Bemerken wir noch, dass n die Komponenten

$$yz'-zy'=u'\sin v-v'\sin u\cos u\cos v$$

$$zx'-xz'=-u'\cos v-v'\sin u\cos u\sin v$$

$$xy'-yx'=v'\cos^2 u$$

besitzt, so ergibt sich:

$$A=\cos(e,n) \tag{10}$$

und

$$B=\cos(e,On) \tag{11}$$

Setzt man nun die Werte (10) und (11) in die rechte Seite von (9) ein, so bekommt man die Formel:

$$P=\varepsilon\int_{(C)}\frac{\cos(e,n)}{1-\cos(e,OM)}\,ds \tag{12}$$

Um noch das Vorzeichen ε zu bestimmen, bemerken wir zunächst, dass es aus Stetigkeitsgründen von der Gestalt der Kurve (C) und der Wahl des Vektors e unabhängig ist. Wenn wir z. B. für C einen Parallelkreis der oberen Einheitskugel, für e den positiven Einheitsvektor der z Achse wählen und wenn P den Flächeninhalt der oberen Kalotte bedeutet, so ist in (12) der Zähler des Integranden stets positiv. Daher ist $\varepsilon=+1$.

Wenn die Funktionen $u(s)$, $v(s)$ nur stückweise stetig differenzierbar sind, so ist unsere Formel auch richtig. Man beweist das am einfachsten durch Abrundung der Ecken und Grenzübergang unter Beachtung der Tatsache, dass der Integrand dabei gleichmässig beschränkt bleibt. Damit ist unsere Formel (3) vollständig bewiesen.

Im Falle, wo die Kurve (C) auf einer Kugel vom Radius R liegt, ist:

$$P=R\int_{(C)}\frac{\cos(e,n)}{1-\cos(e,OM)}\,ds\,.$$

Sur les fonctions ayant la propriété de Darboux.

par

Isaie Maximoff

(Tcheboksary).

1. C'est G. Darboux qui a démontré, le premier, en 1875 dans son célèbre Mémoire *Sur les fonctions discontinues* (Ann. Ec. Norm. Sup. (2) 4, p. 109—110) la propriété suivante des dérivées exactes: une fonction dérivée (exacte) ne peut passer d'une valeur à une autre dans un segment sans prendre toutes les valeurs intermédiaires. Depuis, cette propriété a reçu le nom *de propriété de Darboux*. On sait que toute fonction continue jouit de cette propriété. Or, G. Darboux qui construisait dans le Mémoire cité des fonctions dérivées non continues, a pu montrer que cette propriété appartient aussi à quelques fonctions *discontiuues*.

En nous proposant de publier un travail sur les transformations des fonctions ayant la propriété de Darboux, nous nous plaçons dans cet article sur le terrain tout-à-fait général sans nous restreindre par les hypothèses particulières sur les fonctions considérées. Ultérieurement nous porterons notre attention exclusivement sur les fonctions de la classe 1 de la classification de Baire puisque nous avons pour but d'appliquer les résultats obtenus à l'étude des dérivées exactes.

2. *Chemin parfait.* Soit $f(x)$ une fonction quelconque définie pour toutes les valeurs de x du segment $[a,b]$. Convenons du dire que $f(x)$ possède en un point quelconque x_0 du segment $[a,b]$ *un chemin parfait* [1]), s'il existe un ensemble parfait ayant le point x_0 pour point de seconde espèce et tel que la fontion $f(x)$ est continue au point x_0 relativement

[1]) Voir p „note"

16 Prace Matem.-Fizycz. Tom 43.

à P. Cette définition subsiste encore dans le cas, où le point considéré x_0 est une extrémité du segment $[a, b]$: en ce cas il ne faut prendre en considération que la partie de l'ensemble parfait P qui est contenue dans ce segment.

Dans cet ordre d'idées nous posons la définition suivante:

une fonction $f(x)$ est dite *partiellement continue* en un point quelconque x_0, lorsqu'elle possède en ce point un chemin parfait;

une fonction $f(x)$ n'ayant aucun chemin parfait au point x_0 est appelée *totalement discontinue* en ce point.

Il est clair que toute fonction $f(x)$ d'une variable réelle est: *ou bien* partiellement continue au point x_0, *ou bien* totalement discontinue en ce point.

3. Maintenant la première question qui se présente naturellement est la suivante: toute fonction $f(x)$ d'une variable réelle a-t-elle nécessairement des points de continuité partielle? Ou bien, il existe des fonctions qui sont totalement discontinues en chaque point?

