Ein allgemeiner Satz über die Integration eines trigonometrischen Polynoms.

von

Harald Bohr

in Kopenhagen.

Einleitung.

In seiner Doktorarbeit: „Sur les fonctions harmoniques presque périodiques" (Paris, 1927 [1]) hat J. Favard u. a., einen Satz des Verfassers über die Integration einer analytischen fastperiodischen Funktion verallgemeinernd, den folgenden wichtigen Satz über die Integration einer beliebigen fastperiodischen Funktion einer reellen Veränderlichen bewiesen:

Satz A. Es sei $f(t)$ eine reelle fastperiodische Funktion der reellen Veränderlichen t und

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos \lambda_n t + \beta_n \sin \lambda_n t)$$

die Fourierreihe von $f(t)$, wobei natürlich die Frequenzen λ_n alle $\geqq 0$ angenommen werden können. Ist in dieser Reihe nicht nur kein konstantes Glied vorhanden, sondern sogar die untere Grenze der λ_n grösser als Null, so ist das Integral $F(t) = \int f(t)\,dt$ stets wiederum fastperiodisch. Ferner ist, was äusserst einfach zu zeigen ist, die Fourierreihe des Integrales (bei passender Normierung) durch

[1]) Vergl. auch J. Favard: Leçons sur les fonctions presque-périodiques, Collection Julia, Paris 1933, p. 154.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} (\alpha_n \sin \lambda_n t - \beta_n \cos \lambda_n t)$$

gegeben.

In § 1 der vorliegenden Arbeit wird nun zunächst gezeigt, dass dieser Satz dem eigentlichen Inhalte nach mit dem folgenden Satz über endliche trigonometrische Summen gleichwertig ist:

Satz B. Es sei

$$p(t) = \sum_{n=1}^{N} (\alpha_n \cos \lambda_n t + \beta_n \sin \lambda_n t)$$

ein beliebiges trigonometrisches Polynom ohne konstantes Glied, und es bezeichne $\wedge$ *die kleinste der* N *positiven Grössen* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$. *Ferner sei* K *die obere Grenze von* $|p(t)|$ *für* $-\infty < t < \infty$. *Dann gilt für das Integral*

$$P(t) = \int p(t)\, dt = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\lambda_n} (\alpha_n \sin \lambda_n t - \beta_n \cos \lambda_n t)$$

die Ungleichung

$$|P(t)| \leqq C \cdot \frac{K}{\wedge},$$

wo C *eine* **absolute** *Konstante bedeutet.* Vor allem ist zu bemerken, dass die Schranke für $|P(t)|$ von der Anzahl N der Glieder des Polynoms unabhängig ist.

In § 2 wird dann ein direkter Beweis dieses Satzes B gegeben, wobei ein schon von Favard verwendeter Gedanke wesentlich benutzt wird. Von prinzipieller Bedeutung ist es aber, dass es gelingt *den bestmöglichen Wert der absoluten Konstanten* C zu bestimmen, und zwar ergibt sich

$$C = \frac{\pi}{2}.$$

Nach passender Normierung (indem $p(t)$ einfach durch $p^*(t) = \frac{1}{K} p\left(\frac{t}{\wedge}\right)$ ersetzt wird) kann man sich offenbar auf den Fall $K = 1$, $\wedge = 1$ beschränken. Dann lautet das Resultat:

Hauptsatz: *Es sei*

$$p(t) = \sum_{n=1}^{N} (\alpha_n \cos \lambda_n t + \beta_n \sin \lambda_n t)$$

ein beliebiges trigonometrisches Polynom, welches den Bedingungen

$$\underset{-\infty < t < \infty}{\text{Obere Grenze}} |p(t)| = 1, \quad \text{Min}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N\} = 1$$

genügt. Dann gilt für das Integral

$$P(t) = \int p(t)\, dt = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\lambda_n} (\alpha_n \sin \lambda_n t - \beta_n \cos \lambda_n t)$$

die Ungleichung

$$|P(t)| \leqq \frac{\pi}{2} \quad \text{für } -\infty < t < \infty.$$

Hierbei kann die Konstante $\frac{\pi}{2}$ *durch keine kleinere ersetzt werden.*

Den Beweis dieses Satzes in vollem Umfange erbringen wir in den Paragraphen 2 und 3. In § 2 beweisen wir die Ungleichung $|P(t)| \leqq \frac{\pi}{2}$, während wir in § 3 zeigen, dass die Konstante $\frac{\pi}{2}$ tatsächlich die bestmögliche ist, indem wir zu einem beliebig vorgegebenen $\delta > 0$ ein trigonometrisches Polynom $p(t)$ konstruieren, welches den beiden genannten Bedingungen genügt, für welches aber das Integral $P(t)$, etwa im Punkte $t = 0$, einen Wert grösser als $\frac{\pi}{2} - \delta$ besitzt.

