verse ressuscitée à propos de mesures magnétiques, on la voit actuellement en pleine action à propos de mesures électriques. Est-il possible de déterminer sans ambiguïté la conductibilité d'un sol stratifié en se basant sur les mesures extérieures de potentiel et de courant tangentiel? Le présent mémoire donne à cette question une réponse négative. En effet, dans le cas particulier de conductibilités liées par la relation (8) le potentiel extérieur, ainsi que le courant tangentiel ne dépendent pas de la fonction $\sigma(z)$, mais exclusivement des constantes s_k. Cet exemple est bien suffisant pour notre but.

Über die asymptotische Verteilung von fastperiodischen Funktionen mit linear unabhänginen Exponenten.

Von

Aurel Wintner in Baltimore.

Vor einigen Jahren habe ich gezeigt [1]), dass jede reelle fastperiodische Funktion $f(t)$ eine asymptotische Verteilungsfunktion $\sigma(x)$ besitzt. Letztere ist eine für alle reellen x erklärte monoton nicht abnehmende Funktion derart, dass an jeder Stetigkeitsstelle von $\sigma(x)$ die Grenzgleichung

$$\sigma_T(x) \longrightarrow \sigma(x) \qquad (T \longrightarrow +\infty)$$

gilt, wobei $\sigma_T(x)$ den durch $2T$ dividierten Inhalt der Menge derjenigen Punkte t des Intervalles $-T \leqq t \leqq T$ bezeichnet, für welche $f(t) \leqq x$ ausfällt. In Verallgemeinerung des Bolzano-Weierstrassschen Zwischenwertsatzes über stetige (periodische) Funktionen gilt der Satz [2]), dass die Funktion $\sigma(x)$ in der Umgebung der Stelle $x = x_0$ nicht konstant sein kann, wenn x_0 zu dem Wertevorrat der fastperiodischen Funktion $f(t)$ gehört. Endlich gilt [3])

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n \, d\sigma(x) = \lim_{T=\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} (f(t))^n \, dt \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

[1]) A. Wintner, Math. Ztschr. 30 (1929), S. 312—316.

[2]) ibid., S. 315—316.

[3]) ibid., S. 316.

was, da $f(t)$ beschränkt ist, auch in der Gestalt

$$\Lambda(u;\sigma) = \lim_{T=\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \exp\{f(t)\,u\,i\}\,dt \qquad (-\infty < u < +\infty)$$

geschrieben werden kann, wobei

$$\Lambda(u;\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(x\,u\,i)\,d\sigma(x)$$

die Fourier-Stieltjessche Transformierte der Verteilungsfunktion $\sigma(x)$ bezeichnet.

Seitdem ist die Theorie der Verteilungsfunktionen fastperiodischer Funktionen im Rahmen der vorher erwähnten Verwandlung von t-Mittelwerten in Stieltjessche Integrale durch verschiedene Autoren weiter ausgebaut worden. Es hat sich u. a. herausgestellt, dass dieser Weg auch bei dem Wertverteilungsploblem der Riemannschen Zetafunktion der natürliche ist; vgl. eine gemeinsame Arbeit von Herrn Jessen und mir, die demnächst in den Trans. Amer. Math. Soc. erscheinen wird. Da die unendlichen Matrizen, durch welche ich $\sigma(x)$ urspünglich definiert habe, auf eine gelegentliche Bemerkung von Lichtenstein zurückgehen [4]), ist in diesem seinem Andenken gewidmeten Band ein kleiner Beitrag zu dem Gegenstand vielleicht am Platz.

