Sur une propriété du segment

(O pewnej własności odcinka)

Par

W. Sierpiński

Le but de cette Note est de démontrer à l'aide de l'axiome du choix ce

Théorème: *Il existe une décomposition de l'intervalle* $I\,[0 \leqslant x \leqslant 1]$ *en trois ensembles disjoints* $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ *et* $\mathcal{E}_3$, *et deux translations* (le long de la droite) *qui transforment les ensembles* $\mathcal{E}_1$ *et* $\mathcal{E}_2$ *respectivement en ensembles* $\mathcal{E}_1^*$ *et* $\mathcal{E}_2^*$, *de sorte que les ensembles* $\mathcal{E}_1^*$, $\mathcal{E}_2^*$ *et* $\mathcal{E}_3$ *sont disjoints et que leurs somme est un ensemble non mesurable contenant l'intervalle* I.

Démonstration.

Soit α un nombre irrationnel donné >0 et <1. x et y étant deux nombres de l'intervalle $I_0\,[0 \leqslant t < 1]$, nous écrirons xRy dans ce et seulement dans ce cas s'il existe un nombre entier k, tel que

$$y = x + k\alpha - E(x + k\alpha), \tag{1}$$

où Et désigne l'entier le plus grand $\leqslant t$.

Soient x et y deux nombres de I_0, tels que xRy: on a donc la formule (1) qui donne

$$y - k\alpha = x - E(x + k\alpha),$$

d'où, d'après $0 \leqslant x < 1$:

$$E(y - k\alpha) = -E(x + k\alpha)$$

et la formule (1) donne

$$x = y - k\alpha - E(y - k\alpha),$$

ce qui prouve que yRx. La relation R est donc symétrique.

Soient maintenant x, y et z trois nombres de I_0, tels que xRy et yRz. Il existe donc deux entiers k et l, tels qu'on a la formule (1) et la formule

(2) $$z = y + l\alpha - E(y + l\alpha).$$

D'après (1) nous trouvons

$$y + l\alpha = x + k\alpha + l\alpha - E(x + k\alpha),$$

d'où:

(3) $$E(y + l\alpha) = E(x + k\alpha + l\alpha) - E(x + k\alpha),$$

et les formules (1), (2) et (3) donnent

$$z = x + k\alpha + l\alpha - E(x + k\alpha + l\alpha),$$

ce qui prouve que xRz. La relation R est donc *transitive*.

La relation R entre les nombres formant l'ensemble I_0 étant symétrique et transitive, nous pouvons diviser tous ces nombres en classes disjointes, en rangeant dans une même classe deux nombres x et y de I_0 dans ce et seulement dans ce cas, où xRy. Le nombre α étant irrationnel, on voit sans peine (vu la définition de la relation R) que les classes ainsi obtenues contiennent chacune une infinité dénombrable de nombres.

Je dis qu'il existe pour tout nombre x de I_0 (au moins) un nombre y, tel que xRy et $0 \leqslant y < \alpha$.

En effet, soit x un nombre donné de I_0. Il existe évidemment un entier k ($>$, $<$ ou $=0$) qui est le plus grand, tel que $x + k\alpha < \alpha$. On a donc $x + (k+1)\alpha \geqslant \alpha$, d'où $x + k\alpha \geqslant 0$. D'après $\alpha < 1$ on a donc $0 \leqslant x + k\alpha < \alpha < 1$, d'où $E(x + k\alpha) = 0$. Le nombre

$$y = x + k\alpha - E(x + k\alpha) = x + k\alpha$$

satisfait donc à la relation xRy, et on a $0 \leqslant y < \alpha$, c. q. f. d.

Il existe donc, dans chacune de nos classes, des nombres y, tels que $0 \leqslant y < \alpha$: choisissons dans chacune de nos classes un tel nombre y; soit N l'ensemble aninsi obtenu.

Tout nombre de I_0 est donc de la forme (2), où $y \varepsilon N$ et où l est un entier.

Q étant un ensemble linéaire donné, désignons par $Q(a)$ sa translation de longueur a, c'est-à-dire l'ensemble de tous les nombres réals x, tels que $x - a \varepsilon Q$.

