être diminué. En effet, on a la proposition suivante, due à M. Lindenbaum:

Si un ensemble linéaire borné E et un de ses vrais sous-ensembles se décomposent chacun en deux parties respectivement superposables, il existe une une portion de l'ensemble E dans laquelle la densité extérieure de Peano-Jordan de l'ensemble E est $\leqslant 1/2$.

La démonstration de cette proposition se trouve dans la *Thèse* de M. Lindenbaum (Varsovie 1927, non publiée) et sera publiée prochainement.

Streszczenie

Autor dowodzi (posługując się pewnikiem wyboru), że istnieje rozkład odcinka $I\,[0 \leqslant x \leqslant 1]$ na trzy zbiory rozłączne, takie, iż przesuwając odpowiednio dwa z nich (wzdłuż prostej) otrzymujemy trzy nowe zbiory rozłączne, dające w sumie odcinek I oraz pewien zbiór niemierzalny, leżący poza tym odcinkiem.

W związku z tem twierdzeniem autor czyni różne uwagi.

Sur l'équation de Laplace dans un milieu stratifié

par

V. A. Kostitzin

La résolution de l'équation de Laplace et d'autres équations du même type devient très laborieuse et même pratiquement impossible dès qu'il s'agit d'un milieu stratifié. Or, ce genre de problèmes se rencontre à chaque pas en astronomie et en physique du globe. Je me propose d'exposer dans le présent mémoire une méthode qui permet dans certains cas de simplifier considérablement la résolution effective des problèmes de cette nature. J'étudie spécialement le cas des surfaces de discontinuité planes parallèles, mais la méthode employée peut servir dans des cas plus généraux.

I. Équations — Conditions limites — Transformations.

1. *Equation différentielle* — Il s'agit de l'équation différentielle

$$\omega(z)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\omega(z)\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\sigma(z)\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+\sigma'(z)\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0. \tag{1}$$

Je suppose que les fonctions $\omega(z)$ et $\sigma(z)$ continues en général ont un certain nombre fini de points de discontinuité

$$z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n.$$

Dans certains cas on peut se débarasser de l'hypothèse de n fini.

On cherche une solution vérifiant dans le demi-espace (z positif) les conditions suivantes:

I φ et ses premières dérivées s'annulent à l'infini,

II φ est continu an passage des plans de discontinuité

(2) $$\varphi(x, y, z_k - 0) = \varphi(x, y, z_k + 0)$$

III $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ est discontinu an passage des plans de discontinuité de sorte que

(3) $$\Big|^{z=z_k-0} \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \Big|^{z=z_k+0} \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

IV Pour $z=0$ la fonction $\varphi(x, y, z)$ vérifie soit la condition de Dirichlet

(4) $$\varphi(x, y, 0) = \Phi(x, y),$$

soit la condition de Neumann

(5) $$\Big|^{z=0} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \Psi(x, y),$$

soit des conditions mixtes.

C'est sous cette forme que se présentent certains problèmes physiques, par exemple celui de la propagation de l'électricité dans un sol stratifié (problème de n couches). L'équation (2) exprime alors la continuité du potentiel électrique et l'équation (3) la continuité du courant; $\sigma(z)$ est la conductibilité verticale et $\omega(z)$ — la conductibilité horizontale du sol.

2. *Solutions élémentaires* — On peut donner à ces solutions la forme

$$\varphi = S(x, y, \lambda) Z(z, \lambda),$$

les fonctions S et Z vérifiant les équations différentielles

(6) $$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \lambda^2 S = 0$$

(7) $$\sigma Z'' + \sigma' Z' - \lambda^2 \omega Z = 0$$

et λ étant un paramètre arbitraire.

Laissons de côté pour le moment l'équation (6) et étudions l'équation (7).

3. *Une hypothèse complémentaire* — Admettons que la stratification d'un milieu en modifie les propriétés physiques de telle façon que dans chaque couche le produit $\sigma(z)\omega(z)$ reste constant

(8) $$\sigma(z)\,\omega(z) = s_k^2 \qquad (z_{k-1} < z < z_k).$$

Cette hypothèse peut être justifiée par des considérations sur l'état naturel d'un milieu etc, dont nous ne nous occuperons pas ici. L'équation (1) devient

(9) $$s_k^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right) + \sigma \frac{\partial}{\partial z}\left(\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) = 0.$$

L'équation (7) donne

(10) $$\sigma \frac{\partial}{\partial z}(\sigma Z) - s_k^2 \lambda^2 Z = 0.$$

Remplaçons la variable z par une nouvelle variable u telle que

(11) $$u = s_1 \int_0^{z_1} \frac{d\xi}{\sigma(\xi)} + s_2 \int_{z_1}^{z_2} \frac{d\xi}{\sigma(\xi)} + \ldots + s_{k-1} \int_{z_{k-2}}^{z_{k-1}} \frac{d\xi}{\sigma(\xi)} + s_k \int_{z_{k-1}}^{z} \frac{d\xi}{\sigma(\xi)}$$
$$(z_{k-1} < z < z_k).$$

Posons

$$f(x, y, u) = \varphi(x, y, z), \quad U(u) = Z(z).$$

Ces fonctions vérifient resp. les équations différentielles suivantes

(12) $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = 0$$

(13) $$\frac{d^2 U}{d u^2} - \lambda^2 U = 0.$$

La condition II reste sans changement:

(14) $$f(x, y, u_k - 0) = f(x, y, u_k + 0).$$

La condition III prend la forme

(15) $$s_k \Big|^{u=u_k-0} \frac{\partial f}{\partial u} = s_{k+1} \Big|^{u=u_k+0} \frac{\partial f}{\partial u}.$$

Les équations (4) et (5) ne varient pas

$$f(x, y, 0) = \Phi(x, y) \qquad \text{(Condition de Dirichlet)} \tag{16}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|^{u=0} = F(x, y), \qquad \text{(Condition de Neumann).} \tag{17}$$

Donc, le problème se réduit à la résolution de l'équation de Laplace en présence d'une condition supplémentaire (15).

En ce qui concerne la condition I, elle reste inchangée si l'on suppose que

$$\lim_{z \to \infty} \frac{u}{z} = \text{const.} \neq 0.$$

L'équation (13) a comme solution générale

$$U = \tau(\lambda)\, e^{-\lambda u} + \psi(\lambda)\, e^{\lambda u} \quad .$$

Nous allons chercher la solution de l'équation de Laplace (12) sous forme de l'intégrale de Hankel

$$f(x, y, u) = \sum_m S_m(x, y, \lambda)\, [\tau_{mk}(\lambda)\, e^{-\lambda u} + \psi_{mk}(\lambda)\, e^{\lambda u}]\, d\lambda \qquad (u_{k-1} < u < u_k) \tag{18}$$

$S_m(x, y, \lambda)$ étant une solution particulière de l'équation (6) dont nous nous occuperons plus tard. Nons verrons qne les conditions I—IV suffisent pour la détermination complète des fonctions τ_{mk} et ψ_{mk}.