Kürzlich habe ich gezeigt [5]), dass $\sigma(x)$ eine sehr glatt verlaufende Funktion ist, wenn die Exponenten der fastperiodischen Funktion $f(t)$ linear unabhängig sind und dabei $f(t)$ nicht eine endliche trigonometrische Summe ist. Die Glattheit von $\sigma(x)$ bei einer Funktion $f(t)$ der erwähnten Art besteht darin, dass $\sigma(x)$ *für jedes x Ableitungen beliebig hoher Ordnung besitzt*, während $f(t)$ selbst sehr wohl eine Weierstrasssche nirgends differentiierbare Funktion sein kann. Mit Rücksicht auf die Definition von $\sigma(x)$ ist es zu erwarten, dass diese *Glattheit* von $\sigma(x)$ sich irgendwie auch *in der asymptotischen Verteilung der Verschiebungszahlen* τ von $f(t)$ kundgibt, zumal nach Herrn Bohr die Verschiebungseigenschaften *jeder* fastperiodischen Funktion $f(t)$ mit dem diophantischen Verhalten der Exponentenfolge von $f(t)$ gekoppelt sind [6]).

[4]) ibid., S. 290.
[5]) A. Wintner, Amer. Journ. of Math. 55 (1933), S. 309 ff.
[6]) H. Bohr, Acta Math. 46 (1925), S. 105—107, 110—111.

In der vorliegenden Note soll gezeigt werden, dass der in Rede stehenden Glattheit von $\sigma(x)$ in der Tat eine Glattheit in der Verteilung der Verschiebungszahlen entspricht. Zu diesem Zweck werden wir den durch Herrn Bohr [7]) eingeführten, zu einen willkürlichen Verschiebungszahl τ gehörigen „Minimalfehler"

$$e(\tau) = e(\tau; f) = \text{obere Grenze von } |f(t+\tau) - f(t)| \text{ für alle } t$$

betrachten, der im Spezialfall einer reinperiodischen Funktion $f(t)$ mit dem sogenannten Stetigkeitsgrad von $f(t)$ auf ersichtliche Weise zusammenhängt, bei einer allgemeinen fastperiodisches Funktion aber nicht so sehr durch lokale, als vielmehr sich im Grossen abspielende Verschiebungseigenschaften von $f(t)$ bestimmt ist. Es stellt sich nun heraus, dass im Falle linear unabhängiger Exponenten die Funktion $e(\tau)$ von τ eine asymptotische Verteilungsfunktion besitzt, die *genau so glatt* ist wie die asymptotische Verteilungsfunktion $\sigma(x)$ von $f(t)$.

Bezeichnen

$$f_1(t),\ f(t_2),\ \ldots,\ f_m(t)$$

reinperiodische Funktionen mit den Perioden

$$\frac{2\pi}{\lambda_1},\ \frac{2\pi}{\lambda_2},\ \ldots,\ \frac{2\pi}{\lambda_m}$$

und sind die m Frequenzen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ linear unabhängig, so ist es klar aus der Definition von $e(\tau)$, dass mit Rüchsicht auf den Kroneckerschen Approximationssatz die Additionsregel

$$e\left(\tau; \sum_{n=1}^{m} f_n\right) = \sum_{n=1}^{m} e(\tau; f_n)$$

gilt. Da hierbei m beliebig gross sein darf, gilt die Regel auch für unendliche Summen

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t),$$

die für $-\infty < t < +\infty$ gleichmässig konvergent sind. Wählen wir insbesondere

$$f_n(t) = a_n \cos \lambda_n (t - \delta_n),$$

[7]) H. Bohr, Acta Math. 45 (1925), S. 87.

wobei a_n positiv, δ_n reell und [8] $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent ist, so folgt

$$e(\tau; f) = \sum_{n=1}^{\infty} 2\, a_n \left| \sin\left(\frac{1}{2} \lambda_n \tau\right) \right|,$$

da das n-te Glied dieser Reihe offennbar gleich ist der oberen Grenze von $|f_n(t+\tau) - f_n(t)|$ für alle t. Da die Funktion $e(\tau; f)$ offenbar eine fastperiodische Funktion von τ ist, besitzt sie eine asymptotische Verteilungsfunktion, die durch $\rho = \rho(x)$ bezeichnet werden möge. Da $e(\tau; f)$ eine Summe von periodischen Gliedern mit linear unabhängigen reziproken Perioden ist, so muss $\rho(x)$ die Faltung der asymptotischen Verteilungsfunktionen $\rho_n(x)$ der periodischen Komponenten $2\, a_n \left| \sin\left(\frac{1}{2} \lambda_n \tau\right) \right|$ von $e(\tau; f)$ sein, was unter Benutzung Fourier-Stieljesscher Transformierten in der Gestalt