Il est aisé de voir que la question soulevée présente une grande difficulté et qu'elle est, en même temps, d'une finesse extrême se rattachant aux différents points de vue sur le sens même du mot „exister".

En effet, il est facile de s'assurer que *toutes les fonctions individuelles $f(x)$ d'une variable réelle*, connues à l'état actuel de la science, *ont toujours des points de continuité partielle* et que l'Analyse mathématique actuelle n'a pas de moyens pour dérerminer une fonction individuelle, n'ayant aucun point de continuité partielle, c'est à dire, une fonction totalement discontinue.

En 1898 René Baire dans sa Thèse *Sur les fonctions d'une variable réelle* [Annali di Matematica (3) 3 (1899)] a démontré que, quelleque soit une fonction $f(x)$ définie sur un segment $[a, b]$ et rentrant dans sa classification, et quel que soit un ensemble parfait P, il existe toujours une fonction $f_1(x)$ de la classe 0 ou 1 définie sur $[a, b]$ et telle qu'elle coïncide avec $f(x)$ en tous les points de P, à l'exception, peut-être, des points d'un certain ensemble de première catégorie par rapport à P.

La propriété découverte par Baire de toutes les fonctions de sa classification attira depuis une grande attention et, considérée *à priori*, a reçu le nom *de propriété de Baire*.

Le point capital, se rapportant à la propriété de Baire, consiste maintenant en ce que *toutes* les fonctions individuelles d'une variable réelle, connues jusqu'à présent possèdent la propriété de Baire et

que, par suite, la science actuelle ne connait aucune fonction individuelle $f(x)$ dépourvue de la propriété de Baire.

Or, en pratiquant du raisonnement de M. Zermelo on peut „démontrer" l'existence des fonctions $f(x)$ dépourvues de la propriété de Baire, sans déterminer, d'ailleurs, une telle fonction individuellement.

Pour toute personne exigeant que toute propiété *nommée* des fonctions d'une variable réelle soit réalisable par une fonction *individuelle*, pour celle-là, je dis, l'existence des fonctions dépourvues de la propriété de Baire n'est pas encore démontrée.

Au contraire, pour toute personne qui a l'habitude de pratiquer du raisonnement de M. Zermelo ou d'un raisonement tout analogue, des fonctionts sans propriété de Baire „existent".

Remarquons ici que même toutes les fonctions $f(x)$ d'une variable réelle qui n'entrent pas dans la classification de Baire et qui sont déterminées individuellement au moyen de théorèmes sur les ensembles analytiques, toutes ces fonctions ont sûrement la propriété de Baire. On peut se demander si les fonctions n'appartenant pas à la classification de Baire et définies individuellement au moyen *des ensembles projectifs* possèdent la propriété de Baire? On peut constater que cette question présente une difficulté extrême et l'Analyse mathématique contemporaine ne peut pas encore sortir du domaine des fonctions jouissant de la propriété de Baire.

5. Cette digression sur les fonctions ayant la propriété de Baire n'avait point d'autre but que d'élucider le problème sur les fonctions totalement discontinues. En effet, nous rencontrerons ici la proposition suivante dont la démonstration est immédiate:

Théorème I. — *L'ensemble de tous les points de discontinuité totale d'une fonction quelconque ayant la propriété de Baire est un ensemble toujours de première catégorie.*

Démonstration.

Supposons que $f(x)$ possède la propriété de Baire. Désignons par Ξ l'ensemble de tous les points de discontinuité totale de $f(x)$. Soit P un ensemble parfait sur lequel l'ensemble Ξ n'est pas de première catégorie. Comme $f(x)$ possède la propriété de Baire, on peut trouver une fonction $f_1(x)$ de classe 1 définie en chaque point du seg ment $[a, b]$ et telle qu'elle coïncide avec $f(x)$ en chaque point de P, à l'exception, peut-être, des points d'un ensemble $E, E < P$, de première catégorie par rapport à P. D'autre part, l'ensemble $H, H < P$, de tous les points de discontinuité de $f_1(x)$ sur P *relativement* à P est aussi de première catégorie par rapport à P. Par conséquent, l'ensemble-somme $E + N$ est aussi de première catégorie par rapport à P. Il en suit que l'ensemble Ξ n'est pas contenu dans $E + H$; donc, il existe un point ξ de l'ensemble P qui est contenu dans Ξ sans appartenir à l'ensemble $E + H$. Or, la fonction $f_1(x)$ est évidemment continue au point ξ relativement à P.