Commençons par les équations (14) et (15) (conditions II et III). Elles donnent, en omettant l'indice m

$$\tau_k\, e^{-\lambda u_k} + \psi_k\, e^{\lambda u_k} = \tau_{k+1}\, e^{-\lambda u_k} + \psi_{k+1}\, e^{\lambda u_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{19}$$

$$s_k(-\tau_k\, e^{-\lambda u_k} + \psi_k\, e^{\lambda u_k}) = s_{k+1}(-\tau_{k+1}\, e^{-\lambda u_k} + \psi_{k+1}\, e^{\lambda u_k}). \tag{20}$$

D'autre part, dans le cas de n fini la condition I donne évidemment

$$\psi_{n+1}(\lambda) = 0. \tag{21}$$

Les équations (19) et (20) permettent de calculer toutes les fonctions τ_k et ψ_k lorsque les deux premières functions τ_1 et ψ_1 sont connues. L'équation (21) donne une relation linéaire entre τ_1 et ψ_1. Ce calcul

nécessite l'introduction d'un système de fonctions très intéréssant en soi-même et très utile dans la théorie du potentiel lorsqu'il s'agit d'un milieu stratifié.

Enfin, la condition limite permet de déterminer τ_1 et de résoudre complétement le problème.

II Fonctions auxiliaires

4. *Définitions* — Soient

$$-1 < \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n < 1$$

$$0 < u_1 < u_2 < \ldots < u_n$$

deux suites de nombres. Soient d'autre part P_{mk}, Q_{mk} des fonctions definies par les relations suivantes

$$\begin{cases} P_{mm}(\lambda) = 1 \qquad Q_{mm}(\lambda) = \mu_m\, e^{-2\lambda u_m} \\ P_{m,k+1}(\lambda) = P_{mk}(\lambda) + \mu_{k+1}\, e^{-2\lambda u_{k+1}}\, Q_{mk}(-\lambda) \\ Q_{m,k+1}(\lambda) = Q_{mk}(\lambda) + \mu_{k+1}\, e^{-2\lambda u_{k+1}}\, P_{mk}(-\lambda). \end{cases} \tag{22}$$

On voit facilement que de façon plus generale

$$\begin{cases} P_{m,k+h}(\lambda) = P_{mk}(\lambda)\, P_{k+1,k+h}(\lambda) + Q_{mk}(-\lambda)\, Q_{k+1,k+h}(\lambda) \\ Q_{m,k+h}(\lambda) = Q_{mk}(\lambda)\, P_{k+1,k+h}(\lambda) + P_{mk}(-\lambda)\, Q_{k+1,k+h}(\lambda). \end{cases} \tag{23}$$

On trouve inversement

$$\begin{cases} (1 - \mu^2_{k+1})\, P_{mk}(\lambda) = P_{m,k+1}(\lambda) - Q_{m,k+1}(-\lambda)\, Q_{k+1,k+1}(\lambda) \\ (1 - \mu^2_{k+1})\, Q_{mk}(\lambda) = Q_{m,k+1}(\lambda) - P_{m,k+1}(-\lambda)\, Q_{k+1,k+1}(\lambda) \end{cases} \tag{24}$$

et de façon plus générale

$$\begin{cases} P_{mk}(\lambda) = \dfrac{P_{m,k+h}(\lambda)\, P_{k+1,k+h}(-\lambda) - Q_{m,k+h}(-\lambda)\, Q_{k+1,k+h}(\lambda)}{(1 - \mu^2_{k+1}) \ldots (1 - \mu^2_{k+h})} \\[2ex] Q_{mk}(\lambda) = \dfrac{Q_{m,k+h}(\lambda)\, P_{k+1,k+h}(-\lambda) - P_{m,k+h}(-\lambda)\, Q_{k+1,k+h}(\lambda)}{(1 - \mu^2_{k+1}) \ldots (1 - \mu^2_{k+h})} \end{cases} \tag{25}$$

On en tire une relation importante

$$(26)\qquad P_{k+1,\,k+h}(\lambda)\,P_{k+1,\,k+h}(-\lambda)-Q_{k+1,\,k+h}(\lambda)\,Q_{k+1,\,k+h}(-\lambda)=$$
$$=(1-\mu^2_{k+1})\ldots(1-\mu^2_{k+h}).$$

On obtient de la même faqon en variant le premier indice

$$(27)\quad\begin{cases} P_{ms}(\lambda)=P_{m+k,\,s}(\lambda)\,P_{m,\,m+k-1}(\lambda)+Q_{m+k,\,s}(\lambda)\,Q_{m,\,m+k-1}(-\lambda)\\ Q_{ms}(\lambda)=Q_{m+k,\,s}(\lambda)\,P_{m,\,m+k-1}(-\lambda)+P_{m+k,\,s}(\lambda)\,Q_{m,\,m+k-1}(\lambda)\end{cases}$$

$$(28)\quad\begin{cases} P_{m+k,s}(\lambda)=\dfrac{P_{ms}(\lambda)\,P_{m,\,m+k-1}(-\lambda)-Q_{ms}(\lambda)\,Q_{m,\,m+k-1}(-\lambda)}{(1-\mu^2_m)(1-\mu^2_{m+1})\ldots(1-\mu^2_{m+k-1})}\\[2ex] P_{m+k,\,s}(\lambda)=\dfrac{Q_{ms}(\lambda)\,P_{m,\,m+k-1}(\lambda)-P_{ms}(\lambda)\,Q_{m,\,m+k-1}(\lambda)}{(1-\mu^2_m)(1-\mu^2_{m+1})\ldots(1-\mu^2_{m+k-1})}\end{cases}$$

On remarque immédiatement que ces fonctions et ces opérations présentent en quelque sorte une généralisation de la suite des nombres naturels et des opérations arithmétiques fondamentales.

