu}} \frac{D'}{dt} \partial x^{\mu} \right] dt \geqq 0.$$

Au cas des limites fixes $(\partial x^{\nu})_{t_1} = (\partial x^{\nu})_{t_2} = 0$ ce qui donne

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial F}{\partial a} \nabla'_{\mu} a - \frac{D'}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^{\mu}} \right] \partial x^{\mu} \, dt \geqq 0.$$

Les conditions (38) étant homogènes, on peut changer de signe de toutes les variations ∂x^{μ} et l'on arrive alors à la condition de l'extremum

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial F}{\partial a} \nabla'_{\mu} a - \frac{D'}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^{\mu}} \right] \partial x^{\mu} \, dt = 0 \tag{51}$$

avec les conditions supplémentaires (38). Or, si l'on pose

$$\partial x^{\mu} = B^{\mu}{}_{\lambda} \, \varepsilon^{\lambda},$$

ε^{λ} étant un vecteur infinitésimal absolument quelconque de la V_n, les ∂x^{μ} satisfont à (38) de sorte que

$$B^{\mu}{}_{\lambda} \left[\frac{\partial F}{\partial a} \nabla'_{\mu} a - \frac{D'}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^{\mu}} \right] = 0.$$

Mais

$$B^{\mu}{}_{\lambda} \nabla'_{\mu} = \nabla'_{\lambda}, \quad B^{\mu}{}_{\lambda} D' w_{\mu} = D' w_{\lambda}$$

et si l'on écrit conséquemment

$$\nabla'_{\lambda} F = B^{\mu}{}_{\lambda} \nabla_{\mu} F = \frac{\partial F}{\partial a} B^{\mu}{}_{\lambda} \nabla_{\mu} a = \frac{\partial F}{\partial a} \nabla'_{\lambda} a,$$

on en tire

$$\nabla'_{\lambda} F - \frac{D'}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^{\lambda}} = 0. \tag{53}$$

Ce sont les équations cherchées des extrémales qui peuvent être aussi remplacées par la condition

$$\Delta' \int_{t_1}^{t_2} F \, dt = 0. \tag{54}$$

Il faut remarquer que les n équations (53) ne sont équivalentes qu'à m équations indépendantes et par suite, pour déterminer toutes les fonctions $x^{\nu}(t)$, il est indispensable d'y ajouter encore les $n-m$ conditions (29). Ce fait est conforme au caractère de notre problème qui est défini relativement à une variété à m dimensions, plongée dans la V_n. C'est l'introduction de la différentiation absolue, correspondant à la connexion induite dans la V_n^m, qui donne à nos équations la forme simple (53) tandis que leur forme explicite diffère, en général, de celle des équations d'Euler encore si la variété plongée dans la V_n est holonome.

Pour le montrer, nous allons nous borner au cas où F est une fonction homogène en $\dot{x}^\nu$. Les équations (36) ont la forme de celles (2), les coefficients $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$ étant remplacés par le binôme $\begin{Bmatrix}\lambda\mu\\ \nu\end{Bmatrix} + H_{\mu\cdot\lambda}^{\cdot\,\nu}$. Donc, par une marche complètement analogue à celle faite au no **2**, on arrive aux équations semblables à (28)

$$\partial_\lambda F - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\lambda} + 2\, H_{[\mu\cdot\lambda]}^{\cdot\,\nu}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\nu}\dot{x}^\mu = 0.$$

Mais le vecteur $\dot{x}^\mu$ est tangent à la V_n^m et alors, en vertu de (37),

$$H_{\lambda\cdot\mu}^{\cdot\,\nu}\,\dot{x}^\mu = 0$$

ce qui entraîne

$$\partial_\lambda F - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\lambda} + H_{\mu\cdot\lambda}^{\cdot\,\nu}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\nu}\dot{x}^\mu = 0. \tag{55}$$

Par la même marche, on tire de (36) les équations

$$\nabla_\lambda F - \frac{D}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\lambda} + H_{\mu\cdot\lambda}^{\cdot\,\nu}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\nu}\dot{x}^\mu = 0 \tag{56}$$

qui en raison de la symétrie de la connexion riemannienne sont identiques aux équations (55).