Die beiden Paragraphen 2 und 3, welche den eigentlichen Inhalt unserer Arbeit ausmachen, können für sich gelesen werden und erfordern insbesondere keinerlei Kenntnisse aus der Theorie der fastperiodischen Funktionen. Mit Hinblick auf Leser, die die Beziehung zu dieser Theorie interessiert, ist aber der erste Paragraph vorausgeschickt worden, welcher den engen Zusammenhang unseres Satzes mit dem genannten Satz von Favard klarstellt.

§ 1. Die Gleichwertigkeit der Sätze A und B.

In diesem Paragraphen soll die Gleichwertigkeit der beiden Sätze A und B nachgewiesen werden, wobei der Einfachheit halber auch tiefliegendere bekannte Sätze aus der Theorie der fastperiodischen Funktionen herangezogen werden.

1°. Zuerst wollen wir zeigen, *wie der Satz A aus dem Satze B gefolgert werden kann.* Es sei also

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos \lambda_n t + \beta_n \sin \lambda_n t)$$

eine beliebige fastperiodische Funktion, für welche die untere Grenze $\bigwedge^*$ der Grössen λ_n positiv ist. Wir haben zu beweisen, dass das Integral $F(t) = \int f(t)\,dt$ wiederum fastperiodisch ist. Zu diesem Zwecke denken wir uns, etwa mit Hilfe der Bochnerschen Summationsmethode, eine Folge von Polynomen

$$p_\nu(t) = \sum_{n=1}^{N_\nu} (\alpha_n^{(\nu)} \cos \lambda_n^{(\nu)} t + \beta_n^{(\nu)} \sin \lambda_n^{(\nu)} t)$$

gewählt, welche gleichmässig für alle t gegen $f(t)$ konvergiert, und zwar so, dass die Grössen $\lambda_n^{(\nu)}$ alle aus der Menge der λ_n gewählt sind, also speziell $\geqq \bigwedge^*$ sind.

Wir betrachten nun die Folge der Integrale

$$P_\nu(t) = \int p_\nu(t)\,dt = \sum_{n=1}^{N_\nu} \frac{1}{\lambda_n^{(\nu)}} (\alpha_n^{(\nu)} \sin \lambda_n^{(\nu)} t - \beta_n^{(\nu)} \cos \lambda_n^{(\nu)} t).$$

Nach dem Satze B, dessen Gültigkeit wir ja hier voraussetzen, konvergiert auch diese Folge $P_\nu(t)$ für $-\infty < t < \infty$ gleichmässig, und dann von selbst gegen eine fastperiodische Funktion $G(t)$; in der Tat folgt ja aus dem Satze B, auf das Polynom $p_{\nu_1}(t) - p_{\nu_2}(t)$ angewendet,

$$\underset{-\infty < t < \infty}{\text{Obere Grenze}} |P_{\nu_1}(t) - P_{\nu_2}(t)| \leqq \frac{C}{\bigwedge^*} \underset{-\infty < t < \infty}{\text{Obere Grenze}} |p_{\nu_1}(t) - p_{\nu_2}(t)|,$$

so dass die gleichmässige Konvergenz von $p_\nu(t)$ die gleichmässige Konvergenz von $P_\nu(t)$ nach sich zieht.

Da die Folge der Polynome $p_\nu(t)$ bekanntlich formal gegen die Fourierreihe $\sum (\alpha_n \cos \lambda_n t + \beta_n \sin \lambda_n t)$ der Grenzfunktion $f(t)$ konvergiert, muss aber offenbar auch die Folge der integrierten Polynome $P_\nu(t)$ formal gegen die durch gliedweise Integration entstehende unend-

liche Reihe $\sum \frac{1}{\lambda_n} (\alpha_n \sin \lambda_n t - \beta_n \cos \lambda_n t)$ konvergieren. Die letztere Reihe ist somit gewiss die Fourierreihe einer fastperiodischen Funktion, nämlich der obigen Grenzfunktion $\lim P_\nu(t) = G(t)$. Diese muss aber gleich einem Integral $F(t) = \int f(t)\,dt$ sein; denn aus den gleichmässig geltenden Grenzbeziehungen $P_\nu(t) \longrightarrow G(t)$ und $p_\nu(t) = P_\nu'(t) \longrightarrow f(t)$ folgt ja bekanntlich, das $G(t)$ differenzierbar mit dem Differentialquotienten $f(t)$ ist.