5. *Fonctions D et N* — Formons maintenant les fonctions

$$(29)\quad\begin{cases} D_{mk}(\lambda)=P_{mk}(\lambda)+Q_{mk}(\lambda)\\ N_{mk}(\lambda)=P_{mk}(\lambda)-Q_{mk}(\lambda)\end{cases}$$

On peut établir entre elles les relations suivantes:

$$(30)\quad\begin{cases} D_{m,\,k+h}(\lambda)=D_{mk}(\lambda)\,P_{k+1,\,k+h}(\lambda)+D_{mk}(-\lambda)\,Q_{k+1,\,k+h}(\lambda)\\ N_{m,\,k+h}(\lambda)=N_{mk}(\lambda)\,P_{k+1,\,k+h}(\lambda)-N_{mk}(-\lambda)\,Q_{k+1,\,k+h}(\lambda)\end{cases}$$

$$(31)\quad\begin{cases} D_{mk}(\lambda)=\dfrac{D_{m,\,k+h}(\lambda)\,P_{k+1,\,k+h}(-\lambda)-D_{m,\,k+h}(-\lambda)\,Q_{k+1,\,k+h}(\lambda)}{(1-\mu^2_{k+1})\ldots(1-\mu^2_{k+h})}\\[2ex] N_{mk}(\lambda)=\dfrac{N_{m,\,k+h}(\lambda)P_{k+1,\,k+h}(-\lambda)+N_{m,\,k+h}(-\lambda)\,Q_{k+1,\,k+h}(\lambda)}{(1-\mu^2_{k+1})\ldots(1-\mu^2_{k+h})}\end{cases}$$

$$(32)\quad\begin{cases} D_{ms}(\lambda)=P_{m+k,\,s}(\lambda)\,D_{m,\,m+k-1}(\lambda)+Q_{m+k,\,s}(\lambda)\,D_{m,\,m+k-1}(-\lambda)\\ N_{ms}(\lambda)=P_{m+k,\,s}(\lambda)\,N_{m,\,m+k-1}(\lambda)-Q_{m+k,\,s}(\lambda)\,N_{m,\,m+k-1}(-\lambda)\end{cases}$$

Déterminons la valeur $D_{m,\,k+h}(0)$: l'équation (30) donne pour $h=1$ et $\lambda=0$

$$D_{m,\,k+1}(0)=D_{mk}(0)\,(1+\mu_{k+1});$$

d'autre part

$$D_{m\,m}(0)=1+\mu_m;$$

donc

$$(33)\qquad D_{m,\,m+h}(0)=(1+\mu_{m+h})\,(1+\mu_{m+h-1})\ldots(1+\mu_m),$$

On trouve de même

$$(34)\qquad N_{m,\,m+h}(0)=(1-\mu_{m+h})\,(1-\mu_{m+h-1})\ldots(1-\mu_m),$$

Pour $\lambda\to\infty$ $P_{mk}(\lambda)\to 1$, et la fonction $Q_{mk}(\lambda)$ tend vers zéro comme une fonction exponentielle.

6. *Le signe et les zéros de P, Q, D, N* — On peut tirer des équations (22) les relations suivantes:

$$(35)\quad\begin{cases} P_{m,\,k+1}(\lambda)+e^{-2\lambda u_{k+1}}\,Q_{m,k+1}(-\lambda)=\\ \qquad=(1+\mu_{k+1})\,[P_{mk}(\lambda)+e^{-2\lambda u_{k+1}}\,Q_{mk}(-\lambda)]\\[1ex] P_{m,k+1}(\lambda)-e^{-2\lambda u_{k+1}}\,Q_{m,k+1}(-\lambda)=\\ \qquad=(1-\mu_{k+1})\,[P_{mk}(\lambda)-e^{-2\lambda u_{k+1}}\,Q_{mk}(-\lambda)]\end{cases}$$

Admettons, quel que soit λ positif

$$(36)\qquad P_{mk}(\lambda)>e^{-2\lambda u_k}\,|\,Q_{mk}(-\lambda)\,|;$$

on a forcément

$$P_{mk}(\lambda)>e^{-2\lambda u_{k+1}}\,|\,Q_{mk}(-\lambda)\,|,$$

Les équations (35) donnent dans ces conditions

$$P_{m,k+1}(\lambda)>e^{-2\lambda u_{k+1}}\,|\,Q_{m,k+1}(-\lambda)\,|\,.$$

Or, il est évident que

$$1=P_{mm}(\lambda)>|\,\mu_m\,|=e^{-2\lambda u_m}\,|\,Q_{mm}(-\lambda)\,|\,.$$

Done, l'inégalité (36) est démontrée.

De même, ou peut tirer des équations (30)

$$(37)\quad \begin{cases} D_{m,k+1}(\lambda) + e^{-2\lambda u_{k+1}} D_{m,k+1}(-\lambda) = \\ \qquad = (1+\mu_{k+1})\,[D_{mk}(\lambda) + e^{-2\lambda u_{k+1}} D_{mk}(-\lambda)] \\ D_{m,k+1}(\lambda) - e^{-2\lambda u_{k+1}} D_{m,k+1}(-\lambda) = \\ \qquad = (1-\mu_{k+1})\,[D_{mk}(\lambda) - e^{-2\lambda u_{k+1}} D_{mk}(-\lambda)] \end{cases}$$

En admettant

$$(38)\qquad D_{mk}(\lambda) > e^{-2\lambda u_k}\,|D_{mk}(-\lambda)| \qquad (\lambda > 0)$$

on a a fortiori

$$D_{mk}(\lambda) > e^{-2\lambda u_{k+1}}\,|D_{mk}(-\lambda)|\,.$$

Dans ces conditions les équations (37) montrent que

$$D_{m,\,k+1}(\lambda) > e^{-2\lambda u_{k+1}}\,|D_{m,\,k+1}(-\lambda)|\,.$$

Or, il est évident que dans nos hypothèses

$$D_{mm}(\lambda) = 1 + \mu_m e^{-2\lambda u_m} > e^{-2\lambda u_m}\,|D_{mm}(-\lambda)|\,.$$

L'inégalité (38) est ainsi démontrée, Ou a également

$$(39)\qquad N_{mk}(\lambda) > e^{-2\lambda u_k}\,|N_{mk}(-\lambda)|\,.$$

L'inégalité (38) montre que l'équation

$$(40)\qquad D_{mk}(\lambda) = 0$$

n'a pas de racines réelles positives. En effet, si l'équation (40) est vérifiée, l'équation

$$D_{mk}(-\lambda) = 0$$

l'est aussi. Or, l'équation (32) montre que dans ces conditions les fonctions $D_{ms}(\lambda)$, $D_{ms}(-\lambda)$ s'annulent aussi, quel que soit $m \leqq s \leqq k$, ce qui est absurde. De même, la fonction $N_{mk}(\lambda)$ n'a pas de zéros réels positifs. Ou peut démontrer de la même façon que les fonctions $D_{ms}(\lambda)$, $N_{ms}(\lambda)$ ne peuvent pas s'annuler simultanément. Remarquons enfin que la fonction $P_{mk}(\lambda)$ est positive dans les mêmes conditions que les fonctions $D_{mk}(\lambda)$, $N_{mk}(\lambda)$.