4. Introduction des paramètres non holonomes. On sait que les points d'une variété non holonome V_n^m ne peuvent pas être déterminés par m paramètres indépendants, puisque les relations (29) ne sont pas intégrables. Cependant, on peut exprimer les dx^ν au moyen de m quantités indépendantes dq^k $(k = 1, 2, \ldots m)$, en posant[12])

$$dx^\nu = B_k^\nu\, dq^k \tag{57}$$

où les coefficients $B_k^\nu(x)$ vérifient les relations

$$\Phi_\nu^K B_k^\nu = 0, \qquad B_\nu^\lambda B_k^\nu = B_k^\lambda. \tag{58}$$

On appelle différentielles des *paramètres non holonomes* q^k les m quantités dq^k et l'on introduit les notations

$$\partial_k = B_k^\lambda \partial_\lambda, \quad \nabla'_k = B_k^\lambda \nabla_\lambda = B_k^\lambda \nabla'_\lambda, \tag{59}$$

[12]) Cf. Horák, *M. A.*, no 3

$$D' v^k = B_\nu^k D v^\nu = B_\nu^k D' v^\nu = \nabla'_j v^k\, dq^j, \tag{60}$$

$$D' w_i = B_i^\lambda D w_\lambda = B_i^\lambda D' w_\lambda = \nabla'_j w_i\, dq^j. \tag{61}$$

En effectuant les calculs, on obtient

$$\nabla'_j v^k = \partial_j v^k + \Theta_{ij}^k v^i, \quad \nabla'_j w_i = \partial_j w_i - \Theta_{ij}^k w^k \tag{62}$$

où

$$\Theta_{ij}^k = \begin{Bmatrix} i k \\ j \end{Bmatrix}' + \frac{1}{2}\left(\Pi_{ji}^k + g'_{ir}\, g'^{ks}\, \Pi_{sj}^r + g'_{rj}\, g'^{ks}\, \Pi_{si}^r\right) \tag{63}$$

les $\begin{Bmatrix} i k \\ j \end{Bmatrix}'$ désignant les symboles de Christoffel relatifs à la forme

$$g'_{ik} = B_k^\lambda B_i^\mu g_{\lambda\mu}$$

et les Π_{ji}^k étant définis comme suit

$$\Pi_{ji}^k = 2\, B_\lambda^k \partial_{[j} B_{i]}^\lambda = 2\, \Theta_{[ij]}^k \tag{64}$$

où

$$B_\lambda^k = B_i^\mu g_{\lambda\mu} g'^{kl}, \quad B_\lambda^k B_k^\nu = B_\lambda^\nu. \tag{65}$$

Pour avoir les équations des extrémales pour les paramètres non holonomes, il suffit de multiplier (53) par B_k^λ et faire la somme ce qui donne en vertu de (59) et (61)

$$\nabla'_k F - \frac{D'}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}^k} = 0. \tag{66}$$

Mais on peut déduire ces équations aussi directement de la condition (54). En raison de (38) et (57), on écrit d'abord

$$\delta x^\nu = B_k^\nu \delta q^k, \quad \dot{x}^\nu = B_k^\nu \dot{q}^k \tag{67}$$

où $\dot{q}^k$ n'est qu'une notation abbrégée pour $\dfrac{dq^k}{dt}$. Par analogie de (60),

$$D' \delta q^k = B_\nu^k D \delta x^\nu,$$

$$\Delta' dq^k = B_\nu^k \Delta\, dx^\nu$$

et donc en vertu de (48)

$$\Delta' d q^k - D' \delta q^k = B^k_\nu (\Delta d x^\nu - D \delta x^\nu) = 0. \tag{68}$$

Naturellement les différences $\delta d q^k - d \delta q^k$ ne s'annullent pas, en général, car on déduit sous la supposition (68): [13])

$$\delta d q^k - d \delta q^k = \Pi^k_{ij} d q^i \delta q^j.$$

Cela étant, il vient d'après (67) et (59)

$$\delta F = \Delta' F = \frac{\partial F}{\partial a} \nabla'_\lambda a \delta x^\lambda + \frac{\partial F}{\partial \dot q^k} \Delta' \dot q^k =$$

$$= \frac{\partial F}{\partial a} \nabla'_k a \delta q^k + \frac{\partial F}{\partial \dot q^k} \Delta' \dot q^k = B^\lambda_k \nabla'_\lambda F \delta q^k + \frac{\partial F}{\partial \dot q^k} \frac{D'}{dt} \delta q^k$$

où l'on a écrit, par égard de (67),

$$\frac{\partial F}{\partial \dot q^k} = \frac{\partial F}{\partial \dot x^\nu} \frac{\partial \dot x^\nu}{\partial \dot q^k} = \frac{\partial F}{\partial \dot x^\nu} B^\nu_k. \tag{69}$$

En le portant dans (54), nous aurons en raison de (59)

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\nabla'_k F - \frac{D'}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot q^k} \right] \delta q^k \, dt = 0$$

puisqu'il faut supposer $(\delta q^k)_{t_1} = (\delta q^k)_{t_2} = 0$. Or, les δq^k sont indépendants de sorte qu'on arrive aux équations (66). Donc, en appliquant les paramètres non holonomes indépendants et la variation absolue, le calcul se fait exactement comme s'il s'agissait d'un problème dans l'espace holonome.

Quant à la forme explicite des équations (66), je vais la déduire dans le cas où F est homogène en $\dot x^\nu$. Lorsqu'on introduit les $\dot q^k$ moyennant (67), F devient une fonction homogène en $\dot q^k$ et, regardant les équations (62), on s'assure aisément que les équations des extrémales prennent la forme suivante, analogue à (28):

$$\partial_k F - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot q^k} + 2 \Theta^i_{[kj]} \frac{\partial F}{\partial \dot q^i} \dot q^j = 0$$

ou d'après (64)

$$\partial_k F - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot q^k} + 2 B^i_\lambda \partial_{[j} B^\lambda_{k]} \frac{\partial F}{\partial \dot q^i} \dot q^j = 0. \tag{70}$$

[13]) Horák, *M. A.*, no 16.

Tenant compte de (69) et (65), on aura

$$B^i_\lambda \frac{\partial F}{\partial \dot q^i} = B^i_\lambda B^\mu_i \frac{\partial F}{\partial \dot x^\mu} = B^\mu_\lambda \frac{\partial F}{\partial \dot x^\mu} = \frac{\partial F}{\partial \dot x^\lambda}$$

ce qui donne

$$\partial_k F - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot q^k} + 2 \frac{\partial F}{\partial \dot x^\lambda} \partial_{[j} B^\lambda_{k]} \dot q^j = 0. \tag{71}$$

Il importe de souligner le fait que les équations absolues des extrémales pour les paramètres non holonomes (66) sont de la même forme comme pour ceux holonomes ce qui n'est plus vrai pour les équations d'Euler.

Pour le montrer, j'introduirai les paramètres non holonomes q^α dans un espace riemannien holonome V_n, en posant

$$d q^\alpha = A^\alpha_\lambda d x^\lambda, \quad d x^\lambda = A^\lambda_\alpha d q^\alpha,$$

les fonctions $A^\alpha_\lambda, A^\lambda_\alpha$ remplissant les relations:

$$A^\alpha_\lambda A^\nu_\alpha = A^\nu_\lambda = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}, \quad A^\alpha_\lambda A^\lambda_\beta = A^\alpha_\beta = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}.$$

Alors les résultats déduits dans le cas d'une variété non holonome restent valables encore ici à condition de remplacer les B par les A, mais il faut se rendre compte qu'en multipliant par A^α_λ on n'obtient qu'une autre espèce de composantes, correspondant aux paramètres non holonomes. Par conséquent, on écrit ici

$$\nabla_\alpha = A^\lambda_\alpha \nabla_\lambda, \quad D w_\alpha = A^\lambda_\alpha D w_\lambda.$$

Dans ces conditions, les équations (66) deviennent

$$\nabla_\alpha F - \frac{D}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot q^\alpha} = 0 \tag{72}$$

ce qu'on obtiendrait aussi en multipliant (24) par A^λ_α et faisant la somme. Pour une fonction homogène, on tire de (70)

$$\partial_\alpha F - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot q^\alpha} + 2 A^\beta_\lambda \partial_{[\gamma} A^\lambda_{\alpha]} \frac{\partial F}{\partial \dot q^\beta} \dot q^\gamma = 0$$

ou en introduisant les quantités $\Pi^\beta_{\gamma\alpha}$ analogues aux Π^k_{ji}, définis moyen-

nant (64),

$$\partial_\alpha F - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot q^\alpha} + \frac{\partial F}{\partial \dot q^\beta}\Pi^\beta_{\gamma\alpha}\dot q^\gamma = 0 \tag{73}$$

Ces équations représentent l'extension des équations d'Euler aux paramètres non holonomes [14]).