Cela posé, prenons un ensemble parfait quelconque Π contenu dans l'ensemble $P - (E + H)$ et ayant le point ξ pour point de seconde espèce *). Il est clair que la fonction $f_1(x)$ est continue en chaque point de Π relativement à Π. D'autre part, $f(x)$ est égale à $f_1(x)$ pour chaque point de Π. Il en résulte que Π est un chemin parfait pour $f(x)$ au point ξ et que, par suite, ce point n'est pas un point de discontinuité totale de $f(x)$. Or, ceci contredit à l'hypothèse faite sur le point ξ. Donc, l'ensemble Ξ est *de première catégorie par rapport à P*.

c. q. f. d.

6. C'est là un fait assez important et, peut-être, peu connu; c'est pourquoi il nous semble qu'il aurait quelque intérêt à insister un peu sur ce point capital. Tout d'abord, le question très importante se pose naturellement: *des ensembles toujours de première catégorie existent-ils réellement?* Et ensuite, s'il existe de tels ensembles individuels, *quelle est leur puissance?* On sait qu'à l'état actuel de la Science ce sont les ensembles dénombrables seuls qui sont reconnus jusqu'à présent d'être toujours de première categorie et que tous les efforts extrêmes des savants ayant pour but de déterminer d'une manière individuelle un ensemble non dénombrable et toujours de première catégorie, sont échoués. Or, si une fonction $f(x$ est donnée individuellement, l'ensemble de tous les points de *discontinuité totale* de cette fonction est *nommé*. Donc, il est facile de prévoir que l'ensemble Ξ de tous les points de discontinuité totale des fonctions de la classification de Baire, des fonctions si classiques, sera un ensemble *dénombrable*.

Théorème II. — *Si $f(x)$ rentre dans la classification de Baire, l'ensemble Ξ de tous les points de discontinuité totale de $f(x)$ est nécessairement ou bien dénombrable, ou bien fini, ou bien nul.*

*) Un point quelconque x_0 d'un ensemble parfait est dit de *seconde espèce*, si x_0 est point limite de points de P *des deux côtés à la fois*. Dans le cas contraire, x_0 est dit *de première espèce*.

Démonstration.

Supposons que $f(x)$ est une fonction quelconque rentrant dans la classification de Baire, et que ξ est un point de discontinuité totale de cette fonction $f(x)$. Je dis que, dans ces conditions, on peut trouver deux intervalles, δ et d, de manière que

1⁰ l'intervalle δ est contenu dans le segment $[a, b]$ situé sur l'axe OX et ayant le point ξ comme son extrémité;

2⁰ l'intervalle d est pris sur l'axe OY et contient le point $f(x)$;

3⁰ l'ensemble de tous les points x de l'intervalle δ pour lesquels $f(x)$ est contenu dans d est au plus dénombrable.

Pour vérifier notre affirmation nous allons nous servir du raisonnement *par impossible*: supposons qu'il n'existe pas de tels intervalles: δ et d. Cela veut dire que chaque intervalle δ contenu dans le segment $[a, b]$ et ayant le point ξ pour son extrémité contient une infinité *non dénombrable* de points x donnant lieu à l'inégalité

$$|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon,$$

ε étant un nombre quelconque positif, fixé d'avance.

Ceci étant, prenons, sur le segment $[a, b]$, les intervalles

$$\delta_n' = \left(\xi - \frac{1}{n}, \xi\right) \text{ et } \delta_n'' = \left(\xi, \xi + \frac{1}{n}\right),$$

où n est un entier positif quelconque. Chacun de ces intervalles doit contenir une infinité non dénombrable de points x satisfaisant à l'inégalité

$$|f(\xi) - f(x)| < \frac{1}{n}. \tag{1}$$

Si ξ est, par hasard, l'une des extrémités du segment $[a, b]$, il s'agit alors, bien entendu, seulement de l'un des intervalles δ_n' et δ_n'': dans le cas, où $\xi = a$, c'est de l'intervalle δ_n'' et dans le cas, où $\xi = b$, c'est de l'intervalle δ_n'. Conformément à cela, désignons par H_n' l'ensemble de tous les points x de l'intervalle δ_n' vérifiant l'inégalité (1), et, d'une manière analogue, par H_n'' l'ensemble de tous les points x de l'intervalle δ_n'' satisfaisant à la même inégalité. Il est clair que chacun des ensembles H_n' et H_n'', quelque soit l'entier positif n, est un ensemble *non dénombrable*.