7. *Cas particulier* $\mu_k = 1$. Ce cas de dégénérescence présente un certain intérêt pratique lorsqu'il s'agit du courant électrique dans le sol. Les équations (24) moutrent que dans ce cas

$$(41)\quad \begin{cases} P_{mk}(\lambda) = e^{-2\lambda u_k} Q_{mk}(-\lambda) \\ D_{mk}(\lambda) = e^{-2\lambda u_k} D_{mk}(-\lambda) \\ N_{mk}(\lambda) = -e^{-2\lambda u_k} N_{mk}(-\lambda)\,. \end{cases}$$

Les équations (30) deviennent alors

$$D_{m,\,k+h}(\lambda) = D_{mk}(\lambda)\;\;[P_{k+1,\,k+h}(\lambda) + e^{2\lambda u_k} Q_{k+1,\,k+h}(\lambda)]$$

$$N_{m,\,k+h}(\lambda) = N_{mk}(\lambda)\;\;[P_{k+1,\,k+h}(\lambda) + e^{2\lambda u_k} Q_{k+1,\,k+h}(\lambda)]$$

Il s'ensuit une formule importante

$$(42)\quad \frac{N_{m,\,k+h}(\lambda)}{D_{s,\,k+h}(\lambda)} = \frac{N_{mk}(\lambda)}{D_{sk}(\lambda)} \qquad (h = 1, 2, \ldots)$$

On voit d'autre part que toutes les racines de l'équation (40) sont purement imaginaires.

8. *Cas particulier* $\mu_k = -1$ — On a dans ce cas des relations analogues à celles du n° 7

$$(43)\quad \begin{cases} P_{mk}(\lambda) = -e^{-2\lambda u_k} Q_{mk}(-\lambda) \\ D_{mk}(\lambda) = -e^{-2\lambda u_k} D_{mk}(-\lambda) \\ N_{mk}(\lambda) = \;\;\; e^{-2\lambda u_k} N_{mk}(-\lambda)\,, \end{cases}$$

ce qui donne

$$D_{m,\,k+h}(\lambda) = D_{mk}(\lambda)\,[P_{k+1,\,k+h}(\lambda) - e^{2\lambda u_k} Q_{k+1,\,k+h}(\lambda)]$$

$$N_{m,\,k+h}(\lambda) = N_{mk}(\lambda)\,[P_{k+1,\,k+h}(\lambda) - e^{2\lambda u_k} Q_{k+1,\,k+h}(\lambda)]$$

$$(42\text{-bis})\qquad \frac{N_{m,\,k+h}(\lambda)}{D_{s,\,k+h}(\lambda)} = \frac{N_{mk}(\lambda)}{D_{sk}(\lambda)} \qquad (h = 1, 2, \ldots)$$

Ici également toutes les racines de l'équation (40) sont purement imaginaires.

9. *Nombre infini de couches* — Dans ce cas les fonctions P, Q, D, N deviennent des séries dont il s'agit d'étudier la convergence. Il est facile de voir que

$$D_{m,\,k+1}(\lambda) \leqslant D_{mk}(\lambda) + |\mu_{k+1}|\, e^{-2\lambda u_{k+1}} |D_{mk}(-\lambda)|$$

ou bien à cause de l'inégalite (38)

$$D_{m,\,k+1}(\lambda) \leqslant D_{mk}(\lambda)\,[1 + |\mu_{k+1}|\, e^{2\lambda u_{k+1} + 2\lambda u_k}]$$

ou bien

(44) $$D_{m,\,k+1}(\lambda) \leqslant D_{mk}(\lambda)\,(1 + |\mu_{k+1}|).$$

On en tire

(45) $$D_{mk}(\lambda) \leqslant (1 + \mu_m)(1 + |\mu_{m+1}|) \ldots (1 + |\mu_k|) \quad (k = m,\ m+1,\ m+2, \ldots).$$

Dans certains cas cette limite supérieure est effectivement atteinte.

Supposons le nombre de couches n infini. La convergence de la série limite

$$D_m(\lambda) = \lim_{k\to\infty} D_{mk}(\lambda)$$

dépend de la convergence du produit infini

$$M = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + |\mu_k|).$$

Or, celle-ci est assuree lorsque la série positive $\Sigma|\mu_k|$ est convergente. Nous verrons par la suite l'interprétation physique à donner à cette condition. La supposons remplie et posons

$$D_m(\lambda) = \lim_{k\to\infty} D_{mk}(\lambda), \quad N_m(\lambda) = \lim_{k\to\infty} N_{mk}(\lambda)$$

$$P_m(\lambda) = \lim_{k\to\infty} P_{mk}(\lambda), \quad Q_m(\lambda) = \lim_{k\to\infty} Q_{mk}(\lambda)$$

Ces fonctions sont liées entre elles par les relations suivantes

(46) $$\begin{cases} P_{m+k}(\lambda) = \dfrac{P_m(\lambda)\, P_{m,\,m+k-1}(-\lambda) - Q_m(\lambda)\, Q_{m,\,m+k-1}(-\lambda)}{(1-\mu^2_m)(1-\mu^2_{m+1}) \ldots (1-\mu^2_{m+k-1})} \\[2ex] Q_{m+k}(\lambda) = \dfrac{Q_m(\lambda)\, P_{m,\,m+k-1}(\lambda) - P_m(\lambda)\, Q_{m,\,m+k-1}(\lambda)}{(1-\mu^2_m)(1-\mu^2_{m+1}) \ldots (1-\mu^2_{m+k-1})} \end{cases}$$

(47) $$\begin{cases} P_m(\lambda) = P_{m+k}(\lambda)\, P_{m,\,m+k-1}(\lambda) + Q_{m+k}(\lambda)\, Q_{m,\,m+k-1}(-\lambda) \\ Q_m(\lambda) = Q_{m+k}(\lambda)\, P_{m,\,m+k-1}(-\lambda) + P_{m+k}(\lambda)\, Q_{m,\,m+k-1}(\lambda) \end{cases}$$

On peut tirer de ces equations une relation récurrente entre trois fonctions consecutives

$$P_{m-1}(\lambda), \quad P_m(\lambda), \quad P_{m+1}(\lambda).$$

On a en effet

$$P_{m+1}(\lambda) = \frac{P_m(\lambda) - Q_m(\lambda)\, Q_{mm}(-\lambda)}{1-\mu^2_m}$$

$$P_{m-1}(\lambda) = P_m(\lambda) + Q_m(\lambda)\, Q_{m-1,\,m-1}(-\lambda).$$

En éliminant $Q_m(\lambda)$ de ces deux equations on trouve

(48) $$(1-\mu^2_m)\, P_{m+1}(\lambda)\, Q_{m-1,\,m-1}(-\lambda) - P_m(\lambda)\, Q_{m-1,\,m}(-\lambda) + P_{m-1}(\lambda)\, Q_{mm}(-\lambda) = 0$$

On a de même

(49) $$(1-\mu^2_m)\, Q_{m+1}(\lambda)\, Q_{m-1,\,m-1}(\lambda) - Q_m(\lambda)\, Q_{m-1,\,m}(\lambda) + Q_{m-1}(\lambda)\, Q_{mm}(\lambda) = 0$$