5. Extremum lié. On sait que le problème de rendre minima l'intégrale

$$\int_{t_1}^{t_2} F\,dt$$

avec les $n-m$ conditions accessoires

$$\Phi^K(x) = 0, \quad K = 1, 2, \ldots n-m, \tag{74}$$

se réduit au problème de l'extremum libre de l'intégrale

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(F + \Lambda_K \Phi^K\right) dt$$

et que la condition nécessaire

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\left(F + \Lambda_K \Phi^K\right) dt = 0 \tag{75}$$

donne les équations des extrémales sous la forme

$$\partial_\lambda F - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot x^\lambda} + \Lambda_K \Phi^K_\lambda = 0 \tag{76}$$

où l'on a écrit

$$\Phi^K_\lambda = \partial_\lambda \Phi^K.$$

Si l'on remplace les conditions (74) par les relations

$$\Phi^K_\nu \dot x^\nu = 0, \tag{77}$$

l'équation (75) devient

[14]) Cf. Horák, Sur une forme des équations d'Euler, Comptes rendus du Deuxième Congrès des mathématiciens des pays slaves tenu à Prague 23 — 28 septembre 1934.

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\left(F + \Lambda_K \Phi^K_\nu \dot x^\nu\right) dt = 0 \tag{78}$$

et conduit aux équations suivantes des extrémales

$$\partial_\lambda F - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot x^\lambda} + \Lambda_K \dot x^\nu \partial_\lambda \Phi^K_\nu - \frac{d}{dt}\left(\Lambda_K \Phi^K_\lambda\right) = 0$$

ou bien

$$\partial_\lambda F - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot x^\lambda} - \frac{d\Lambda_K}{dt}\Phi^K_\lambda + 2\Lambda_K \partial_{[\lambda}\Phi^K_{\nu]}\dot x^\nu = 0. \tag{79}$$

Lorsque les conditions (77) ne sont pas intégrables, les équations des extrémales (79) diffèrent de celles (76) [15]).

Envisageons maintenant le dernier cas au point de vue du calcul absolu. Les conditions (77) définissent dans la V_n une variété non holonome V_n^m. Nous avons donc affaire avec le problème de l'extremum dans une variété non holonome que nous avons traité au no **3**. Or, il est naturel d'ajouter aux relations (77) les conditions supplémentaires (38):

$$\Phi^K_\nu\, \delta x^\nu = 0$$

bien connues dans la Mécanique qui expriment que la variation δx^ν doit être tangente à la V_n^m. Le calcul absolu des variations donne, dans ce cas, les équations (53) ou bien (55). Je vais montrer qu'on peut donner à ces dernières équations la forme (76). En effet, le dernier terme du premier membre de (55) est un vecteur covariant normal à la V_n^m; puisque d'après (37)

$$H^{\cdot\nu}_{\mu.\lambda} B^\lambda_\sigma = 0.$$

Il peut donc être exprimé comme une forme linéaire des $n-m$ vecteurs covariants normaux Φ^K_λ c'est-à-dire on peut poser

$$H^{\cdot\nu}_{\mu.\lambda}\frac{\partial F}{\partial \dot x^\nu}\dot x^\mu = \Lambda_K \Phi^K_\lambda$$

de sorte que les équations (55) deviennent

$$\partial_\lambda F - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot x^\lambda} + \Lambda_K \Phi^K_\lambda = 0. \tag{80}$$

[15]) Voir le travail de A. Voss, cité dans la note [1]).

Donc les équations des extrémales, fournies par le calcul absolu des variations, gardent la forme (76) encore pour les variétés *non holonomes*. Par analogie, les équations (56) peuvent s'écrire aussi

$$\nabla_\lambda F - \frac{D}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\lambda} + \Lambda_K \Phi^K_\lambda = 0. \tag{81}$$

Pour le calcul absolu, le problème de l'extremum lié du type considéré est donc équivalent au problème de l'extremum libre pour une variété non holonome. Pour le calcul ordinaire, il n'en est plus ainsi que si les conditions accessoires sont intégrables. Cependant on peut — au point de vue formelle — modifier le calcul ordinaire de la manière que l'équation (78) fournisse les équations (80) encore, lorsque les relations (77) ne sont pas intégrables ce que je me propose de montrer dans la suite.