Il résulte tout de suite de la remarque faite tout à l'heure que

$$I_0 \subset \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} N(l\alpha - k),$$

donc l'ensemble I_0 est contenu dans une somme d'une infinité dénombrable d'ensembles, dont chacun est superposable (par translation) avec N. Par conséquent l'ensemble N ne peut pas être de mesure nulle (puisqu'une somme d'une infinité dénombrable d'ensembles de mesure nulle est de mesure nulle, et mes $I_0 = 1$).

Or, je dis que les ensembles $N(k\alpha - Ek\alpha)$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$) sont disjoints. En effet, admettons, par contre, qu'on a pour deux nombres naturels différents k et l:

$$N(k\alpha - Ek\alpha) \cdot N(l\alpha - El\alpha) \neq 0.$$

Il existerait donc deux nombres x et y de N, tels que

$$x + k\alpha - Ek\alpha = y + l\alpha - El\alpha,$$

d'où

(4) $$y = x + (k - l)\alpha - Ek\alpha + El\alpha$$

ce qui donne, d'après $Ey = 0$ (puisque $y \varepsilon N$):

$$0 = E(x + (k - l)\alpha) - Ek\alpha + El\alpha,$$

d'où, d'après (4):

$$y = x + (k - l)\alpha - E(x + (k - l)\alpha),$$

ce qui prouve que xRy. Or, d'après $k \neq l$, le nombre α etant irrationnel, on a $x \neq y$, ce qui est impossible, puisque $x \varepsilon N$, $y \varepsilon N$ et xRy.

L'ensemble $S = \sum_{k=1}^{\infty} N(k\alpha - Ek\alpha)$ est donc une somme disjointe d'une infinité dénombrable d'ensembles, dont chacun est superposable avec N. Or, l'ensemble N étant contenu dans I_0, on conclut, d'après $0 \leqslant k\alpha - Ek\alpha < 1$ pour $k = 1, 2, 3, \ldots$, que l'ensemble S est contenu dans l'intervalle (0,2). Il en résulte tout de suite que l'ensemble N ne peut pas être mesurable, de mesure positive. Or, comme nous savons, l'ensemble N n'est pas non plus de mesure nulle. Donc, l'ensemble N est non mesurable.

Désignons maintetant par $\mathcal{E}_1$ l'ensemble formé de l'ensemble N et de tous les nombres réels $z \geqslant \alpha$ qui sont de la forme

(5) $$z = x + k\alpha - E(x + k\alpha)$$

où x est un nombre de N et $k = 1, 2, 3, \ldots,$ et désignons par $\mathcal{E}_2$ l'ensemble formé de tous les nombres réels $z < \alpha$ qui sont da la forme (5), où $x \varepsilon N$ et $k = 1, 2, 3, \ldots$ Posons encore $\mathcal{E}_3 = I - (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)$. Les ensembles $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ et $\mathcal{E}_3$ sont évidemment disjoints en on a

(6) $$I = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3.$$

Posons

(7) $$H = \mathcal{E}_1(-\alpha) + \mathcal{E}_2(1 - \alpha) + \mathcal{E}_3.$$

Je dis que

(8) $$I \subset H.$$

Il suffira évidemment de démontrer (d'après (6) et (7)) que

(9) $$\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 \subset \mathcal{E}_1(-\alpha) + \mathcal{E}_2(1 - \alpha).$$

Soit donc z un nombre de $\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$. On a donc $0 \leqslant z < 1$, d'où $0 < z + \alpha < 1 + \alpha < 2$, donc

(10) $$E(z + \alpha) = 0, \text{ si } z + \alpha < 1$$

et

(11) $$E(z + \alpha) = 1, \text{ si } z + \alpha \geqslant 1.$$

Distinguons maintenant deux cas.

1) $z \varepsilon N$. Si $z + \alpha < 1$, on a la formule (10), d'où

$$z + \alpha = z + \alpha - E(z + \alpha),$$

ce qui prouve, d'après $z + \alpha \geqslant \alpha$, $z \varepsilon N$ et d'après la définition de l'ensemble $\mathcal{E}_1$, que $z + \alpha \varepsilon \mathcal{E}_1$, d'où $z \varepsilon \mathcal{E}_1(-\alpha)$.