(50) $$\begin{cases} (1-\mu^2_m)\, \mu_{m-1}\, sh\, 2\lambda u_{m-1} \cdot D_{m+1}(\lambda) + \mu_m D_{m-1}(\lambda)\, sh\, 2\lambda u_m - \\ - D_m(\lambda)\, [\mu_{m-1}\, sh 2\lambda u_{m-1} + \mu_m\, sh 2\lambda u_m + \mu_m \mu_{m-1}\, sh\, 2\lambda\, (u_m - u_{m-1})] = 0 \end{cases}$$

III Résolution du systême (19—21)

10. *Transformation du système (19—21)* — Posons

(51) $$\mu_k = \frac{s_{k+1} - s_k}{s_{k+1} + s_k}.$$

On peut résoudre les équations (19—20) par rapport aux fonctions ψ_k, ψ_{k+1}, ce qui donne

(52) $$\begin{cases} \psi_{k+1}\, Q_{kk}(-\lambda) = \tau_{k+1} - (1-\mu_k)\, \tau_k \\ \psi_k\, Q_{kk}(-\lambda) = (1+\mu_k)\, \tau_{k+1} - \tau_k \end{cases} \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

On en tire une relation récurrente liant les trois fonctions consecutives

τ_{k-1}, τ_k, τ_{k+1}

(53) $$(1+\mu_k)\tau_{k+1}\cdot Q_{k-1,k-1}(-\lambda)-\tau_k Q_{k-1,k}(-\lambda)+ \\ +(1-\mu_k)\tau_{k-1}Q_{kk}(-\lambda)=0 \qquad (k=2,3,\ldots,n)$$

On a en particulier pour $k=n$, en tenant compte de (21)

(54) $$\tau_{n+1}=(1-\mu_n)\tau_n.$$

11. τ_k *et* ψ_k *exprimés en fonction de* τ_1 et ψ_1 — Les équations (52—53) permettent d'exprimer toutes les fonctions τ et ψ au moyen de τ_1 et ψ_1. On a tout d'abord

$$(1+\mu_1)\tau_2=\tau_1+\mu_1 e^{2\lambda u_1}\psi_1$$

on bien, avec les notations du chapitre précédent

$$(1+\mu_1)\tau_2=\tau_1 P_{11}(-\lambda)+\psi_1 Q_{11}(-\lambda),$$

On trouve pareillement

$$(1+\mu_1)(1+\mu_2)\tau_3=\tau_1 P_{12}(-\lambda)+\psi_1 Q_{12}(-\lambda).$$

On peut donc présumer qu'en général

(55) $$(1+\mu_1)\ldots(1+\mu_k)\tau_{k+1}=\psi_1 Q_{1k}(-\lambda)+\tau_1 P_{1k}(-\lambda).$$

En remplaçant τ_k et τ_{k-1} par des expressions analogues dans la formule (53) on montre que la formule (55) est vérifiée pour τ_{k+1}. On trouve pareillement

(56) $$(1+\mu_1)\ldots(1+\mu_k)\psi_{k+1}=\psi_1 P_{1k}(\lambda)+\tau_1 Q_{1k}(\lambda),$$

12. *Nombre fini de couches* — Dans le cas de n fini la fonction ψ_{n+1} est nulle, et l'équation (56) donne immédiatement une relation liant les fonctions τ_1 et ψ_1

(57) $$\tau_1 Q_{1n}(\lambda)+\psi_1 P_{1n}(\lambda)=0.$$

En remplaçant ψ_1 par $-\tau_1 Q_{1n}(\lambda)/P_{1n}(\lambda)$ dans les équations (55) et (56) et en tenant compte des propriétés des fonctions P et Q on trouve les formules

(58) $$\tau_k(\lambda)=\tau_1(\lambda)\frac{P_{kn}(\lambda)}{P_{1n}(\lambda)}(1-\mu_1)\ldots(1-\mu_{k-1})$$

(59) $$\psi_k(\lambda)=-\tau_1(\lambda)\frac{Q_{kn}(\lambda)}{P_{1n}(\lambda)}(1-\mu_1)\ldots(1-\mu_{k-1}) \qquad (k=1,2,\ldots,n)$$

réduisant tout le problème à la recherche d'une seule fonction τ_1.

13. *Nombre infini de couches* — Dans le cas de n infini on doit admettre la convergence du produit infini

$$M=(1+|\mu_1|)(1+|\mu_2|)\ldots(1+|\mu_k|)\ldots$$

Nous avons vu que dans ces conditions les limites $P_k(\lambda)$ et $Q_k(\lambda)$ existent. Les équations (58) et (59) deviennent

(60) $$\tau_k(\lambda)=\tau_1(\lambda)\frac{P_k(\lambda)}{P_1(\lambda)}(1-\mu_1)(1-\mu_2)\ldots(1-\mu_{k-1})$$

(61) $$\psi_k(\lambda)=-\tau_1(\lambda)\frac{Q_k(\lambda)}{P_1(\lambda)}(1-\mu_1)(1-\mu_2)\ldots(1-\mu_{k-1}).$$

Du point de vue physique la convergence du produit M signifie que la différence relative entre les deux couches consécutives tend rapidement vers zéro pour n croissant indéfiniment.

Le problème se réduit une fois de plus à la recherche d'une seule fonction τ_1.

IV Recherche des fonctions $\tau_{m1}(\lambda)$

14. *Retour au problème général* — Nous avons donné à la solution de l'équation (12) la forme

(18) $$f(x,y,u)=\sum_m\int_0^\infty S_m(x,y,\lambda)[\tau_{mk}(\lambda)e^{-\lambda u}+\psi_{mk}(\lambda)e^{\lambda u}]\,d\lambda \qquad (u_{k-1}<u<u_k)$$

$S_m(x,y,\lambda)$ étant une solution particulière de l'équation (6). Les équations (60) et (61) nous donnent toutes les fonctions τ_{mk} et ψ_{mk} exprimées au moyen de τ_{m1}:

(60-bis) $$\tau_{mk}(\lambda)=\tau_{m1}(\lambda)\cdot\frac{P_{kn}(\lambda)}{P_{1n}(\lambda)}(1-\mu_1)\ldots(1-\mu_{k-1})$$

(61-bis) $$\psi_{mk}(\lambda)=-\tau_{m1}(\lambda)\frac{Q_{kn}(\lambda)}{P_{1n}(\lambda)}(1-\mu_1)\ldots(1-\mu_{k-1})$$

Donc la formule (18) devient pour $u_{k-1}<u<u_k$

(62) $$f(x,y,u)=(1-\mu_1)\ldots(1-\mu_{k-1})\times \\ \times\sum_m\int_0^\infty S_m(x,y,\lambda)\tau_{m1}(\lambda)\frac{P_{kn}(\lambda)e^{-\lambda u}-Q_{kn}(\lambda)e^{\lambda u}}{P_{1n}(\lambda)}\,d\lambda$$

On a en particulier dans la première couche pour $0 < u < u_1$

$$(63)\qquad f(x,y,u) = \int_0^\infty \frac{P_{1n}(\lambda)\, e^{-\lambda u} - Q_{1n}(\lambda)\, e^{\lambda u}}{P_{1n}(\lambda)}\, d\lambda \sum_m S_m(x,y,\lambda)\, \tau_{m1}(\lambda).$$

Les fonctions P_{1n} et Q_{1n} sont connues. Il s'agit de déterminer les fonctions $\tau_{m1}(\lambda)$ en se servant des conditions limites.