2°. Nunmehr soll umgekehrt gezeigt werden, *dass der Satz B aus dem Satze A abgeleitet werden kann.* Zu diesem Zwecke verfahren wir indirekt, indem wir annehmen, dass der Satz B nicht richtig ist, und daraus durch Konstruktion eines Beispieles folgern, dass auch der Satz A nicht allgemein gültig ist. Nach der Annahme der Unrichtigkeit des Satzes B (also der Nichtexistenz einer absoluten Konstanten C mit der genannten Eigenschaft) können wir offenbar eine Folge von Polynomen

$$p_\nu(t) = \sum_{1}^{N_\nu} (\alpha_n^{(\nu)} \cos \lambda_n^{(\nu)} t + \beta_n^{(\nu)} \sin \lambda_n^{(\nu)} t)$$

so wählen, dass alle $\lambda_n^{(\nu)} \geqq 1$ sind, und

$$\underset{-\infty < t < \infty}{\text{Obere Grenze}} |p_\nu(t)| < \frac{1}{\nu^2} \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

während für jedes der Integrale

$$P_\nu(t) = \sum_{1}^{N_\nu} \frac{1}{\lambda_n^{(\nu)}} (\alpha_n^{(\nu)} \sin \lambda_n^{(\nu)} t - \beta_n^{(\nu)} \cos \lambda_n^{(\nu)} t)$$

die Ungleichung

$$\underset{-\infty < t < \infty}{\text{Obere Grenze}} |P_\nu(t)| > \nu$$

besteht.

Hierbei können wir ferner annehmen, dass bei jedem festen ν der kleinste die Grössen $\lambda_n^{(\nu)}$ $(n = 1, 2, \ldots, N_\nu)$ enthaltende Zahlenmodul M_ν keine einzige der Grössen $\lambda_n^{(\mu)}$ mit $\mu \neq \nu$ enthält. Nötigenfalls ersetze man nämlich in $p_2(t), p_3(t), \ldots$ die Variable t durch $(1+\delta_2)t, (1+\delta_3)t, \ldots$, wobei die δ_ν successive (beliebig klein) etwa so gewählt seien, dass der neue Modul M_ν (dessen Elemente aus denen des ursprünglichen durch Multiplikation mit $(1+\delta_\nu)$ hervorgehen) sogar mit jeder der vorangehen-

den, schon festgelegten Moduln $M_1, M_2, \ldots, M_{\nu-1}$ nur die Zahl 0 gemeinsam hat.

Wegen Ob. Gr. $|p_\nu(t)| < \frac{1}{\nu^2}$ konvergiert die unendliche Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} p_\nu(t)$ gleichmässig für alle t, und zwar gegen eine fastperiodische Grenzfunktion $f(t)$. Da keine zwei der Grössen $\lambda_n^{(\nu)}$ einander gleich sind, besteht, nach bekannten Sätzen über fastperiodische Funktionen, die Fourierreihe $\sum (\alpha_n \cos \lambda_n t + \beta_n \sin \lambda_n t)$ dieser Grenzfunktion genau aus den sämtlichen Gliedern $\alpha_n^{(\nu)} \cos \lambda_n^{(\nu)} t + \beta_n^{(\nu)} \sin \lambda_n^{(\nu)} t$ aller Polynome $p_\nu(t)$.

Wäre nun der Satz A richtig, so müsste also das Integral $F(t) = \int f(t)\, dt$ wiederum fastperiodisch sein, und zwar (bei geeigneter Normierung) als Fourierreihe die gliedweise integrierte Reihe

$$\sum \frac{1}{\lambda_n} (\alpha_n \sin \lambda_n t - \beta_n \cos \lambda_n t)$$

besitzen, d. h. diejenige Reihe, welche gerade aus den sämtlichen Gliedern der integrierten Polynome $P_\nu(t)$ besteht.

Hiermit sind wir aber zu einem Widerspruch gelangt; denn nach einem bekannten Satz von Bochner müssten dann auch diejenigen Glieder der Fourierreihe von $F(t)$, für welche die Grössen λ_n zu irgendeinem beliebig gegebenen Zahlenmodul M gehören, für sich allein die Fourierreihe einer fastperiodischen Funktion $F_M(t)$ ausmachen, für welche ausserdem

$$\text{Obere Grenze } |F_M(t)| \leqq \text{Obere Grenze } |F(t)|$$

ist. Benutzen wir aber als Modul M den obigen Modul M_ν, so bilden die entsprechenden Glieder ja gerade das Polynom $P_\nu(t)$; dies ist zwar eine fastperiodische Funktion, aber die obere Grenze von $|P_\nu(t)|$ ist ja $> \nu$, und bleibt somit nicht unterhalb einer von ν unabhängigen Zahl.

§ 2. Beweis der Ungleichung $|P(t)| \leqq \frac{\pi}{2}$ des Hauptsatzes.

Es bedeute in diesem Paragraphen

$$p(t) = \sum_1^N (\alpha_n \cos \lambda_n t + \beta_n \sin \lambda_n t)$$

ein beliebig gegebenes trigonometrisches Polynom mit Ob. Gr. $|p(t)| = 1$ und Min $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_N\} = 1$. Wir haben zu zeigen, dass das Integral

$$P(t) = \int p(t)\, dt = \sum_1^N \frac{1}{\lambda_n} (\alpha_n \sin \lambda_n t - \beta_n \cos \lambda_n t)$$

die Ungleichung

$$\text{Obere Grenze } |P(t)| \leqq \frac{\pi}{2}$$

erfüllt.