Si $z + \alpha \geqslant 1$, on a la formule (11), d'où

$$z + \alpha - 1 = z + \alpha - E(z + \alpha),$$

ce qui prouve, d'après $z + \alpha - 1 < \alpha$, $z \varepsilon N$ et d'après la définition de $\mathcal{E}_2$, que $z + \alpha - 1 \varepsilon \mathcal{E}_2$, d'où $z \varepsilon \mathcal{E}_2(1 - \alpha)$.

2) $z \overline{\varepsilon} N$. D'après $z \varepsilon \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$ et d'après la définition des ensembles $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ on a donc la formule (5), où $x \varepsilon N$ et où k est un nombre naturel. Il en résulte que

(12) $$z + \alpha = x + (k+1)\alpha - E(x + k\alpha).$$

Si $z + \alpha < 1$, on a la formule (10) et la formule (12) donne

$$0 = E(x + (k+1)\alpha) - E(x + k\alpha),$$

d'où, d'après (12):

$$z + \alpha = x + (k+1)\alpha - E(x + (k+1)\alpha),$$

ce qui prouve, d'après $z + \alpha \geqslant \alpha$, $x \varepsilon N$ et la définition de $\mathcal{E}_1$, que $z + \alpha \varepsilon \mathcal{E}_1$, d'où $z \varepsilon \mathcal{E}_1(-\alpha)$.

Si $z + \alpha \geqslant 1$, on a la formule (11) et la formule (12) donne

$$1 = E(x + (k+1)\alpha) - E(x + k\alpha),$$

d'où, d'après (12):

$$z + \alpha - 1 = x + (k+1)\alpha - E(x + (k+1)\alpha),$$

ce qui prouve, d'après $z + \alpha - 1 < \alpha$, $x \varepsilon N$ et la définition de $\mathcal{E}_2$, que $z + \alpha - 1 \varepsilon \mathcal{E}_2$, d'où $z \varepsilon \mathcal{E}_2(1 - \alpha)$.

La formule (9) et par suite aussi la formule (8) est ainsi établie.

Il résulte tout de suite de la définition de l'ensemble $\mathcal{E}_1$ que $\mathcal{E}_1(-\alpha) - I = N(-\alpha)$, et il résulte de la définition de $\mathcal{E}_2$ et $\mathcal{E}_3$ que $\mathcal{E}_2(1 - \alpha) \subset I$ et $\mathcal{E}_3 \subset I$. D'après (7) on a donc $H - I = N(-\alpha)$. On a donc, d'après (8):

$$H = I + N(-\alpha),$$

où $N(-\alpha)$ est un ensemble non mesurable, disjoint avec I.

Je dis que les ensembles $\mathcal{E}_1(-\alpha)$, $\mathcal{E}_2(1 - \alpha)$ et $\mathcal{E}_3$ sont disjoints.

Soit, en effet, $y \varepsilon \mathcal{E}_1(-\alpha)$ et $z \varepsilon \mathcal{E}_2(1 - \alpha)$. On a donc $y + \alpha \varepsilon \mathcal{E}_1$ et $z - 1 + \alpha \varepsilon \mathcal{E}_2$, d'où, d'après la définition de $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$: $y + \alpha < 1$ et $z - 1 + \alpha \geqslant 0$, d'où $y < 1 - \alpha \leqslant z$, donc $y \neq z$. On a donc

$$\mathcal{E}_1(-\alpha) \cdot \mathcal{E}_2(1 - \alpha) = 0.$$

Soit maintenant $y \varepsilon \mathcal{E}_1(-\alpha) - N(-\alpha)$. On a donc $y + \alpha \varepsilon \mathcal{E}_1 - N$, donc, d'après la définition de $\mathcal{E}_1$:

(13) $$y + \alpha = x + k\alpha - E(x + k\alpha),$$

où $x \varepsilon N$ et où k est un nombre naturel, et on a $\alpha \leqslant y + \alpha < 1$, donc $0 \leqslant y < 1 - \alpha < 1$ et $Ey = 0$. La formule (13) donne

(14) $$y = x + (k-1)\alpha - E(x + k\alpha),$$

d'où, vu que $Ey=0$:

$$0=E(x+(k-1)\alpha)-E(x+k\alpha),$$

ce qui donne, d'après (14):