Le calcul absolu des variations diffère de celui ordinaire par l'existence des conditions (38), mais on peut les faire disparaître en ajoutant à (77) les relations

$$\delta\, d\, x^\nu - d\, \delta\, x^\nu = 2\, H_{[\lambda\mu]}^{\cdot\cdot\nu}\, d\, x^\mu\, \delta\, x^\lambda \tag{82}$$

découlant par comparaison des équations (42), (43) et (48). On tire d'abord de (33)

$$H_{[\lambda\mu]}^{\cdot\cdot\nu} = B^\sigma_{[\lambda} B^\rho_{\mu]}\, \partial_\sigma B^\nu_\rho \tag{83}$$

d'où l'on voit que le second membre de (82) est indépendant de la connexion définie dans la variété V_n^m et donc complètement déterminé sans introduire le calcul absolu. Il faut, en vertu de (82), résigner la permutabilité des opérateurs δ et d, mais cela fait, on peut envisager les variations $\delta\, x^\nu$ comme indépendantes conformément à la méthode ordinaire. Or, la condition (78) s'écrit

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left(\partial_\lambda F + \Lambda_K \dot{x}^\mu \partial_\lambda \Phi^K_\mu \right) \delta\, x^\lambda + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\nu} + \Lambda_K \Phi^K_\nu \right) \delta\, \dot{x}^\nu \right\} dt = 0 \tag{84}$$

et tenant compte de (82) on aura

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\nu} + \Lambda_K \Phi^K_\nu \right) \delta\, \dot{x}^\nu = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\nu} \delta\, x^\nu + \Lambda_K \Phi^K_\nu\, \delta\, x^\nu \right)$$

$$- \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\lambda} + \Lambda_K \Phi^K_\lambda \right) \delta\, x^\lambda + 2 \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\nu} + \Lambda_K \Phi^K_\nu \right) H_{[\lambda\mu]}^{\cdot\cdot\nu}\, \dot{x}^\mu\, \delta\, x^\lambda.$$

Comme je l'ai déjà signalé, le vecteur $\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\nu}$ est tangent à la V_n^m et donc le produit

$$H_{[\lambda\mu]}^{\cdot\cdot\nu} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\nu} = 0.$$

Les limites supposées fixes, (84) devient alors

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \partial_\lambda F - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\lambda} - \frac{d}{dt}\left(\Lambda_K \Phi^K_\lambda \right) + \Lambda_K \dot{x}^\mu \left(\partial_\lambda \Phi^K_\mu + 2\, \Phi^K_\nu H_{[\lambda\mu]}^{\cdot\cdot\nu} \right) \right\} \delta\, x^\lambda\, dt = 0$$

ou encore

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \partial_\lambda F - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\lambda} - \Phi^K_\lambda \frac{d\Lambda_K}{dt} + 2\, \Lambda_K \dot{x}^\mu \left(\partial_{[\lambda} \Phi^K_{\mu]} + \Phi^K_\nu H_{[\lambda\mu]}^{\cdot\cdot\nu} \right) \right\} \delta\, x^\lambda\, dt = 0. \tag{85}$$

En vertu de (83), (30), (34), on a

$$\dot{x}^\mu \Phi^K_\nu H_{[\lambda\mu]}^{\cdot\cdot\nu} = \dot{x}^\mu B^\sigma_{[\lambda} B^\rho_{\mu]} \Phi^K_\nu \partial_\sigma B^\nu_\rho$$

$$= - \dot{x}^\mu B^\sigma_{[\lambda} B^\rho_{\mu]} B^\nu_\rho \partial_\sigma \Phi^K_\nu = - \dot{x}^\mu B^\sigma_\lambda \partial_{[\sigma} \Phi^K_{\mu]}$$

et, en conséquence de l'indépendance des $\delta\, x^\nu$, l'équation (85) donne

$$\partial_\lambda F - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\lambda} - \Phi^K_\lambda \frac{d\Lambda_K}{dt} + 2\, \Lambda_K \dot{x}^\mu \left(\partial_{[\lambda} \Phi^K_{\mu]} - B^\sigma_\lambda \partial_{[\sigma} \Phi^K_{\mu]} \right) = 0$$

et d'après (45)

$$\partial_\lambda F - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\lambda} - \Phi^K_\lambda \frac{d\Lambda_K}{dt} + 2\, \Lambda_K \dot{x}^\mu C^\sigma_\lambda \partial_{[\sigma} \Phi^K_{\mu]} = 0. \tag{86}$$

Le dernier terme est, en vertu de (44), un vecteur covariant normal à la V_n^m. Donc il peut s'écrire sous la forme

$$\bar{\Lambda}_K \Phi^K_\lambda$$

et en posant Λ_K au lieu de la différence

$$\bar{\Lambda}_K - \frac{d\Lambda_K}{dt}$$

on arrive précisément aux équations (80).