$$\Lambda(u; \rho) = \prod_{n=1}^{\infty} \Lambda(u; \rho_n) \qquad (-\infty < u < +\infty),$$

geschrieben werden kann [9]. Nun ist aber mit Rücksicht auf eine eingangs erwähnte Beziehung

$$\Lambda(u; \rho_n) = \lim_{T=\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \exp\left\{ 2\, a_n \left| \sin\left(\frac{1}{2} \lambda_n \tau\right) \right| u\, i \right\} d\tau,$$

also der Periodizität zufolge

$$\Lambda(u; \rho_n) = G(2\, a_n u),$$

wobei

$$G(u) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \exp(i u \sin \tau)\, d\tau = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{e^{i\tau u}}{\sqrt{1-\tau^2}}\, d\tau$$

gesetzt ist. Nun ist aber einerseits $|G(u)| \leqq 1$, und andererseits ergibt eine geläufige Anwendung des zweiten Mittelwertsatzes [10], dass

[8]) Vgl. ibid., S. 103—112.

[9]) A. Wintner, Math. Ztschr. **36** (1933), S. 618—629.

[10]) Vgl. E. Landau, Vorlesungen über Zahlentheorie, Bd. 2 (1927), S. 198 ff. oder S. 60.

$\sqrt{|u|}\, G(u)$ eine beschränkte Funktion von u ist. Es folgt daher aus

$$\Lambda(u; \rho) = \prod_{n=1}^{\infty} G(2\, a_n u)$$

nach derselben Schlussweise, die ich in meiner zweiterwähnten Arbeit angewandt habe, dass $\rho(x)$ für alle x Ableitungen beliebig hoher Ordnung besitzt.

Es versteht sich von selbst, dass im allgemeinen, nämlich wenn die Exponenten nicht linear unabhängig sind, zwischen den beiden asymptotischen Verteilungsfunktionen σ, ρ keine derartig explizite Beziehung bestehen kann und dass im allgemein weder σ noch ρ irgendwelche (über die Monotonie hinausgehende) Glattheitseigenschaft aufweisen können. Das obige Resultat scheint die zur Zeit schärfste Formulierung der Tatsache zu sein, dass eine fastperiodische Funktion $f(t)$ mit unendlich vielen linear unabhängigen Exponenten auf eine besonders reguläre Weise „rekurrent" ist.

Diese Verhältnisse legen die Frage nahe, ob die Eingeschaft einer fastperiodischen Funktion, dass ihre Exponenten linear unabhängig sind, eine *quasi-analytische* ist in dem Sinn, dass das Verhalten der Funktion in einem kleinen Intervall $a \leqq t \leqq b$ ihr Verhalten für alle t bestimmt oder wenigstens beeinflusst. Ohne die Annahme der linearen Unabhängigkeit der Exponenten ist die Antwort gewiss verneinend, da doch jede in dem Intervall $a \leqq t \leqq b$ erklärte stetige Funktion verschiedentlich zu einer stetigen periodischen, also fastperiodischen Funktion ergänzt werden kann, wobei auch die Periode $T > b - a$ willkürlich wählbar ist. Es ist oben erwähnt worden, dass eine nirgends differentiierbare Funktion sehr wohl eine fastperiodische Funktion mit linear unabhängigen Exponenten sein kann. Dennoch wird das *lokale* Verhalten von $f(t)$ durch die Annahme der linearen Unabhängigkeit der Exponenten (also durch eine Eigenschaft *im Grossen*) eingeschränkt. Zum Beispiel kann $f(t)$ in keinem Intervall $a \leqq t \leqq b$ konstant sein, da sonst $x = f(a)$ mit Rücksicht auf die Fastperiodizität von $f(t)$ eine Sprungstelle von $\sigma(x)$ wäre, während doch $\sigma(x)$ unbegrenzt differentiierbar ist, sobald $f(t)$ nicht aus endlich vielen Schwingungen besteht, und in diesem Grenzfall ist $\sigma(x)$ abteilugnsweise analytisch und überall stetig. Sind also alle Exponenten zweier fastperiodischer Funktionen in einer Folge enthalten, die aus linear unabhängigen Zahlen besteht, so müssen die beiden Funktionen überall identisch sein, sobald sie in einem beliebig kleinen Intervall identisch sind.

Die obigen Betrachtungen können mutatis mutandis auf gewisse Klassen verallgemeinerter fastperiodischer Funktionen übertragen werden. Eine in jedem endlichen Intervall I samt ihrem Quadrate im Lebesgueschen Sinne integrierbare Funktion $f(t)$ ist fastperiodisch im Sinne von Weyl [11]), wenn sie die folgende Verschiebungseigenschaft besitzt: Setz man

$$M_I^t\{K(t)\} = \frac{1}{|I|}\int_I K(t)\,dt,$$

wobei $|I|$ die Länge des Intervalles I bezeichnet, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ zwei positive Zahlen L_ε, T_ε derart, dass es in jedem τ-Intervall der Länge L_ε eine Zahl $\tau = \tau'$ vorhanden ist mit der Eigenschaft, dass

$$M_I^t\{|f(t+\tau) - f(t)|^2\} < \varepsilon$$

für alle diejenigen Intervalle I gilt, deren Länge grösser als T_ε ist. Weyl zeigt, dass diese Bedingung charakteristisch ist für diejenigen Funktionen $f(t)$, für welche seine Eigenfunktionenmethode eine vollständige Fouriersche Entwicklung liefert. Für Funktionen der Weylschen Klasse ist der quadratische Mittelwert $M^t\{|f(t)|^2\}$ und allgemeiner

$$g(\tau) = M^t\{f(t+\tau)\bar{f}(t)\} \qquad (-\infty < \tau < +\infty)$$

stets vorhanden, wobei

$$M^t\{K(t)\} = \lim_{|I|=\infty} M_I^t\{K(t)\}$$

gesetzt ist. Dem oben mit $e(\tau; f)$ bezeichneten „Minimalfehler" entspricht sinngemäss die Funktion

$$E(\tau; f) = M^t\{|f(t+\tau) - f(t)|^2\} \qquad (-\infty < \tau < +\infty).$$

Sie hängt mit $g(\tau)$ wegen $|a-b|^2 = a\bar{a} + b\bar{b} - \bar{a}b - a\bar{b}$ durch die Beziehung

$$E(\tau; f) = 2g(0) - 2\Re\, g(\tau)$$

zusammen. Man erkennt leicht aus der Bohrschen Definition der Fastperiodizität, dass die in jedem endlichen Intervall I samt ihrem Quadrat im Lebesgueschen Sinne intergrierbare Funktion $f(t)$ notwendig zu der Weylschen Klasse verallgemeinerter fastperiodischer Funktionen angehört, wenn die folgende Bedingung (W) erfüllt ist:

[11]) H. Weyl, Math. Annalen 97 (1927), S. 350—356.

(W). Es gibt eine im Bohrschen Sinne fastperiodische Funktion $g(\tau)$ derart, dass die Grenzgleichung

$$M_I^t\{f(t+\tau)\bar{f}(t)\} \to g(\tau) \qquad (|I| \to \infty)$$

gleichmässig für $-\infty < \tau < +\infty$ gilt.