(15) $$y=x+(k-1)\alpha-E(x+(k-1)\alpha)$$

Si $k=1$, la formule (15) donne (d'après $Ex=0$): $y=x\in N\subset\mathcal{E}_1$, donc $y\,\bar{\in}\,\mathcal{E}_3$ (puisque $\mathcal{E}_1\mathcal{E}_3=0$). Si $k>1$, il résulte de (15) (et de la définition de $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$) que $y\in\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2$, donc encore $y\,\bar{\in}\,\mathcal{E}_3$ (puisque $\mathcal{E}_3=I-(\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2)$).

On a donc $[\mathcal{E}_1(-\alpha)-N(-\alpha)]\,\mathcal{E}_3=0$, donc $\mathcal{E}_1(-\alpha)\,\mathcal{E}_3=0$, puisque $N(-\alpha)\cdot\mathcal{E}_3\subset N(-\alpha)\cdot I=0$.

Soit enfin $z\in\mathcal{E}_2(1-\alpha)$. On a donc $z-1+\alpha\in\mathcal{E}_2$ et d'après la définition de $\mathcal{E}_2$ on a $0\leqslant z-1+\alpha<\alpha$, d'où $0<1-\alpha\leqslant z<1$, donc $Ez=0$, et il existe un nombre $x\in N$ et un nombre naturel k, tels que

$$z-1+\alpha=x+k\alpha-E(x+k\alpha),$$

d'où

(16) $$z=1+x+(k+1)\alpha-E(x+k\alpha),$$

ce qui donne, d'après $Ez=0$:

$$0=1+E(x+(k+1)\alpha)-E(x+k\alpha),$$

d'où, d'après (16):

$$z=x+(k+1)\alpha-E(x+(k+1)\alpha),$$

d'où $z\in\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2$, donc $z\,\bar{\in}\,\mathcal{E}_3$. On a donc $\mathcal{E}_2(1-\alpha)\,\mathcal{E}_3=0$.

Les ensembles $\mathcal{E}_1^*=\mathcal{E}_1(-\alpha)$, $\mathcal{E}_2^*=\mathcal{E}_2(1-\alpha)$ et $\mathcal{E}_3$ sont donc disjoints. Notre théorème est ainsi démontré complètement.

Comme on vérifie sans peine, le raisonnement utilisé dans notre démonstration reste valable, si au lieu de l'ensemble non mesurable N on prend un ensemble quelconque Q de nombres réels $\geqslant 0$ et $<\alpha$, jouissant de cette propriété P qu'il ne contient aucun couple de nombres distincts x et y, tels que xRy. Au lieu de la formule $H=I+N(-\alpha)$ on obtient alors la formule $H=I+Q(-\alpha)$.

On peut p. e. prendre pour Q un ensemble formé d'un seul nombre. [1])

[1]) Ce cas était étudié par M. A. Linbenbaum dans sa *Thèse* (Varsovie 1927, non publiée); cf. A. Lindenbaum et A. Tarski, *C. R. Soc. Sc. Varsovie* Cl. III, XIX (1926) p. 329; S. Banach et A. Tarski *Fund. Math.* t. VI, p. 259; A. Lindenbaum, *Fund. Math.* t. VIII, p. 217.

On peut aussi prendre pour Q un ensemble quelconque de puissance inférieure à celle du continu, situé à l'intérieur de l'intervalle $(0,b)$, où $b<1$, en choisissant convenablement le nombre α. [2])

En effet, si la puissance de l'ensemble Q est inférieure à celle du continu, il en est de même de l'ensemble T de tous les nombres réels de la forme $\dfrac{y-x+l}{k}$, où $x\in Q$ et $y\in Q$ et où $k\,(\neq 0)$ et l sont des entiers. Il existe donc un nombre réel α, tel que $0<\alpha<b$ et $\alpha\,\bar{\in}\,T$, et on voit sans peine que la relation xRy ne peut pas avoir lieu pour deux éléments distincts x et y de Q.