Zu diesem Zwecke bilden wir zunächst dasjenige Exponentialpolynom

$$\varphi(s) = \varphi(\sigma + i t)$$

mit lauter negativen Exponenten, dessen Realteil auf der Geraden $\sigma = 0$ mit dem gegebenen trigonometrischen Polynom $p(t)$ übereinstimmt, also

$$\varphi(s) = \sum_1^N (\alpha_n + i \beta_n)\, e^{-\lambda_n \cdot s}.$$

Der Realteil $\Re(\varphi(s))$ dieses Exponentialpolynoms, also die (in der ganzen σ, t-Ebene) reguläre harmonische Funktion

$$\sum_1^N (\alpha_n \cos \lambda_n t + \beta_n \sin \lambda_n t)\, e^{-\lambda_n \cdot \sigma},$$

sei mit $H(\sigma, t)$ bezeichnet.

Auf der ganzen Geraden $\sigma = 0$ ist nach Annahme

$$|H(0, t)| = |p(t)| \leqq 1,$$

und in der ganzen Halbebene $\sigma \geqq 0$ gilt offenbar

$$|\varphi(s)| \leqq \sum_1^N (|\alpha_n| + |\beta_n|)\, e^{-\lambda_n \cdot \sigma} \leqq k_1 e^{-\sigma},$$

wo k_1 (wie im folgenden $k_2, \ldots$) eine Konstante bedeutet, die von der gegebenen Funktion $p(t)$ abhängen darf.

Wir werden zunächst das folgende Lemma beweisen, aus dem sich

nachher die Ungleichung $|P(t)| \leqq \frac{\pi}{2}$ leicht ergibt.

Lemma. *In der ganzen Halbebene* $\sigma \geqq 0$ *gilt die Ungleichung*

$$|H(\sigma, t)| \leqq \frac{4}{\pi} \operatorname{Arctg} e^{-\sigma},$$

wo Arctg *den Hauptwert bedeutet, also hier zwischen* 0 *(excl.) und* $\frac{\pi}{4}$ *(incl.) liegt.*

Aus den Tatsachen, dass $|H(0, t)| \leqq 1$, und $|H(\sigma, t)|$ für $\sigma \geqq 0$ beschränkt (nämlich $\leqq k_1$) ist, folgt zunächst nach einem Satz von Walther[2]) über harmonische Funktionen

$$|H(\sigma, t)| \leqq 1 \text{ für } \sigma \geqq 0;$$

nach diesem Satze ist nämlich die für $-\infty < \sigma < \infty$ definierte Funktion

$$\mu(\sigma) = \underset{-\infty < t < \infty}{\text{Obere Grenze}} |H(\sigma, t)|$$

eine *konvexe* Funktion von σ, also, da sie für $\sigma \geqq 0$ beschränkt bleibt, eine niemals wachsende Funktion, so dass tatsächlich für $\sigma \geqq 0$ die Ungleichung

$$\mu(\sigma) \leqq \mu(0) = 1$$

besteht.

Die Werte, welche die ganze transzendente Funktion $z = \varphi(s)$ in der Halbebene $\sigma \geqq 0$ annimmt (Fig. 1-a), liegen somit, in der $z = x + iy$-Ebene aufgetragen, alle in dem vertikalen Parallelstreifen S, welcher durch $-1 \leqq x \leqq +1$, $-\infty < y < \infty$ charakterisiert ist (Fig. 1-c). Durch die in S analytische Funktion

$$w = u + iv = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} z$$

wird nun dieser abgeschlossene Streifen eineindeutig und konform auf den Bereich G der w-Ebene abgebildet, welcher aus dem abgeschlossenen Einheitskreise $|w| \leqq 1$ excl. den beiden Punkten $w = \pm i$ besteht, und zwar ist die Abbildung so gewählt, dass $z = 0$ dem Punkte $w = 0$ entspricht und die Strecke $-1 \leqq x \leqq 1$, $y = 0$ in den Durchmesser $-1 \leqq u \leqq 1$, $v = 0$ übergeht (Fig. 1-b). Nunmehr setzen wir $z = \varphi(s)$

[2]) A. Walther: Obere und untere Grenze eines Newtonschen Potentials auf Ebenen, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik 2 (1922) p. 69—71.

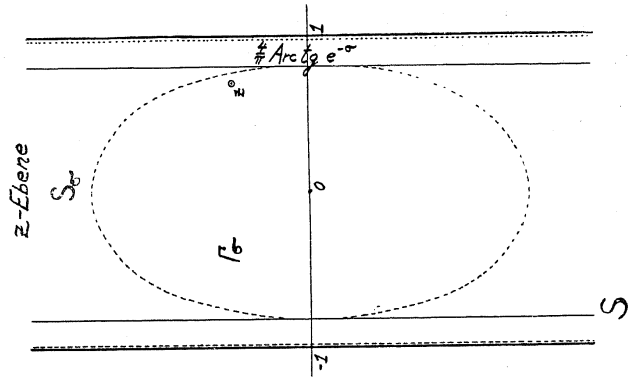

Fig. 1-c

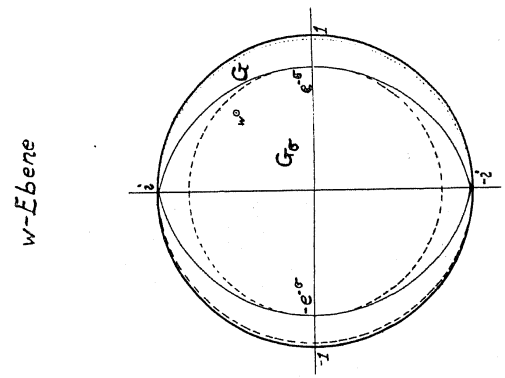

Fig. 1-b

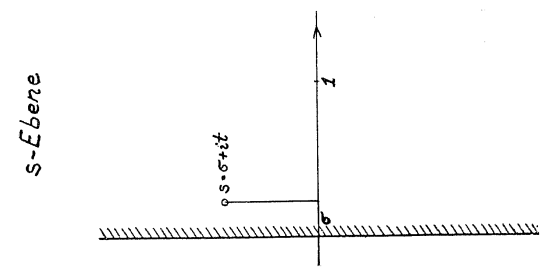

Fig. 1-a

in $w = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} z$ ein, d. h. wir bilden die für $\sigma \geqq 0$ analytische Funktion

$$w = \psi(s) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} \cdot \varphi(s)\right),$$

deren Werte dann natürlich sämtlich dem Gebiete G angehören.

Aus der obigen für $\sigma \geqq 0$ gültigen Ungleichung $|\varphi(s)| \leqq k_1 e^{-\sigma}$ folgt ferner, dass für hinreichend grosse σ die Ungleichung

$$|\psi(s)| = \left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\varphi(s)\right)\right| < 1{,}1 \cdot \frac{\pi}{4}|\varphi(s)| < k_2 e^{-\sigma}$$

besteht, und es gilt somit (da $\psi(s)$ für $\sigma > 0$ beschränkt, nämlich dem Betrage nach $\leqq 1$, ist) in der ganzen Halbebene $\sigma \geqq 0$ die Ungleichung

$$|\psi(s)| \leqq k_3 e^{-\sigma}.$$

Eine für $\sigma \geqq 0$ reguläre Funktion $\psi(s)$, die den beiden Bedingungen

$$|\psi(s)| \leqq 1 \text{ für } \sigma = 0, \quad |\psi(s)| \leqq k_3 e^{-\sigma} \text{ für } \sigma > 0$$

genügt, muss aber, z. B. nach dem Doetschschen Dreigeradensatz, in der ganzen Halbebene $\sigma \geqq 0$ die schärfere Ungleichung

$$|\psi(s)| \leqq e^{-\sigma}$$

befriedigen; in der Tat ist nach diesem Satz die für $\sigma \geqq 0$ definierte Funktion

$$\nu(\sigma) = \log \left(\underset{-\infty < t < \infty}{\text{Obere Grenze}} |\psi(\sigma + it)|\right)$$

eine *konvexe* Funktion von σ; und eine konvexe Funktion $\nu(\sigma)$ mit $\nu(0) \leqq 0$, $\nu(\sigma) \leqq c - \sigma$ für $\sigma \geqq 0$ muss offenbar im ganzen Intervalle $0 \leqq \sigma < \infty$ die Ungleichung

$$\nu(\sigma) \leqq -\sigma$$

erfüllen.

Nunmehr kehren wir mit Hilfe der zu $w = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} z$ inversen Funktion

$$z = \frac{4}{\pi} \operatorname{Arctg} w$$

von der w-Ebene zur z-Ebene zurück.

Aus dem soeben gefundenen Resultat, nämlich, dass der Wert von $w = \psi(s)$ in einem beliebigen Punkte $s = \sigma + it$ der Halbebene $\sigma \geqq 0$ dem zu G konzentrischen Kreis G_σ: $|w| \leqq e^{-\sigma}$ angehört, folgt sofort, dass der Wert der Funktion $z = \varphi(s)$ im selben Punkte $s = \sigma + it$ in demjenigen Teilbereich Γ_σ des Parallelstreifens S liegen muss, welcher bei der konformen Abbildung $z = \frac{4}{\pi} \operatorname{Arctg} w$ der Kreisscheibe G_σ entspricht. Dieser Bereich Γ_σ ist aber ganz in dem Parallelstreifen S_σ:

$$-\frac{4}{\pi} \operatorname{Arctg} e^{-\sigma} \leqq x \leqq \frac{4}{\pi} \operatorname{Arctg} e^{-\sigma}$$

enthalten. Dies entnimmt man z. B. daraus, dass der Bereich der w-Ebene, welcher bei der Abbildung dem Parallelstreifen S_σ entspricht, dasjenige Kreisbogenzweieck mit den Ecken i und $-i$ ist, dessen Seiten durch $e^{-\sigma}$ bzw. $-e^{-\sigma}$ gehen, und daher den Kreis G_σ enthält (Fig. 1-b, 1-c).

Somit gilt in jedem Punkte $s = \sigma + it$ der Halbebene $\sigma > 0$ die Ungleichung

$$|\Re(\varphi(s))| = |H(\sigma, t)| \leqq \frac{4}{\pi} \operatorname{Arctg} e^{-\sigma},$$

womit das Lemma bewiesen ist.

Nunmehr gehen wir zum Beweise unserer Ungleichung

$$|P(t)| \leqq \frac{\pi}{2} \qquad (\text{für } -\infty < t < \infty)$$

über. Wir integrieren die obige harmonische Funktion $H(\sigma, t)$ (welche auf der Geraden $\sigma = 0$ mit $p(t)$ übereinstimmt) zweimal in bezug auf σ, und zwar bilden wir, bei beliebigem festem t, das zweifache Integral

$$H_2(t) = \int_0^\infty d\omega \int_\omega^\infty H(\sigma, t)\, d\sigma.$$

Aus der für $\sigma \geqq 0$ gültigen Ungleichung $|H(\sigma, t)| \leqq \frac{4}{\pi} \operatorname{Arctg} e^{-\sigma}$ erhalten wir sofort für jedes $\omega \geqq 0$ die Abschätzung

$$\left|\int_\omega^\infty H(\sigma, t)\, d\sigma\right| \leqq \frac{4}{\pi} \int_\omega^\infty \operatorname{Arctg} e^{-\sigma}\, d\sigma$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_{\omega}^{\infty}\left(e^{-\sigma} - \frac{e^{-3\sigma}}{3} + \frac{e^{-5\sigma}}{5} - \ldots\right) d\sigma$$

$$= \frac{4}{\pi}\left\{e^{-\omega} - \frac{e^{-3\omega}}{3^2} + \frac{e^{-5\omega}}{5^2} - \ldots\right\}$$

und hieraus weiter

$$|H_2(t)| \leqq \frac{4}{\pi}\int_0^{\infty}\left\{e^{-\omega} - \frac{e^{-3\omega}}{3^2} + \frac{e^{-5\omega}}{5^2} - \ldots\right\} d\omega$$

$$= \frac{4}{\pi}\left\{1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \ldots\right\} = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{\pi^3}{32} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Andererseits ist aber

$$H_2(t) = \int_0^{\infty} d\omega \int_{\omega}^{\infty} H(\sigma, t)\, d\sigma = \int_0^{\infty} d\omega \int_{\omega}^{\infty}\sum_1^N (\alpha_n \cos\lambda_n t + \beta_n \sin\lambda_n t)\, e^{-\lambda_n \cdot \sigma}\, d\sigma$$

$$= \sum_1^N \frac{1}{\lambda_n^2}(\alpha_n \cos\lambda_n t + \beta_n \sin\lambda_n t),$$

also, bis auf das Vorzeichen, gleich dem Integral [3])

$$P_2(t) = \int P(t)\, dt = -\sum_1^N \frac{1}{\lambda_n^2}(\alpha_n \cos\lambda_n t + \beta_n \sin\lambda_n t).$$

Somit gilt also für alle reellen t die Ungleichung

$$|P_2(t)| \leqq \frac{\pi^2}{8}.$$

Aus den beiden für alle t gültigen Ungleichungen

[3]) Der „wahre" Grund, weshalb das zweifache Integral von $H(\sigma, t)$ in bezug auf σ bis auf den Faktor -1 mit dem zweifachen Integral in bezug auf t übereinstimmt, liegt natürlich darin, dass die Funktion $H(\sigma, t)$ als harmonische Funktion der Laplaceschen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 H}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = 0$ genügt. Die Verwendung dieses schönen Kunstgriffes des zweifachen Integrierens bei harmonischen Funktionen habe ich dem Favardschen Beweise des Satzes A entnommen.

$$|P_2(t)| \leqq \frac{\pi^2}{8} \text{ und } |P_2''(t)| = |p(t)| \leqq 1$$

lässt sich aber sofort in der heute klassischen Weise eine Abschätzung für $P(t) = P_2'(t)$ herleiten und zwar erhalten wir [4])

$$|P(t)| \leqq \frac{\pi}{2} \qquad (\text{für } -\infty < t < \infty),$$

womit der Beweis zu Ende geführt ist.

§ 3. Beweis, dass die gefundene Konstante $C = \frac{\pi}{2}$ die bestmögliche ist.

Es sei $\delta > 0$ beliebig gegeben. Dann haben wir die Existenz eines trigonometrischen Polynoms

$$p(t) = \sum_{n=1}^N (\alpha_n \cos\lambda_n t + \beta_n \sin\lambda_n t),$$

mit $|p(t)| \leqq 1$ für $-\infty < t < \infty$ und $\operatorname{Min}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_N\} = 1$ zu beweisen, derart dass das Integral

$$P(t) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\lambda_n}(\alpha_n \sin\lambda_n t - \beta_n \cos\lambda_n t),$$

etwa im Punkte $t = 0$, grösser als $\frac{\pi}{2} - \delta$ ausfällt.

Dass wir nur Ob. Gr. $|p(t)| \leqq 1$ statt Ob. Gr. $|p(t)| = 1$ verlangen, geschieht ausschliesslich aus Bequemlichkeitsgründen; wenn ein $p(t)$ mit

[4]) Der Schluss ist bekanntlich einfach der folgende: Wäre $|P(t)|$ nicht überall $\leqq \frac{\pi}{2}$, etwa $P(t_0) = d > \frac{\pi}{2}$, so wäre wegen $|P'(t)| = |p(t)| \leqq 1$ gewiss $|P(t)| \geqq d - |t - t_0|$ für alle t, also speziell für $t_0 - d \leqq t \leqq t_0 + d$; somit wäre

$$P_2(t_0 + d) - P_2(t_0 - d) = \int_{t_0-d}^{t_0+d} P(t)\, dt \geqq 2\int_0^d \tau\, d\tau = d^2,$$

d. h. es wäre wenigstens eine der beiden Zahlen $P_2(t_0 - d)$ und $P_2(t_0 + d)$ dem Betrage nach $\geqq \frac{d^2}{2} > \frac{\pi^2}{8}$, im Widerspruch zu $|P_2(t)| \leqq \frac{\pi^2}{8}$ für alle t.

Ob. Gr. $|p(t)|<1$ und den sonstigen Eigenschaften existiert, dann folgt ja umsomehr die Existenz eines $p(t)$ mit Ob. Gr. $|p(t)|=1$.

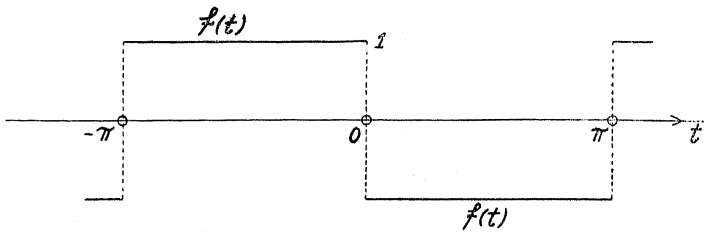

Fig. 2-a

Zur Konstruktion eines solchen Polynoms $p(t)$ gehen wir von der mit der Periode 2π periodischen, stückweise konstanten Funktion (Fig. 2-a)

$$f(t)=\begin{cases}+1 & -\pi<t<0\\ -1 & 0<t<\pi\end{cases} \quad ; f(0)=f(\pi)=0$$

aus, welche durch die konvergente Fourierreihe

$$f(t)=-\frac{4}{\pi}\left[\sin t+\frac{\sin 3t}{3}+\frac{\sin 5t}{5}+\dots\right]$$

dargestellt wird [5]). Wir bilden das Integral (Fig. 2b)

$$F(t)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{t} f(t)\,dt,$$

welches eine durchweg stetige Funktion mit der Periode 2π wird, die im Periodenintervall $-\pi\leqq t\leqq\pi$ durch

[5]) Zur Orientierung bemerken wir, obwohl im folgenden kein Gebrauch davon gemacht werden wird, dass man auf die Betrachtung dieser Funktion $f(t)$ durch den Beweis in § 2 auf natürliche Weise geführt wird. In der Tat stellt sie gerade — in passender Normierung — den Realteil der Randfunktion derjenigen mit der Periode $2\pi i$ periodischen, analytischen Funktion dar, welche die Halbebene $\sigma>0$ der s-Ebene auf den Parallelstreifen $-1<x<+1$ der z-Ebene abbildet, und zwar so, dass $\sigma=+\infty$ dem Punkte $z=0$ entspricht.

$$F(t)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}+t & -\pi\leqq t\leqq 0\\ \frac{\pi}{2}-t & 0\leqq t\leqq\pi\end{cases}$$

gegeben ist.