Es sei nun

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp(i\lambda_n t) \qquad (c_n \neq 0)$$

die zu $f(t)$ gehörige Weylsche Entwicklung. Nach der Weylschen Theorie ist $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$ konvergent und

$$g(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \exp(i\lambda_n \tau).$$

Folglich gilt

$$E(\tau; f) = 2\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 - 2\Re \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \exp(i\lambda_n \tau),$$

das heisst

$$E(\tau; f) = 4\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \sin^2\left(\frac{1}{2}\lambda_n \tau\right).$$

Fürht man daher wieder die Annahme ein, dass die Exponenten von $f(t)$ linear unabhängig sind und bezeichnet man die asymptotische Verteilungsfunktion der im Bohrschen Sinne fastperiodischen Funktion $E(\tau; f)$ mit $\eta(x)$, so gilt wieder

$$\Lambda(u; \eta) = \prod_{n=1}^{\infty} \Lambda(u; \eta_n),$$

wobei $\eta_n(x)$ die asymptotische Verteilungsfunktion der Funktion $4|c_n|^2 \sin^2\left(\frac{1}{2}\lambda_n \tau\right)$ bezeichnet. Nun ist wegen der Periodizität

$$\Lambda(u; \eta_n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp\left\{4|c_n|^2 \sin^2\left(\frac{1}{2}\tau u i\right)\right\} d\tau = F(2|c_n|^2 u),$$

wobei

$$2\pi F(u) = \int_0^{2\pi} \cos\{u - u\cos\tau\}\,d\tau + i\int_0^{2\pi} \sin\{u - u\cos\tau\}\,d\tau,$$

also wegen

$$\int_0^{2\pi} \cos(u\cos\tau)\,d\tau = 2\pi J_0(u), \qquad \int_0^{2\pi} \sin(u\cos\tau)\,d\tau = 0$$

offenbar $F(u) = e^{iu} J_0(u)$ ist. Mithin gilt

$$\Lambda(u;\eta) = \exp(A\,u\,i) \prod_{n=1}^{\infty} J_0(2|c_n|^2 u), \qquad A = 2\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2,$$

und daraus folgt (vgl. meine zweiterwähnte Arbeit), dass auch $\eta(x)$ *für alle x Ableitungen beliebig hoher Ordnung besitzt.*

On general Fourier series with gaps.

By

Salomon Bochner Princeton University.

Introduction. Paley and Wiener [6] [1]) have proved the following theorem.

Let $f(t)$ be a complex-valued function in $-\infty < t < \infty$ of integrable square in every finite interval, which satisfies the following condition: there exist two positive numbers α, β, ($\alpha \geqq 1$), such that for any integer $N = 1, 2, \ldots,$ and any real numbers $\tau_1, \ldots, \tau_N$, any complex numbers $C_1, \ldots, C_N$, and any real numbers x, y,

$$(1) \qquad \int_x^{x+\beta} \left| \sum_{\nu=1}^{N} C_\nu f(t+\tau_\nu) \right|^2 dt \leqq \alpha^2 \int_y^{y+\beta} \left| \sum_{\nu=1}^{N} C_\nu f(t+\tau_\nu) \right|^2 dt.$$

This condition is necessary and sufficient in order that $f(t)$ be an almost periodic function of the Stepanoff [2]) class $[S^2]$, whose every pair of different Fourier

[1]) See the bibliography at the end of the paper.

[2]) See [7] and [1]. — According to Stepanoff.s original definition a function $f(t)$ belongs to class S^p, $p \geqq 1$, if it belongs to the Lebesgue class L_p over every interval and il for some (and, therefore, for any) $\beta > 0$, corresponding to any $\varepsilon > 0$, there exists a length $l(\varepsilon)$, such that any interval $t < \tau < t + l(\varepsilon)$ contains a number $\tau = \tau_0$, for which

$$\int_x^{x+\beta} \left| f(t+\tau_0) - f(t) \right|^p dt \leqq \varepsilon^p \qquad -\infty < x < \infty$$

In this paper we shall have to apply another, but equivalent definition which is a duplication of the present author's definition of Bohr's almost periodicity. According to this definition $f(t)$ belongs to class S^p, if it belongs to L_p on any finite interval, and