On peut aussi (p. e. pour $\alpha=1/\sqrt{2}$) prendre pour Q un (certain) ensemble parfait. En effet, il s'en suit d'un résultat de M. J. von Neumann qu'il existe un ensemble parfait Q (de nombres $\geqslant 0$ et $<\alpha$) tel que deux nombres distincts de Q sont toujours indépendants algébriquement [3]), et, comme on voit sans peine, si α est un nombre algébrique (p. e. $\alpha=1/\sqrt{2}$), un tel ensemble Q jouit de la propriété P (L'ensemble Q peut d'ailleurs être défini effectivement). En utilisant la notion de l'équivalence par décomposition finie [4]) on peut donc énoncer le théorème suivant:

Il existe un ensemble linéaire parfait Q^* sans points communs avec l'intervalle $I\,[0\leqslant x\leqslant 1]$, tel que les ensembles I et $I+Q^*$ sont équivalents par décomposition finie.

Deux ensembles linéaires équivalents par décomposition finie ayant toujours la même mesure de Banach, [5]) on conclut que si les ensembles I et $I+R$ (où R est un ensemble, tel que $IR=0$) sont équivalents par décomposition finie, l'ensemble R a la mesure de Banach $=0$, indépendemment de la façon de définir cette mesure pour les ensembles linéaires. Il en résulte donc, d'après notre théorème, la conséquence suivante:

Il existe un ensemble linéaire non mesurable, N, tel que la mesure de Banach de l'ensemble N est $=0$ (indépendemment de la façon de définir cette mesure pour les ensembles linéaires).

Quant à notre théorème, il est encore à remarquer que le nombre *trois* (ensembles en lesquels on décompose l'intervalle I) ne peut pas

[2]) J'apprends que ce fait était connu depuis quelques années á M. Tarski.

[3]) Voir: S. Ruziewicz et W. Sierpiński, *Fund. Math.* t. XIX, p. 17—18.

[4]) Voir: S. Banach et A. Tarski *Fund. Math.* t. VI, p. 246.

[5]) S. Banach *Fund. Math.* t. IV, p. 7 ss.

être diminué. En effet, on a la proposition suivante, due à M. Lindenbaum:

Si un ensemble linéaire borné E et un de ses vrais sous-ensembles se décomposent chacun en deux parties respectivement superposables, il existe une une portion de l'ensemble E dans laquelle la densité extérieure de Peano-Jordan de l'ensemble E est $\leqslant {}^1/_2$.

La démonstration de cette proposition se trouve dans la *Thèse* de M. Lindenbaum (Varsovie 1927, non publiée) et sera publiée prochainement.

Streszczenie

Autor dowodzi (posługując się pewnikiem wyboru), że istnieje rozkład odcinka $I\,[0 \leqslant x \leqslant 1]$ na trzy zbiory rozłączne, takie, iż przesuwając odpowiednio dwa z nich (wzdłuż prostej) otrzymujemy trzy nowe zbiory rozłączne, dające w sumie odcinek I oraz pewien zbiór niemierzalny, leżący poza tym odcinkiem.

W związku z tem twierdzeniem autor czyni różne uwagi.

Sur l'équation de Laplace dans un milieu stratifié

par

V. A. Kostitzin

La résolution de l'équation de Laplace et d'autres équations du même type devient très laborieuse et même pratiquement impossible dès qu'il s'agit d'un milieu stratifié. Or, ce genre de problèmes se rencontre à chaque pas en astronomie et en physique du globe. Je me propose d'exposer dans le présent mémoire une méthode qui permet dans certains cas de simplifier considérablement la résolution effective des problèmes de cette nature. J'étudie spécialement le cas des surfaces de discontinuité planes parallèles, mais la méthode employée peut servir dans des cas plus généraux.

I. Équations — Conditions limites — Transformations.

1. *Equation différentielle* — Il s'agit de l'équation différentielle

$$\omega(z)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\omega(z)\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\sigma(z)\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+\sigma'(z)\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0. \tag{1}$$

Je suppose que les fonctions $\omega(z)$ et $\sigma(z)$ continues en général ont un certain nombre fini de points de discontinuité

$$z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n.$$

Dans certains cas on peut se débarasser de l'hypothèse de n fini.

On cherche une solution vérifiant dans le demi-espace (z positif) les conditions suivantes: