Sur une fonction parfaitement discontinue et cependant partout partiellement continue

Par

W. Sierpiński

Dans le Mémoire précédent [1]) M. I. Maximoff, après avoir introduit la notion de la continuité partielle d'une fonction $f(x)$ d'une variable réelle au point x_0 [2]), a démontré, en utilisant l'hypothèse du continu, le théorème suivant:

Il existe une fonction d'une variable réelle partiellement continue en chaque point de la droite et néanmoins discontinue sur tout ensemble parfait.

Le but de cette Note est de démontrer ce théorème *sans faire appel à l'hypothèse du continu* (en utilisant seulement le théorème de M. Zermelo (Wohlordnungssatz).

Lemme. Soit

$$I_1, I_2, I_3, \ldots \qquad (I_n = \underset{x}{E}[a_n \leqslant x \leqslant b_n] \text{ pour } n = 1, 2, 3, \ldots)$$

une suite infinie formée de tous les intervalles aux extrémités rationnelles. Il existe une suite double d'ensembles parfaits deux à deux disjoints

$$P_{n,k} \; (n = 1, 2, 3, \ldots; \; k = 1, 2, 3, \ldots),$$

telle que

$$P_{n,k} \subset I_n \text{ pour } n = 1, 2, 3, \ldots; \; k = 1, 2, 3, \ldots$$

---

[1]) ce volume, p. 241 et suivantes.

[2]) La fonction $f(x)$ est dite partiellement continue au point x_0, s'il existe un ensemble parfait P ayant x_0 pour point d'accumulation de deux côtés et tel que la fonction $f(x)$ est continue au point x_0 relativement à l'ensemble P.

Démonstration. Il existe, comme on sait, une suite infinie $P_{1,k}$ $(k=1, 2, 3, \ldots)$ d'ensembles parfaits non denses disjoints et contenus dans l'intervalle I_1.

Soit maintenant n un nombre naturel donné >1 et supposons que nous avons déjà défini tous les ensembles parfaits non denses $P_{i,k}$, où $i<n$ et $k=1, 2, 3, \ldots$ Leur somme $S_n=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{\infty} P_{i,k}$ est évidemment un ensemble de première catégorie. L'ensemble I_n-S_n (en tant que complémentaire d'un ensemble de 1re catégorie), contient un sous-ensemble parfait, donc aussi une suite infinie d'ensembles disjoints parfaits non denses $P_{n,k}$ $(k=1, 2, 3, \ldots)$.

La suite double $P_{n,k}$ $(n=1, 2, 3, \ldots;\ k=1, 2, 3, \ldots)$ est ainsi définie par l'induction et on voit sans peine qu'elle satisfait aux conditions de notre lemme qui est ainsi démontré.

Soit φ le plus petit nombre ordinal de puissance $2^{\aleph_0}$. La famille de tous les ensembles linéaires parfaits étant de puissance $2^{\aleph_0}$, il existe une suite transfinie du type φ

$$(1)\qquad Q_1,\ Q_2,\ Q_3,\ \ldots,\ Q_\omega,\ Q_{\omega+1},\ \ldots,\ Q_\xi,\ \ldots,\qquad (\xi<\varphi)$$

formée de tous les ensembles linéaires parfaits.

Nous ferons maintenant par l'induction transfinie correspondre à tout nombre ordinal $\xi<\varphi$ deux suites infinies de nombres réels x_i^ξ et y_i^ξ $(i=1, 2, 3, \ldots)$ comme il suit.

Soit α un nombre ordinal donné $<\varphi$ et supposons que nous avons déjà défini toutes les suites x_i^ξ et y_i^ξ $(i=1, 2, 3, \ldots)$, où $\xi<\alpha$. L'ensemble T_α de tous les nombres x_i^ξ, où $\xi<\alpha$ et $i=1, 2, 3, \ldots$ est de puissance $\leqslant \aleph_0 . \overline{\alpha} < 2^{\aleph_0}$, puisque $\alpha<\varphi$ (Pour $\alpha=1$, on a $T_\alpha=0$). L'ensemble Q_α, en tant que parfait, étant de puissance $2^{\aleph_0}$, l'ensemble $Q_\alpha-T_\alpha$ est donc également de puissance $2^{\aleph_0}$.

Si l'ensemble $Q_\alpha-T_\alpha$ a une infinité non dénombrable de points communs avec un au moins des ensembles $P_{n,k}$ (pour n et k naturels), soit $P_{n,k}$ un d'entre eux. L'ensemble $(Q_\alpha-T_\alpha)P_{n,k}$ étant ainsi non dénombrable, nous pouvons prendre comme x_1^α un point de cet ensemble qui est son point d'accumulation, et comme x_i^α $(i=2, 3, 4, \ldots)$ une suite infinie de points de cet ensembles distincts entre eux et de x_1^α

qui converge vers x_1^α, et nous poserons $y_1^\alpha=b_k$ et $y_i^\alpha=a_k$ pour $i=2, 3, 4, \ldots$

Si les ensembles $(Q_\alpha-T_\alpha)P_{n,k}$ $(n=1, 2, 3, \ldots;\ k=1, 2, 3, \ldots)$ sont tous au plus dénombrables, l'ensemble $R_\alpha=(Q_\alpha-T_\alpha)-\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}P_{n,k}$ est évidemment non dénombrable et nous pouvons prendre comme x_1^α un point de R_α qui est un point d'accumulation de R_α, et comme x_i^α $(i=2, 3, 4, \ldots)$ une suite infinie de points de R_α distincts entre eux et de x_1^α qui converge vers x_1^α, et nous poserons $y_1^\alpha=1$ et $y_i^\alpha=0$ pour $i=2, 3, 4, \ldots$

Les nombres réels x_i^ξ et y_i^ξ, où $\xi<\varphi$ et $i=1, 2, 3, \ldots$, sont ainsi définis par l'induction transfinie, et on voit sans peine que les nombres x_i^ξ $(\xi<\varphi;\ i=1, 2, 3, \ldots)$ sont tous distincts: soit T leur ensemble.