Diese Funktion $F(t)$ besitzt die (ebenfalls kein konstantes Glied enthaltende) konvergente Fourierreihe

$$F(t)=\frac{4}{\pi}\left[\cos t+\frac{\cos 3t}{3^2}+\frac{\cos 5t}{5^2}+\dots\right],$$

und ihr grösster Wert, das ist ihr Wert im Punkte $t=0$, ist gleich $\frac{\pi}{2}$.

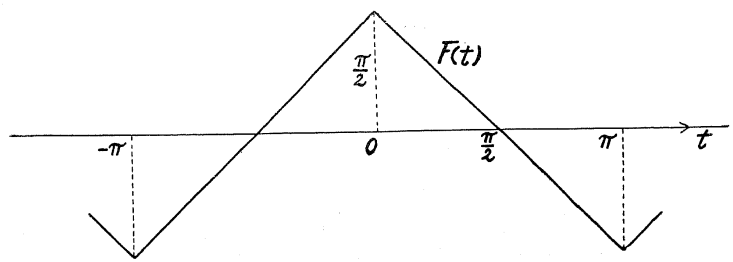

Fig. 2-b

Wäre die Funktion $f(t)$ ein trigonometrisches Polynom, so wären wir schon jetzt fertig. Es ist aber leicht, von der Funktion $f(t)$ ausgehend, ein trigonometrisches Polynom $p(t)$ der gewünschten Art zu bilden. Wir brauchen nur von den beiden Fourierreihen der Funktionen $f(t)$ bzw. $F(t)$ bei einem hinreichend grossen N die Fejérschen Mittel

$$p_N(t)=-\frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{N-1}\left(1-\frac{2\nu+1}{2N}\right)\frac{\sin(2\nu+1)t}{2\nu+1}$$

und

$$P_N(t)=\frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{N-1}\left(1-\frac{2\nu+1}{2N}\right)\frac{\cos(2\nu+1)t}{(2\nu+1)^2}$$

zu bilden.

Sie sind beide trigonometrische Polynome ohne konstantes Glied, und es ist offenbar $p_N(t)$ die Ableitung von $P_N(t)$.

Nun sind wir am Ziele, wenn wir einfach N so gross gewählt denken, dass $P_N(0) > \frac{\pi}{2} - \delta$ ist (was wegen $P_N(0) \to F(0) = \frac{\pi}{2}$ möglich ist). Dann genügt nämlich das trigonometrische Polynom $p(t) = p_N(t)$ nebst seinem Integral $P(t) = P_N(t)$ unseren Forderungen; denn es ist erstens $\operatorname{Min}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_N\} = 1$, zweitens nach einer bekannten Eigenschaft der Fejérschen Summen

$$\underset{-\infty<t<\infty}{\text{Obere Grenze}} \, |p_N(t)| \leqq \underset{-\infty<t<\infty}{\text{Obere Grenze}} \, |f(t)| = 1,$$

und drittens

$$P(0) = P_N(0) > \frac{\pi}{2} - \delta.$$

Zur Theorie der Randwertaufgaben bei hyperbolischen Gleichungen.

Von

Ch. H. Müntz

Leningrad.

1. Die gemischten linearen Randwertaufgaben werden gewöhnlich entweder durch die mehr hypothetische Heranziehung aller Eigenfunktionen des Problems erledigt, oder durch die separate Lösung zweier Grundfragen: a) des Cauchyschen Anfangswertproblems, b) der Bildung der *Greenschen Funktion* für jede einzelne Begrenzung[1]).

Noch in der 1932 erschienenen französischen Ausgabe seines klassischen Buches „Le problème de Cauchy" spricht J. Hadamard (vgl. S. 484, Z. 9 — 12) für *hyperbolische* Gleichungen von der „nécessité d'introduire, en dehors de la solution élémentaire, une fonction dépendant essentiellement de la forme de la frontière", und für parabolische Gleichungen mit veränderlichen Koeffizienten ist letzteres allein in der Literatur durchgeführt von M. Gevrey[2]).

Indessen ist es, wie Verfasser seit 1931 in einer Reihe von Vorträgen und Publikationen für verschiedene Fälle gezeigt hat[3]), überhaupt vollständlig ausreichend, für jede fragliche Gleichung (einerlei, ob von parabolischem oder hyperbolischem Typus) die Funktionallösung für das zugehörige *Cauchysche Anfangswertproblem allein* zu finden. Dies geschieht jeweilig durch die explizite Zurückführung auf eine *Volterrasche* Gleichung,

[1]) Vgl. die Ausführungen von V. Volterra in den Berichten des Internationalen Mathematikerkongresses in Strassburg (1920).

[2]) Vgl. C. R. 171 (1920), p. 839; ibd. 195 (1932), p. 690.

[3]) Vgl. insbesondere: C. R. 194 (1932), S. 1456; Matematičeskij Sbornik 39 (1932), S. 113; Math. Zschr. 38 (1934), S. 323; C. R. 198 (1934), S. 821.