15. *Transformation des coordonnées* (x,y) — Remplaçons les coordonnées (x,y) par $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. L'équation (6) devient

$$(64)\qquad \frac{\partial^2 S}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial S}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} + \lambda^2 S = 0.$$

Posons

$$S = R(r)\,\Theta(\theta).$$

Les fonctions R et Θ vérifient les équations suivantes

$$(65)\qquad R'' + \frac{1}{r}R' + R\left(\lambda^2 - \frac{m^2}{r^2}\right) = 0$$

$$(66)\qquad \Theta'' + m^2\,\Theta = 0$$

On peut donc ecrire

$$(67)\qquad R = J_m(\lambda r)$$

$$(68)\qquad \Theta = a_m(\lambda)\cos m\theta + b_m(\lambda)\sin m\theta,$$

en designant par $a_m(\lambda)$ et $b_m(\lambda)$ les fonctions désignées précédemment par $\tau_{m1}(\lambda)$. La formule (63) prend la forme

$$(69)\qquad \begin{cases} f(x,y,u) = \sum_m \cos m\theta \int_0^\infty J_m(\lambda r)\, a_m(\lambda)\, \dfrac{P_{1n}(\lambda)\, e^{-\lambda u} - Q_{1n}(\lambda)\, e^{\lambda u}}{P_{1n}(\lambda)}\, d\lambda + \\ \qquad + \sum_m \sin m\theta \int_0^\infty J_m(\lambda r)\, b_m(\lambda)\, \dfrac{P_{1n}(\lambda)\, e^{-\lambda u} - Q_{1n}(\lambda)\, e^{\lambda u}}{P_{1n}(\lambda)}\, du \end{cases}$$

$$(0 < u < u_1).$$

16. *Fonctions cylindriques* — Nous allons nous servir par la suite de quelques formules de la théorie des fonctions cylindriques qu'il est utile de rappeler ici.

On a tout d'abord l'équation intégrale analogue à celle de Fourier

$$(70)\qquad f(x) = \int_0^\infty J_0(kx)\, k\, dk \int_0^\infty J_0(ks)\, s f(s)\, ds,$$

et l'équation plus générale

$$(71)\qquad f(x) = \int_0^\infty J_m(kx)\, k\, dk \int_0^\infty J_m(ks)\, s f(s)\, ds.$$

On a ensuite un groupe de formules établissant la multiplication intégrale des fonctions cylindriques par les fonctions trigonométriques

$$(72)\qquad \int_0^\infty J_0(r\lambda)\sin\lambda u\, d\lambda = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{u^2 - r^2}} & r < u \\ 0 & r > u \end{cases}$$

$$(73)\qquad \int_0^\infty J_0(r\lambda)\cos\lambda u\, d\lambda = \begin{cases} 0 & r < u \\ \dfrac{1}{\sqrt{r^2 - u^2}} & r > u \end{cases}$$

$$(74)\qquad \int_0^\infty J_0(r\lambda)\frac{\sin\lambda u}{\lambda}\, d\lambda = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & r < u \\ \operatorname{Arc}\sin\dfrac{u}{r} & r > u \end{cases}$$

et la formule inverse

$$(75)\qquad \int_0^z \frac{J_0(r\lambda)\, r\, dr}{\sqrt{z^2 - r^2}} = \frac{\sin\lambda z}{\lambda}$$

Il nous faut encore calculer les intégrales plus générales

$$(76)\qquad C_m(r,u) = \int_0^\infty J_m(\lambda r)\sin\lambda u\, d\lambda,\quad D_m(r,u) = \int_0^\infty J_m(\lambda r)\cos\lambda u\, d\lambda.$$

Ces fonctions vérifient les relations récurrentes suivantes

$$C_{m+1} = C_{m-1} + \frac{2u}{r}D_m;\quad D_{m+1} = D_{m-1} - \frac{2u}{r}C_m \qquad (m \geq 1)$$

D'autre part

$$C_1 = \frac{u}{r} D_0, \quad D_1 = \frac{1}{r} - \frac{u}{r} C_0.$$

Ces relations et les formules (72), (73) suffisent pour calculer effectivement les fonctions C et D. Supposons d'abord

$$\frac{u}{r} = \sin\varphi < 1.$$

Alors

$$C_K = \frac{\sin k\varphi}{r\cos\varphi}, \quad D_K = \frac{\cos k\varphi}{r\cos\varphi} \tag{77}$$

Supposons ensuite que

$$\frac{u}{r} = \operatorname{sh}\varphi > 1;$$

dans ce cas

$$\begin{cases} C_{2k} = \dfrac{(-1)^k e^{-2k\varphi}}{r\operatorname{ch}\varphi}, \quad C_{2k-1} = 0 \\[2ex] D_{2k} = 0, \quad D_{2k-1} = \dfrac{(-1)^{k-1} e^{-(2k-1)\varphi}}{r\operatorname{ch}\varphi} \end{cases} \tag{78}$$

17. *Problème de Dirichlet* — Supposons que la fonction f vérifie la condition (16) et que la fonction $\Phi(x,y) = \Phi(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ est développable en série de Fourier

$$\Phi(r\cos\theta,\ r\sin\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m(r)\cos m\theta + \sum_{m=1}^{\infty} B_m(r)\sin m\theta.$$

D'autre part, pour $u=0$ la formule (69) donne

$$f(r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ 0) = \sum_{m=0}^{\infty}\cos m\theta \int_0^{\infty} J_m(\lambda r)\, a_m(\lambda)\, \frac{N_{1n}(\lambda)}{P_{1n}(\lambda)}\, d\lambda$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty}\sin m\theta \int_0^{\infty} J_m(\lambda r)\, b_m(\lambda)\, \frac{N_{1n}(\lambda)}{P_{1n}(\lambda)}\, d\lambda.$$

Dans ces conditions l'équation (16) donne lieu à un système d'équations intégrales

$$\begin{cases} A_m(r) = \displaystyle\int_0^{\infty} J_m(\lambda r)\, a_m(\lambda)\, \frac{N_{1n}(\lambda)}{P_{1n}(\lambda)}\, d\lambda \\[2ex] B_m(r) = \displaystyle\int_0^{\infty} J_m(\lambda r)\, b_m(\lambda)\, \frac{N_{1n}(\lambda)}{P_{1n}(\lambda)}\, d\lambda \end{cases} \tag{79}$$

L'inversion de ces intégrales est immédiate:

$$\begin{cases} a_m(\lambda) = \dfrac{\lambda P_{1n}(\lambda)}{N_{1n}(\lambda)} \displaystyle\int_0^{\infty} A_m(r)\, J_m(\lambda r)\, r\, dr \\[2ex] b_m(\lambda) = \dfrac{\lambda P_{1n}(\lambda)}{N_{1n}(\lambda)} \displaystyle\int_0^{\infty} B_m(r)\, J_m(\lambda r)\, r\, dr. \end{cases} \tag{80}$$

Ou a d'autre part

$$A_m(r) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\cos m\theta\, d\theta$$

$$B_m(r) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\sin m\theta\, d\theta.$$

Donc

$$a_m(\lambda) = \frac{\lambda P_{1n}(\lambda)}{\pi N_{1n}(\lambda)} \int_0^{2\pi}\cos m\varphi\, d\varphi \int_0^{\infty} \Phi(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\, J_m(\lambda r)\, r\, dr$$

$$b_m(\lambda) = \frac{\lambda P_{1n}(\lambda)}{\pi N_{1n}(\lambda)} \int_0^{2\pi}\sin m\varphi\, d\varphi \int_0^{\infty} \Phi(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\, J_m(\lambda r)\, r\, dr$$

Remplaçons $a_m(\lambda)$ et $b_m(\lambda)$ par ces expressions dans la formule (69):

$$f(x,\ y,\ u) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{P_{1n}(\lambda)\, e^{-\lambda u} - Q_{1n}(\lambda)\, e^{\lambda u}}{N_{1n}(\lambda)}\, \lambda\, d\lambda \int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^{\infty} \Phi(s\cos\varphi,\ s\sin\varphi)\, s\, ds.$$

$$\left\{ J_0(\lambda r)\, J_0(\lambda s) + 2\sum_{m=1}^{\infty}\cos m(\theta-\varphi)\, J_m(\lambda r)\, J_m(\lambda s) \right\}$$

Or, on a d'après la formule d'addition des fonctions cylindriques

$$(81)\qquad J_0\left(\lambda\sqrt{r^2+s^2-2rs\cos(\theta-\varphi)}\right)=$$
$$=J_0(\lambda r)\,J_0(\lambda s)+2\sum_{m=1}^{\infty}\cos m(\theta-\varphi)\,J_m(\lambda s)\;J_m(\lambda r)$$

On obtient donc la solution cherchée sous la forme suivante:

$$(82)\qquad \left\{ f(x,y,u)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{P_{1n}(\lambda)\,e^{-\lambda u}-Q_{1n}(\lambda)\,e^{\lambda u}}{N_{1n}(\lambda)}\,\lambda\,d\lambda\,\times\right.$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\xi,\eta)\,J_0\left(\lambda\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\right)d\xi\;d\eta\;(0<u<u_1)$$

On trouve de même la fonction $f(x,y,u)$ dans la k^{me} couche

$$(83)\qquad \left\{ f(x,y,u)=\frac{(1-\mu_1)\ldots(1-\mu_{k-1})}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{P_{kn}(\lambda)\,e^{-\lambda u}-Q_{kn}(\lambda)\,e^{\lambda u}}{N_{1n}(\lambda)}\,\lambda\,d\lambda\,\times\right.$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\xi,\eta)\,J_0\left(\lambda\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\right)d\xi\;d\eta\;(u_{k-1}<u<u_k)$$

Le problème de Dirichlet se trouve ainsi entièrement résolu.

18. *Problème de Neumann* — Supposons que la fonction f vérifie la condition (17) et que la fonction $F(x,y)=F(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ est développable en série de Fourier

$$F(r\cos\theta,\ r\sin\theta)=\sum_{m=0}^{\infty}G_m(r)\cos m\theta+\sum_{m=1}^{\infty}H_m(r)\;\sin m\theta.$$

D'autre part, pour $u=0$ les formules (17) et (69) donnent

$$-F(r\cos\theta,\ r\sin\theta)=\sum_{m=0}^{\infty}\cos m\theta\int_0^{\infty}J_m(\lambda r)\,a_m(\lambda)\frac{D_{1n}(\lambda)}{P_{1n}(\lambda)}\lambda\,d\lambda+$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty}\sin m\theta\int_0^{\infty}J_m(\lambda r)\,b_m(\lambda)\frac{D_{1n}(\lambda)}{P_{1n}(\lambda)}\lambda\,d\lambda$$

On a par conséquent un système d'équations

$$(84)\qquad \begin{cases} -G_m(r)=\displaystyle\int_0^{\infty}J_m(\lambda r)\,a_m(\lambda)\frac{D_{1n}(\lambda)}{P_{1n}(\lambda)}\lambda\,d\lambda \\[2ex] -H_m(r)=\displaystyle\int_0^{\infty}J_m(\lambda r)\,b_m(\lambda)\frac{D_{1n}(\lambda)}{P_{1n}(\lambda)}\lambda\,d\lambda. \end{cases}$$

L'inversion est facile:

$$(85)\qquad \begin{cases} a_m(\lambda)=-\dfrac{P_{1n}(\lambda)}{D_{1n}(\lambda)}\displaystyle\int_0^{\infty}G_m(\lambda)\,J_m(\lambda r)\,r\,dr \\[2ex] b_m(\lambda)=-\dfrac{P_{1n}(\lambda)}{D_{1n}(\lambda)}\displaystyle\int_0^{\infty}H_m(r)\,J_m(\lambda r)\,r\,dr \end{cases}$$

Ou peut écrire immédiatement les formules analogues à (82) et (83) et résolvant entièrement le problème de Neumann:

$$(86)\qquad \left\{ f(x,y,u)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{Q_{1n}(\lambda)\,e^{\lambda u}-P_{1n}(\lambda)\,e^{-\lambda u}}{D_{1n}(\lambda)}\,d\lambda\,\times\right.$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(\xi,\eta)\,J_0(\lambda)\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\,d\xi\,d\eta\;(0<u<u_1)$$

$$(87)\qquad \left\{ f(x,y,u)=\frac{(1-\mu_1)\ldots(1-\mu_{k-1})}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{Q_{kn}(\lambda)\,e^{\lambda u}-P_{kn}(\lambda)\,e^{-\lambda u}}{D_{1n}(\lambda)}\,d\lambda\right.$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(\xi,\eta)\,J_0\left(\lambda\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\right)d\xi\,d\eta\,(u_{k-1}<u<u_k)$$

Remarquons qu'en établissant les formules (82 — 83), (86 — 87) nous nous sommes mis sur un terrain purement formel sans nous soucier de la légitimité de nos opérations et transformations. Nous espèrons combler cette lacune dans une publication ultérieure.