Remarque. Les équations (82) sont, comme nous l'avons vu, indépendantes de la connexion définie dans la V_n^m, mais elles découlent des équations (43) que nous avons déduites par le calcul absolu. Or, les équations (80) peuvent s'obtenir de (78) sans appliquer le calcul absolu. Reprenons les conditions fondamentales (29) et (38). En prenant la variation de la première et la différentielle de la seconde, on en tire les $n-m$ relations

$$\Phi_\nu^K(\partial d x^\nu - d\partial x^\nu) = 2\,\partial_{[\mu}\Phi_{\lambda]}^K\, d x^\mu\, \partial x^\lambda \tag{87}$$

qui avec les m relations (48):

$$B_\nu^\lambda(\partial d x^\nu - d\partial x^\nu) = 0$$

sont équivalentes aux n équations (82). En effet, si l'on multiplie ces dernières par Φ_ν^K, en faisant la somme, on aura par égard de (83), (30), (34), (40)

$$\Phi_\nu^K(\partial d x^\nu - d\partial x^\nu) = 2\,\Phi_\nu^K\,\partial_{[\sigma}B_{\rho]}^\nu\, d x^\rho\, \partial x^\sigma = -2\,B_{[\rho}^\nu\,\partial_{\sigma]}\Phi_\nu^K\, d x^\rho\, \partial x^\sigma =$$
$$= 2\,\partial_{[\nu}\Phi_{\sigma]}^K\, d x^\nu\, \partial x^\sigma.$$

Par conséquent, la formule (78) donnera à l'aide des conditions (87) et (48) nécessairement les équations (80). En réalité, l'équation (84) fournit moyennant (87) et (48) les n relations

$$\partial_\lambda F - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\lambda} - \Phi_\lambda^K\frac{d\Lambda_K}{dt} = 0, \tag{88}$$

étant bien du type (80).[16])

5. Lignes de longueur stationnaire. Je me propose d'appliquer la méthode précédente au problème de trouver les lignes de longueur stationnaire dans un espace doué d'une connexion symétrique et d'une métrique quadratique régulière

$$d s^2 = g_{\mu\nu}\, d x^\mu\, d x^\nu.$$

Les lignes en question sont définies moyennant l'équation

[16]) La différence entre (88) et (86) s'explique par le fait que les formules (87) et (48) ne sont équivalentes à (82) que si l'on suppose (38). Dès que l'on fait abstraction de cette dernière supposition, comme nous l'avons fait en déduisant (86) à partir de (85), les résultats tirés de (82) et (87) peuvent présenter des différences — bien entendu purement formelles.

$$I = \int_{t_1}^{t_2} d s = \min.$$

ou bien

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{\mu\nu}\,\dot{x}^\mu\,\dot{x}^\nu}\, d t = \min.$$

où t signifie un paramètre arbitraire. Dans ce cas, la fonction

$$F = \sqrt{g_{\mu\nu}\,\dot{x}^\mu\,\dot{x}^\nu}$$

est homogène et du premier degré en $\dot{x}^\nu$ et ne contient pas explicitement t. Par suite, la valeur de l'intégrale I est déterminée par la forme de la trajectoire indépendamment de la manière dont les x^ν sont exprimés en fonction de t.[17]) Autrement dit, nous n'avons qu'à chercher, au lieu des trajectoires, les lignes extrémales. Nous les désignerons comme *lignes stationnaires*, mais il ne faut pas oublier qu'il s'agit de lignes de longueur stationnaire au sens du calcul absolu.