Or, d'autre part, la fonction considérée $f(x)$ rentre dans la classification de Baire; par suite, chacun des ensembles H_n' et H_n'' est nécessairement *mesurable B.* D'après le théorème connu de M M. Hausdorf-Alexandroff tout ensemble non dénombrable et mesurable B contient toujours un ensemble parfait. Donc, il existe deux ensembles parfaits non denses, π_n' et π_n'', tels que π_n' est contenu dans H_n' en π_n'' est contenu dans H_n''.

Cela posé, désignons par P l'ensemble formé du point ξ es des points de tous les ensembles π_n' et π_n'' $(n=1, 2, 3, \ldots)$:

$$P=\xi+(\pi_1'+\pi_1'')+(\pi_2'+\pi_2'')+\ldots+(\pi_n'+\pi_n'')+\ldots$$

Il est clair que l'ensemble P ainsi défini est un ensemble parfait non dense et que la fonction considérée $f(x)$ est continue sur P au point ξ *relativement à* P.

Ainsi, P est *un chemin parfait* au point ξ pour la fonction $f(x)$ et, par suite, ξ n'est pas un point de discontinuité totale de $f(x)$.

Une conséquence immédiate du raisonnement précédent est la suivante: si ξ est un point quelconque de discontinuité totale de la fonction $f(x)$, on peut toujours trouver un intervalle δ, ayant le point ξ pour son extrémité et contenu dans le segment $[a, b]$, et un nombre positif ε tel que l'ensemble de tous les points de l'intervalle δ, vérifiant les inégalités

$$f(\xi)-\varepsilon<f(x)<f(\xi)+\varepsilon,$$

est au plus *dénombrable*. Ceci étant établi, désignons par Ξ l'ensemble de tous les points de discontinuité totale de la fonction $f(x)$ dans le segment $[a, b]$.

Maintenant nous revenons à notre théorème. Pour le démontrer *par impossible*, admettons que l'ensemble Ξ est un ensemble *non dénombrable.*. Nous avons vu qu'on peut faire correspondre à chaque point ξ de cet ensemble un intervalle δ et un nombre positif ε tels qu'on aura vérifiées les trois propriétés 1^0, 2^0 et 3^0 indiquées précédemment. Sans restreindre la généralité du raisonnement, on peut supposer que la longueur de l'intervalle δ est égale à $^1/_p$ et que ε est égal à $^1/_q$, p et q étant des entiers positifs quelconques.

Ainsi, on peut faire correspondre à chaque point ξ de l'ensemble Ξ un couple (p, q) d'entiers positifs p et q. Or, l'ensemble de tous les couples (p, q) est dénombrable, tandis que l'ensemble Ξ est non dénombrable. Il en résulte que l'ensemble Ξ_1 de tous les points ξ de l'ensemble Ξ auxquels correspond *un même* couple (p, q) bien choisi est non dénombrable.

Ce résultat étant acquis, nous allons considérer l'ensemble Q de toutes les valeurs de $f(x)$ pour les points x de l'ensemble Ξ_1. On doit distinguer ici les deux cas suivants:

Premier cas: l'ensemble Q est *au plus dénombrable.* Dans ce cas l'ensemble Ξ_1 contient un ensemble non dénombrable Ξ_2 tel qu'en chaque point de cet ensemble la fonction $f(x)$ a une et une seule valeur. D'autre part, l'ensemble Ξ_2 est non dénombrable et, par suite, il contient un point ξ_0 tel que chaque intervalle δ, ayant pour extrémité ce point, contient une infinité non dénombrable de points de l'ensemble Ξ_2. Cn en déduit que l'intervalle δ contient une infinité non dénombrale de points x donnant lieu à l'inégalité (1). Nous aboutissons à une contradiction, puisque ξ appartient à Ξ.

Second cas: l'ensemble Q est *non dénombrable.* Dans ce cas, Q contient au moins un point η_0 tel que la partie de Q contenue dans chaque intervalle d, ayant pour extrémité η_0, est non dénombrable. Maintenant nous supposons que l'intervalle d est de longueur inférieure à $^1/_q$, et désignons par Ξ_2 l'ensemble de tous les points x de Ξ_1 pour lesquels $f(x)$ appartient à l'intervalle d. Il est évident que l'ensemble Ξ_2 est non dénombrable, par suite, il contient un point ξ_0 tel que chaque intervalle ayant pour une extrémité le point ξ_0 contient une infinité non dénombrable de points de l'ensembles Ξ_2. *Il en suit* que l'intervalle δ contient une infinité non dénombrable de points donnant lieu à l'inégalité (1). Or, en raison des propriétés de l'ensemble Ξ_1 c'est impossible.

Donc, en supposant que l'ensemble Ξ de tous les points de discontinuité totale de la fonction $f(x)$ est non dénombrable, nous aboutissons à une contradiction qui achève la démonstration de notre théorème.

7. Ainsi, si la fonction $f(x)$ rentre dans la classification de Baire, pour tous les points du segment $[a, b]$, à l'exception, peut-être, d'une infinité dénombrable de points de ce segment, on peut trouver un ensemble parfait P, ayant le point x_0 pour point de seconde espèce et tel que $f(x)$ est continue *au poiut* x_0 relativement à P. Il est aisé de voir qu'on peut préciser davantage cette proposition en lui donnant la forme suivante:

Théorème II'. — *Si une fonction $f(x)$, définie pour chaque point du segment $[a, b]$ rentre dans la classification de Baire, alors pour tous les points du segment $[a, b]$, à l'exception, peut-être, d'une infinité dénombrable de points, il existe un ensemble parfait P, ayant x_0 pour point de seconde espèce et tel que $f(x)$ est partout continue sur P relativement à P.*

Démonstration.

D'après le théorème précédent chaque point du segment $[a, b]$, à l'exception, peut-être, d'une infinité dénombrable de points de ce segment, est un point de seconde espèce d'un ensemble parfait P sur lequel $f(x)$ est continue *au point* x_0 relativement à P. On ne restreint pas la généralité du raisonement, si l'on suppose que l'ensemble parfait P est partout *non dense* dans $[a, b]$. Cette hypothèse nous permet de représenter l'ensemble P comme somme de l'ensemble $\{x_0\}$ (composé d'un seul point x_0) et des ensembles parfaits non denses

$$P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n, \ldots$$

contenus dans le segment $[a, b]$ et sans points communs deux à deux; nous supposons que chaque ensemble P_{2k+1} est à gauche de x_0 et chaque ensemble P_{2k} est à droite de x_0 et que, d'ailleurs, chaque P_{2k+3} est à droite de P_{2k+1} et chaque P_{2k} est à droite de P_{2k+2}. Ceci suppose que x_0 est un point de l'intervalle (a, b). Si x_0 est l'une des extrémités du segment $[a, b]$, on doit prendre naturellement tous les ensembles P_n d'un côté du point x_0. Comme $f(x)$ rentre dans la classification de Baire, elle possède la propriété de Baire. Cela veut dire que, quelque soit un entier n, il existe une fonction $f_n(x)$ de classe I qui coïncide avec $f(x)$ pour tous les points de l'ensemble parfait P_n, à l'exception, peut-être, des points d'un certain ensemble H_n qui est de première catégorie par rapport à P_n.

D'autre part, $f_n(x)$ est continue relativement à P_n en tous les points de cet ensemble à l'exception des points d'un ensemble E_n du type F_σ et de première catégorie par rapport à P_n. Comme l'ensemble — somme $H_n + E_n$ est de première catégorie par rapport à P_n, on peut toujours trouver un ensemble parfait π_n faisant partie de P_n et n'ayant aucun point commun avec l'esemble $H_n + E_n$. Par définition même de la fonction $f_n(x)$, on a: $f_n(x) = f(x)$ pour chaque point x de l'ensemble P_n, si ce point n'est pas contenu dans $H_n + E_n$. En tenant compte de ce fait que $f_n(x)$ est continue sur P_n relativement à P_n partout en dehors de E_n, on arrive au résultat suivant: $f(x)$ est *continue sur* π_n relativement à π_n. À l'aide des ensembles π_n, nous formons l'ensemble π, en le définissant par la formule suivante:

$$\pi = \xi + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \ldots + \pi_n + \ldots$$

En considérant l'ensemble π, on peut constater que: 1^0 π est un ensem

ble parfait non dense ayant le point x_0 pour point de séconde espèce 2^0 $f(x)$ est continue *en chaque point* de l'ensemble π relativement à π c. q. f. d.

8. *Exemples négatifs.* De ce qui précède il suit que si une fonction $f(x)$ rentre dans la classification de Baire, cette fonction est partiellement continue en tous les points à l'exception des points d'un ensemble dénombrable. Nous sommes conduits à nous demander si la condition du théoréme II', nécessaire pour qu'une fonction rentre dans la classification de Baire, est en même temps *suffisante*? Nous verrons que la réponse sera négative et qu'il existe en réalité une fonction — individu $f(x)$

1^0 qui possède un chemin parfait π en *chaque* point x_0 du segment $[a, b]$; 2^0 qui est continue partout sur π relativement à π et 3^0 qui néanmoins ne rentre pas dans la classification de Baire.

Démonstration.

Soit E un ensemble analytique quelconque non mesurabie B qui est contenu dans le segment $[a, b]$ et qui est partout non dénombrable dans ce segment. Nous supposons que E est un ensemble de première catégorie par raport à $[a, b]$. On peut affirmer dans ces conditions que la fonction caractéristique de E, définie sur le segment $[a, b]$, égale à 1 pour les points de E et égale à 0 partout en dehors de E, satisfait à la condition du théorème II' et cependant ne rentre pas dans la classification de Baire.

En effet, soit x_0 un point quelconque du segment $[a, b]$. Si $f(x_0) = 1$, x_0 appartient à l'ensemble E. Maintenant nous construisons sur le segment $[a, b]$ une suite

$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots \sigma_n, \ldots$$

de segments sans points communs deux à deux de telle manière que

1^0. $\lim_{n=\infty} \sigma_n = x_0$;

2^0. chaque segment σ_{2k+1} est à gauche de x_0 et chaque segment σ_{2k} est à droite de x_0, chaque σ_{2k+3} étant à droite de σ_{2k+1} et chaque σ_{2k} étant à droite de σ_{2k+2}. D'après le théorème remarquable de Souslin chaque ensemble analytique et non dénombrable contient un ensemble parfait. Ce théoréme nous permet de choisir dans le segment σ_n un ensemble parfait π_n qui fait partie de l'ensemble E. À l'aide des ensembles π_n nous formons l'ensemble parfait P,

$$P = x_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \ldots + \pi_n + \ldots,$$

pour chaque point duquel on a: $f(x) = 1$ et qui a le point x_0 pour point de seconde espèce.

Maintenant supposons que x_0 n'appartient pas à l'ensemble E. Dans ce cas $f(x) = 0$. Comme l'ensemble E est de première catégorie par rapport au segment $[a, b]$, on peut toujours trouver, dans l'ensemble complémentaire CE, un ensemble parfait P, ayant le point x_0 pour point de seconde espèce. Il est clair que pour chaque point de l'ensemble P on a: $f(x) = 0$, et néanmoins $f(x)$ ne rentre pas dans la classification de Baire. c. q. f. d.

9. Nous avons vu que le théorème II′ est vrai et que, malheureusement, la proposition inverse n'a pas lieu. Le problème qu'il s'agit actuellement de résoudre est le suivant: étant donnée une fonction quelconque partiellement continue en chaque point x_0 du segment, peut-on affirmer qu'elle possède en chaque point x_0 du segment $[a, b]$ un chemin parfait π, ayant la propriété suivante: $f(x)$ est continue partout sur π relativement à π. Nous obtenons une réponse encore négative à cette question en nous appuyant sur l'hypothèse du continu: *Si la puissance du continu est égale à aleph-un, il existe une fonction $f(x)$ partiellement continue en chaque point du segment $[a, b]$ et néanmoins discontinue sur tout ensemble parfait.*

Démonstration.

Désignons par Q un ensemble quelconque partout dense et partout non dénombrable sur le segment $[A \leqq y \leqq B]$ et qui ne contient aucun ensemble parfait. Nous répresentons cet ensemble sous la forme d'une somme

(2) $$Q = Q_0 + Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_\omega + \ldots Q_\alpha + \ldots |\Omega$$

d'ensembles partout denses et partout non dénomcrables sur le segment $[A \leqq y \leqq B]$ et, d'ailleurs, sans points communs deux à deux. Comme on a l'égalité

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

on peut ranger tous les points du segment $[a \leqq x \leqq b]$ en suite transfinie

(3) $$x_0, x_1, x_2, \ldots x_\omega, \ldots x_\alpha, \ldots |\Omega$$

D'une manière analogue nous rangeons *tous* les ensembles parfaits *non denses* π, contenus dans le segment $[a \leqq x \leqq b]$, en suite tranfinie:

(4) $$\pi_0, \pi_1, \pi_2, \ldots \pi_\omega, \ldots \pi_\alpha, \ldots |\Omega$$

Maintenant nous procédons de la manière suivante. Prenons le point x_0 et cherchons, dans la suite (4), le premier ensemble $x_{\beta 0}$ qui a le point x_0 pour point de seconde espèce. Soit $\varphi_0(x)$ une fonction quelconque définie sur l'ensemble $\pi_{\beta 0}$, continue au point x_0 et telle qu'elle fait correspondre à chaque point de Q_0 un et un seul point de $\pi_{\beta 0}$, et *vice versa*. Il est évident qu'il existe de telles fonctions $\varphi_0(x)$. Ainsi nous faisons correspondre l'un à l'autre 1) le point x_0, 2) l'ensemble parfait $\pi_{\beta 0}$, 3) la fonction $\varphi_0(x)$ et 4) l'ensemble Q_0. En continuant ce procédé nous obtenons quatre suites dénombrables

$$(T)\begin{cases} x_0, x_1, x_2, \ldots x_\omega, \ldots x_\gamma, \ldots |\alpha \\ \pi_{\beta 0}, \pi_{\beta 1}, \pi_{\beta 2}, \ldots \pi_{\beta\omega}, \ldots \pi_{\beta\gamma}, \ldots |\alpha \\ \varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots \varphi_\omega(x), \ldots \varphi_\gamma(x) \ldots |\alpha \\ Q_0, Q_1, Q_2, \ldots Q_\omega, \ldots Q_\gamma, \ldots |\alpha \end{cases}$$

Ce tableau fait correspondre à chaque point x_γ, où $\gamma > \alpha$, un ensemble parfait π_{β_γ}, une fonction $\varphi_\gamma(x)$ et un ensemble Q_γ, où:

a) π_{β_γ} a le point x_γ pour point de seconde espèce et n'a aucun point commun avec les ensembles précédents $\pi_{\beta_{\gamma'}}$, $\gamma' < \gamma$;

b) la fonction $\varphi_\gamma(x)$, continue au point x_γ relativement à π_{β_γ}, établit une correspondance univoque et réciproque entre tous les points de l'ensemble Q_γ d'une part et tous les points de l'ensemble π_{β_γ} d'autre part, à l'exception, peut-être, du point x_γ lui-même. Ici nous supposons que

$$\beta_{\gamma'} < \beta_\gamma, \text{ si } \gamma' < \gamma.$$

Montrons que ce procédé peut être étendu sur l'indice α lui-même.

Tout d'abord, dans ce but il est à remarquer que l'ensemble

$$\sigma_\alpha = \pi_{\beta_0} + \pi_{\beta_1} + \pi_{\beta_2} + \ldots + \pi_{\beta_\omega} + \ldots + \pi_{\beta_\gamma} + \ldots |\alpha$$

est de première catégorie sur le segment $[a \leqq x \leqq b]$. On en déduit qu'on peut toujours trouver une infinité non dénombrable d'ensembles parfaits non denses π ayant le point x_α pour point de seconde espèce et n'ayant aucun point commun avec l'ensemble σ_α. Soit π_{β_α} le premier de ces ensembles dans la suite (4) dont l'indice β_α est supérieur a tous les indices β_γ, $\gamma < \sigma$.

Après avoir déterminé l'ensemble π_{β_α}, nous construisons sans peine une fonction $\varphi_\alpha(x)$ qui est continue au point x_α relativement à π_{β_α} et qui établit une correspondance univoque et réciproque entre tous les points de l'ensemble Q_α d'une part et tous les points de l'ensemble π_{β_α} d'autre part, à l'exception, peut-être, du point x_α lui-même qui peut appartenir à l'ensemble σ_α et, par suite, dans ce cas la valeur de la fonction $\varphi_\alpha(x)$ au point x_α ne fait pas partie de l'ensemble Q_α.

Donc, notre procédé peut être étendu sans rencontrer aucun obstacle sur tous les entiers positifs et les nombres transfinis de seconde classe de Cantor

$$(5)\quad \begin{cases} x_0,\ x_1,\ x_2, \dots x_\omega, \dots x_\alpha, \dots \mid \Omega \\ \pi_{\beta_0},\ \pi_{\beta_1},\ \pi_{\beta_2}, \dots \pi_{\beta_\omega}, \dots, \pi_{\beta_\alpha}, \dots \mid \Omega \\ \varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x), \dots \varphi_\omega(x), \dots \varphi_\alpha(x), \dots \mid \Omega \\ Q_0,\ Q_1,\ Q_2, \dots Q_\omega, \dots Q_\alpha, \dots \mid \Omega \end{cases}$$