V. Un cas particulier du problème mixte.

19. Nous allons donner ici la solution générale d'un problème géophysique dont les cas particuliers de $n=3$ et de $n=4$ ont été résolus par MM Schlumberger et Stefanesco*). Il s'agit de trouver le potentiel électrique dans un sol stratifié. L'atmosphère est considérée comme isolant. Une électrode ponctuelle située à la surface du sol débite un courant d'intensité I. Le potentiel vérifie l'équation (6) ou après l'introduction de la variable u l'équation de Laplace (12). En tenant compte de la symétrie axiale on peut remplacer (12) par l'équation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}=0. \tag{88}$$

Les conditions I, II, III ne sont pas modifiées. Quant aux conditions limites, la dérivée normale du potentiel s'annule à la surface

$$\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|^{u=0}=0, \tag{89}$$

et le potentiel pour $R=\sqrt{x^2+y^2+u^2}\longrightarrow 0$ devient infini comme $\frac{I}{2\pi s_1 R}$

Dans ces conditions on peut exprimer f sous forme suivante

$$f(r,u)=\frac{I}{2\pi s_1}\left[\int_0^\infty \tau_k(\lambda)\,J_0(\lambda r)\,e^{-\lambda u}\,d\lambda+\int_0^\infty \psi_k(\lambda)\,J_0(\lambda r)\,e^{\lambda u}\,d\lambda\right] \tag{90}$$

$$(u_{k-1}<u<u_k).$$

Il est facile de voir que les fonctions τ_k et ψ_k vérifient les équations (19), (20) et (21) et qu'en outre

$$\tau_1=\psi_1+1. \tag{91}$$

Les équations (57) et (91) permettent de déterminer immédiatement τ_1 et ψ_1:

$$\tau_1=\frac{P_{1n}(\lambda)}{D_{1n}(\lambda)},\quad \psi_1=-\frac{Q_{1n}(\lambda)}{D_{1n}(\lambda)}, \tag{92}$$

*) Stefanesco S. et Schlumberger C. et M. Études théoriques sur la prospection électrique du sous — sol I, II Bucuresti 1929 — 1932.

ainsi que toutes les fonctions τ_k et ψ_k:

$$\tau_k(\lambda)=\frac{(1-\mu_1)\ldots(1-\mu_{k-1})\,P_{kn}(\lambda)}{D_{1n}(\lambda)}, \tag{93}$$

$$\psi_k(\lambda)=-\frac{(1-\mu_1)\ldots(1-\mu_{k-1})\,Q_{kn}(\lambda)}{D_{1n}(\lambda)}\quad (k=1,2,\ldots,n)$$

L'équation (54) donne d'autre part

$$\left\{\begin{aligned}&\tau_n(\lambda)=\frac{(1-\mu_1)\ldots(1-\mu_{n-1})}{D_{1n}(\lambda)},\quad \psi_n(\lambda)=-\frac{(1-\mu_1)\ldots(1-\mu_{n-1})\,\mu_n\,e^{-2\lambda u_n}}{D_{1n}(\lambda)}\\ &\tau_{n+1}(\lambda)=\frac{(1-\mu_1)\ldots(1-\mu_n)}{D_{1n}(\lambda)}.\end{aligned}\right. \tag{94}$$

Le problème de n couches se trouve par conséquent entièrement résolu.

Les fonctions τ_k et ψ_k possèdent une curieuse particularité. Supposons que $\mu_k=\pm 1$, c'est-à-dire que la $k+1^{me}$ couche est un isolant ou un conducteur parfait. Or, précisement nous avons vu que dans ces conditions pour $m\leq k$ les fonctions τ_m et ψ_m deviennent

$$\tau_m(\lambda)=\frac{(1-\mu_1)\ldots(1-\mu_{m-1})\,P_{mk}(\lambda)}{D_{1k}(\lambda)}, \tag{95}$$

$$\psi_m(\lambda)=-\frac{(1-\mu_1)\ldots(1-\mu_{m-1})\,Q_{mk}(\lambda)}{D_{1k}(\lambda)}.$$

Elles ne dépendent donc pas de l'état électrique des couches situées au — dessous d'une couche isolante ou conductrice parfaite. Par conséquent, les mesures électriques faites au — dessus d'une telle couche ne peuvent donner aucune idée de l'état électrique des couches situées au — dessous du niveau u_k. On peut en conclure que les couches à conductibilité trop grande ou trop petite forment un écran pratiquement infranchissable pour la prospection électrique.

20. *Problèmes inverses* — Il est nécessaire d'élucider un autre point important. On pose souvent le problème inverse, autrement dit on cherche une distribution de la matière qui expliquerait le potentiel observé à la surface. On oublie volontiers que dans la plupart des cas c'est un problème indéterminé, et ainsi de temps en temps les vieilles erreurs sont remises en circulation. On a vu recemment cette contro-

verse ressuscitée à propos de mesures magnétiques, on la voit actuellement en pleine action à propos de mesures électriques. Est-il possible de déterminer sans ambiguïté la conductibilité d'un sol stratifié en se basant sur les mesures extérieures de potentiel et de courant tangentiel? Le présent mémoire donne à cette question une réponse négative. En effet, dans le cas particulier de conductibilités liées par la relation (8) le potentiel extérieur, ainsi que le courant tangentiel ne dépendent pas de la fonction $\sigma(z)$, mais exclusivement des constantes s_k. Cet exemple est bien suffisant pour notre but.

Über die asymptotische Verteilung von fastperiodischen Funktionen mit linear unabhänginen Exponenten.

Von

Aurel Wintner in Baltimore.

Vor einigen Jahren habe ich gezeigt [1]), dass jede reelle fastperiodische Funktion $f(t)$ eine asymptotische Verteilungsfunktion $\sigma(x)$ besitzt. Letztere ist eine für alle reellen x erklärte monoton nicht abnehmende Funktion derart, dass an jeder Stetigkeitsstelle von $\sigma(x)$ die Grenzgleichung

$$\sigma_T(x) \longrightarrow \sigma(x) \qquad (T \longrightarrow +\infty)$$

gilt, wobei $\sigma_T(x)$ den durch $2T$ dividierten Inhalt der Menge derjenigen Punkte t des Intervalles $-T \leqq t \leqq T$ bezeichnet, für welche $f(t) \leqq x$ ausfällt. In Verallgemeinerung des Bolzano-Weierstrassschen Zwischenwertsatzes über stetige (periodische) Funktionen gilt der Satz [2]), dass die Funktion $\sigma(x)$ in der Umgebung der Stelle $x = x_0$ nicht konstant sein kann, wenn x_0 zu dem Wertevorrat der fastperiodischen Funktion $f(t)$ gehört. Endlich gilt [3])

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n \, d\sigma(x) = \lim_{T=\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} (f(t))^n \, dt \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

[1]) A. Wintner, Math. Ztschr. 30 (1929), S. 312—316.

[2]) ibid., S. 315—316.

[3]) ibid., S. 316.