Les équations absolues des extrémales (24) deviennent ici

$$\frac{\dot{x}^\mu\,\dot{x}^\nu\,\nabla_\lambda g_{\mu\nu}}{2\sqrt{g_{\rho\sigma}\,\dot{x}^\rho\,\dot{x}^\sigma}} - \frac{D}{dt}\frac{g_{\lambda\nu}\,\dot{x}^\nu}{\sqrt{g_{\rho\sigma}\,\dot{x}^\rho\,\dot{x}^\sigma}} = 0.$$

En introduisant le vecteur unitaire

$$\frac{d x^\nu}{d s} = i^\nu$$

tangent à la ligne, nous aurons

$$\frac{1}{2}\, i^\mu\, i^\nu\, \nabla_\lambda g_{\mu\nu} - \frac{D\, g_{\lambda\nu}\, i^\nu}{d s} = 0.$$

Pour les connexions *métriques*, le tenseur fondamental est constant et l'on a, comme on sait,

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0,\quad D\, g_{\lambda\nu} = 0 \tag{89}$$

de sorte que les lignes stationnaires sont définies moyennant les équations

[17]) Cf. J. Hadamard, Leçons sur le Calcul des variations, Tome I, Paris (1910) no 72.

(90) $$\frac{D i_\lambda}{d s}=0 \quad \text{ou aussi} \quad \frac{D i^\nu}{d s}=0$$

qui définissent les *géodésiques*. Comme nous avons supposé que la connexion soit symétrique, l'espace considéré devient, en vertu de (89), riemannien. Donc *les lignes stationnaires d'un espace riemannien se confondent avec les géodésiques et il faut souligner que cela est vrai aussi pour des espaces non holonomes, tandis que les lignes stationnaires au sens du calcul ordinaire des variations diffèrent, dans ce dernier cas, des géodésiques.* En effet, les équations (53) donnent les équations correctes des géodésiques

$$\frac{D' i_\lambda}{d s}=0 \quad \text{ou aussi} \quad \frac{D' i^\nu}{d s}=0$$

et celles (56) deviennent

(91) $$\frac{D i_\lambda}{d s}=H'^{\ \nu}_{\mu,\lambda}\, i_\nu i^\mu$$

ou bien

$$\frac{D i^\nu}{d s}=H'^{\ \nu}_{\mu\lambda}\, i^\mu i^\lambda.$$

Cela exprime le fait bien connu que le vecteur courbure absolu se réduit, pour une géodésique, au vecteur courbure *forcée* [18]).

7. Équations du mouvement de systèmes matériels. Considérons un système matériel *conservatif* soumis à l'action d'un champ de forces au potentiel V. Si l'on désigne par x^ν les n paramètres déterminant la configuration du système et par t le temps, l'énergie cinétique s'écrira sous la forme

$$T=\frac{1}{2} a_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu.$$

D'après le principe d'Hamilton, les trajectoires du système dans l'espace des configurations sont des extrémales de l'intégrale

(92) $$\int_{t_1}^{t_2} (T-V)\, d t.$$

Pour pouvoir appliquer à ce problème le calcul absolu des variations, envisageons l'espace des configurations du système en question comme

[18]) Schouten, *R. K.*, p. 182.

un espace de Riemann au tenseur fondamental $g_{\mu\nu}$. Donc nous avons

$$F=T-V=\frac{1}{2} a_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu - V(x)$$

et les équations des extrémales (24) deviennent

$$\frac{1}{2}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \nabla_\lambda a_{\mu\nu} - \partial_\lambda V - \frac{D}{d t}(a_{\lambda\mu}\dot{x}^\mu)=0,$$

car V est une fonction scalaire. Or, il est avantageux de choisir le tenseur fondamental égal (ou proportionnel) à celui $a_{\mu\nu}$ de sorte que ces équations se simplifient comme suit:

(93) $$\frac{D(a_{\lambda\mu}\dot{x}^\mu)}{d t}=-\partial_\lambda V.$$

Ce sont les équations du mouvement du système d'où l'on tire l'intégrale des forces vives

$$\dot{x}^\lambda \frac{D(a_{\lambda\mu}\dot{x}^\mu)}{d t}=\frac{D}{d t}\left(\frac{1}{2} a_{\lambda\mu}\dot{x}^\lambda \dot{x}^\mu\right)=-\partial_\lambda V \dot{x}^\lambda$$

ou bien

$$d\left(\frac{1}{2} a_{\lambda\mu}\dot{x}^\lambda \dot{x}^\mu\right)=d T=-d V.$$

Au cas où il n'y a pas de forces, cette dernière équation donne

$$\left(\frac{d s}{d t}\right)^2=\text{const.}$$

et les équations (93) se réduisent à celles des géodésiques (90), conformément à un théorème bien connu. (Cf. Horák, *M. A.*, no 4, théorème *III.*).