Or, il résulte de la définition des nombres x_i^α que

$$(2)\qquad x_i^\alpha \varepsilon Q_\alpha \text{ pour } \alpha<\varphi;\ i=1, 2, 3, \ldots$$

Posons maintenant:

$$f(x_i^\xi)=y_i^\xi \text{ pour } \xi<\varphi;\ i=1, 2, 3, \ldots$$

La fonction $f(x)$ est ainsi définie sur l'ensemble T.

Posons encore pour n et k naturels

$$f(x)=a_k \text{ pour } x \varepsilon P_{n,k}-T$$

et posons $f(x)=0$ pour tous les autres x réels (c'est-à-dire pour x non $\varepsilon\, T+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}P_{n,k}$).

La fonction $f(x)$ est ainsi définie pour tous les x réels.

Soit α un nombre ordinal donné quelconque $<\varphi$.

Il résulte de la définition des nombres x_i^ξ et y_i^ξ qu'on a

$$\lim_{i=\infty} x_i^\alpha = x_1^\alpha$$

et

$$\lim_{i=\infty} f(x_i^\alpha)=\lim_{i=\infty} y_i^\alpha < y_1^\alpha = f(x_1^\alpha)$$

(puisque $a_k < b_k$ pour $k = 1, 2, 3, \ldots$, et $0 < 1$).

Ces formules prouvent, d'après (2), que la fonction $f(x)$ est discontinue sur l'ensemble Q_α. Le nombre ordinal $\alpha < \varphi$ pouvant être quelconque, et la suite (1) contenant tous les ensembles linéaires parfaits, nous concluons que la fonction $f(x)$ est discontinue sur tout ensemble parfait.

Soit maintenant x_0 un nombre réel donné quelconque. Soit r_j $(j = 1, 2, 3, \ldots)$ une suite infinie croissante de nombres rationnels qui converge vers x_0 et soit s_j $(j = 1, 2, 3, \ldots)$ une suite infinie croissante de nombres rationnels qui converge vers $f(x_0)$. Soit, pour $j = 1, 2, 3, \ldots$, $(r_j, r_{j+1}) = I_{n_j}$ et $(s_j, s_{j+1}) = I_{k_j}$. On a (d'après les coditions de notre lemme) $P_{n_j, k_j} \subset I_{n_j}$ pour $j = 1, 2, 3, \ldots$ Soit P l'ensemble qu'on obtient en ajoutant à l'ensemble $\sum_{j=1}^{\infty} P_{n_j, k_j}$ le point x_0.

Comme on voit sans peine, P sera un ensemble parfait. Je dis que la fonction $f(x)$ est continue au point x_0 relativement à l'ensemble P.

En effet, soit ε un nombre positif donné quelconque. D'après $\lim_{j=\infty} s_j = f(x_0)$ il existe un nombre naturel q, tel que

$$f(x_0) - s_q < \varepsilon. \tag{3}$$

Or, d'après la définition de la fonction $f(x)$, on a, pour $x \varepsilon P_{n,k}$, $a_k \leqslant f(x) \leqslant b_k$, donc (d'après $(s_j, s_{j+1}) = I_{k_j} = (a_{k_j}, b_{k_j})$)

$$\text{pour } x \varepsilon P_{n_j, k_j}: \; s_j = a_{k_j} \leqslant f(x) \leqslant b_{k_j} = s_{j+1} < f(x_0),$$

d'où il résulte que

$$\text{pour } x \varepsilon \sum_{j=q}^{\infty} P_{n_j, k_j}: \qquad s_q \leqslant f(x) < f(x_0),$$

ce qui donne, d'après (3):

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0), \text{ pour } x \varepsilon \sum_{j=q}^{\infty} P_{n_j, k_j}. \tag{4}$$

Or, d'après $P_{n_j, k_j} \subset I_{n_j}$ et d'après la définition de l'ensemble P, on a évidemment $P I_{n_j} = P_{n_j, k_j}$,

$$\text{donc } P . \sum_{j=q}^{\infty} P_{n_j, k_j} = P \sum_{j=q}^{\infty} I_{n_j} = P . \underset{x}{E}\left[r_q < x < x_0\right]. \quad \text{D'après}$$

(4) on a donc

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) \text{ pour } x \varepsilon P, \; r_q < x < x_0. \tag{5}$$

Nous avons ainsi démontré qu'il existe pour tout nombre positif ε un nombre $r_q < x_0$ tel qu'on a la formule (5). Cela prouve que la fonction $f(x)$ est continue au point x_0 relativement à l'ensemble parfait P.

Pareillement on peut démontrer qu'il existe un ensemble parfait P^* ayant le point x_0 comme point d'accumulation du côté droit et tel que la fonction $f(x)$ est continue au point x_0 relativement à l'ensemble P^*. La fonction $f(x)$ est donc continue au point x_0 relativement à l'ensemble parfait $P + P^*$ ayant x_0 pour point d'accumulation de deux côtés. La fonction $f(x)$ est ainsi partiellement continue au point x_0.

Le point x_0 pouvant être tout à fait arbitraire, la fonction $f(x)$ est partiellement continue en chaque point de la droite.

Notre assertion est ainsi démontrée.