Si l'on prescrit au système considéré des liaisons non holonomes sous la forme (29) ou bien (77), l'espace des configurations devient une variété riemannienne non holonome au tenseur fondamental

$$g'_{\mu\nu}=B^\rho_\mu B^\sigma_\nu a_{\rho\sigma}.$$

Les extrémales sont alors données moyennant les équations (53) ou (56). Les premières prennent la forme

$$\frac{D'}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^\lambda} = -\partial_\lambda V$$

et les secondes entraînent

$$\frac{D}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^\lambda} = H'^{\nu}_{\mu,\lambda}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^\nu}\dot{x}^\mu - \partial_\lambda V$$

ce qu'on peut aussi traduire d'après (81) par les équations

$$\frac{D}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^\lambda} = -\partial_\lambda V + \Lambda_K \Phi^K_\lambda. \tag{94}$$

Or, on sait que pour la connexion riemannienne définie ci-dessus

$$\frac{D}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^\lambda} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^\lambda} - \partial_\lambda T$$ [19])

et par suite les équations (94) sont identiques à celles de Lagrange. Donc les équations des extrémales donnent les équations du mouvement correctes encore si le système est non holonome. De plus, en appliquant les relations (66), valables pour les paramètres non holonomes, on arrive aux équations

$$\frac{D'}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k} = -\partial_k V \tag{95}$$

ou, en raison de (71),

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k} - \partial_k T + 2\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^\lambda}\partial_{[k} B^\lambda_{j]}\dot{q}^j = -\partial_k V. \tag{96}$$

Ce sont, comme on sait, [20]) les équations du mouvement correctes que nous avons obtenues directement par l'application des équations absolues des extrémales.

Il est à observer que les équations (93) peuvent s'écrire aussi sous la forme

$$\frac{D}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\lambda} - \nabla_\lambda L = 0 \tag{97}$$

qui découle directement de (24), car F est identique à la fonction de

[19]) Voir par exemple E. Cartan, Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann, Cahiers Scientifiques, Gauthier-Villars, Paris (1928), p. 42.

[20]) Horák, *M. A.*, no 4.

Lagrange $L = T - V$. Or, cette forme gardent encore les équations pour les systèmes non holonomes, parce que (53) donne

$$\frac{D'}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\lambda} - \nabla'_\lambda L = 0 \tag{98}$$

et en vertu de (66)

$$\frac{D'}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} - \nabla'_k L = 0 \tag{99}$$

ce qui n'est qu'une autre forme des équations (94) ou (96). On pourrait appeler *équations de Lagrange absolues* les équations (97), (98), (99) qui ont la même forme pour tous les systèmes conservatifs — holonomes ou non — et aussi pour les paramètres non holonomes.

En somme, aussi les trajectoires d'un système non holonome peuvent être regardées commes des extrémales relatives à l'intégrale (92) et par suite le principe d'Hamilton — même pour les systèmes non holonomes — garde le caractère d'un principe stationnaire, lorsqu'on se place au point de vue du calcul absolu des variations. Au contraire, les extrémales du calcul ordinaire des variations diffèrent des trajectoires de systèmes non holonomes et les équations du mouvement ne s'obtiennent du principe d'Hamilton que si l'on considère — au lieu des conditions accessoires (77) — les conditions aux variations (38). En les considérant toutes les deux simultanément, il faut résigner la supposition fondamentale du calcul des variations, concernant l'interversion des signes δ et d, comme je l'ai signalé déjà dans mes travaux antérieurs [21]). J'y ai aussi montré qu'en se servant de la variation absolue Δ', correspondant à la connexion non holonome, les équations du mouvement découlent du principe

$$\Delta' \int_{t_1}^{t_2} (T - V)\, dt = 0 \tag{100}$$

sous la supposition

$$\Delta' dx^\nu = D' \delta x^\nu.$$

Néanmoins je n'y ai pas prouvé que l'équation (100) exprime vraiment les conditions pour l'extremum de l'intégrale (92) au point de vue du calcul absolu.

[21]) Horák, Sur les conditions de validité du principe d'Hamilton, C. R. Acad. Sc. Paris, 188 (1929) p. 614 — 616; Sur le principe d'Hamilton dans le cas des liaisons non holonomes, Verh. d. Int. Mathem.-Kongresses Zürich 1932, II. Bd., p. 325 — 326; *M. A.*, no 17.