À l'aide des fonctions $\varphi_\alpha(x)$ ($\alpha = 0, 1, 2, \dots \omega, \dots \beta, \dots \mid \Omega$) on peut déterminer une fonction $f(x)$ d'une variable réelle définie sur le segment $a \leqq x \leqq b]$. En effet, prenons un point quelconque x du segment $[a \leqq x \leqq b]$ et soit

$$x = x_{\alpha_0}, \text{ où } 0 \leqq \alpha_0 < \Omega.$$

Je dis que le point x figure au plus dans *deux* termes de la seconde suite du tableau (5). En effet, si x figure dans un π_{β_γ}, $\gamma \leqq \alpha_0$, ce point x figure évidemment aussi dans

$$\sigma_{\beta_\gamma+1}.$$

Alors, d'après la définition même des ensembles π_{β_α} de la seconde des suites (5), le point x *peut* figurer dans un seul terme de la seconde suite du tableau (5) différent de π_{β_γ} et si ce fait réellement a lieu, ceci ne peur être que dans le cas où ce terme est $\pi_{\beta_{\alpha_0}}$ et où nous avons:

$\alpha_0 > \gamma$. On déduit de ce qui précéde que si le point x figure dans deux termes différents de la seconde suite du tableau (5), π_{β_γ} et π_{α_0}, d'après la définition même des fonctions $\varphi_\alpha(x)$ de la troisième suite du tableau (5), nous avons nécessairement

$$\varphi_\gamma(x) = \varphi_{\alpha_0}(x).$$

Cela nous permet de déterminer à l'aide des fonctions de la troisième suite du tableau (5) une fonction uniforme $f(x)$ d'une variable réelle. Je dis que $f(x)$ est la fonction cherchée. En effet, si x^0 est un point quelconque du segment $[a \leqq x \leqq b]$, on peut poser: $x^0 = x_\alpha$. Pour chaque point x de l'ensemble π_{β_α}, dont le point x^0 est sûrement un point de seconde espèce (si $x^0 = a$, ou si $x^0 = b$, x^0 est une extrémité de π_{β_α}), nous avons l'égalité:

$$f(x) = \varphi_\alpha(x)$$

et, par suite, $f(x)$ est continue sur le chemin parfait π_{β_α} au point x^0 relativement à π_{β_α}.

D'autre part, la fonction $f(x)$ n'est continue sur aucun ensemble parfait P relativement à P. Pour s'en assurer, admettons le contraire: il existe un ensemble parfait P sur lequel $f(x)$ est continue relativement à P. Alors l'ensemble E de toutes les valeurs de la fonction $f(x)$ sur P est *fermé* et *non dénombrable*, puisque, d'après la définition même de la fonction $f(x)$, nous avons

$$f(x') \neq f(x''), \text{ si } x' \neq x''.$$

Donc, l'ensemble E contient nécessairement un ensemble parfait. Or, l'ensemble E est contenu dans Q, $E < Q$. Nous aboutissons à une contradiction, puisque, d'après l'hypothèse, l'ensemble Q ne contient aucun ensemble parfait. Donc, $f(x)$ a au moins un point de discontinuité sur tout ensemble parfait. c. q. f. d.

10. Il est très utile d'étudier la famille des fonctions jouissant de la propriété suivante: quelque soit un nombre positif ε, il existe pour chaque point x_0 un ensemble parfait P_0 ayant le point x_0 pour point de seconde espèce [si x_0 est une extrémité du segment $[a, b]$, P_0 a aussi le point x_0 pour son point extrême] et sur lequel $f(x)$ est continue à ε près au point x_0 relativement à P_0. La question qui se pose est alors la suivante: cette fonction est-elle partiellement continue en tout

point, ou non? La réponse est affirmative et en quelque sorte banale. En effet, prenons un nombre entier quelconque n et un ensemble parfait P_n ayant le point x_0 pour son point de seconde espèce et tel que l'oscillation de $f(x)$ au point x_0 relativement à P_n soit inferieure à $^1/_n$.

Prenons un intervalle δ_n qui jouit des propriétés suivantes:

1⁰ les extrémités de δ_n nappartiennent pas à l'ensemble P_n;

2⁰ le point x_0 est contenu dans δ_n;

3⁰ l'oscillation de $f(x)$ dans la partie de P_n contenue dans δ_n est inférieure au nombre $^1/_n$. Désignons par π_n la partie de P_n contenue dans δ_n. Il est évident que π_n est un ensemble parfait, et on peut toujours supposer que π_n est de diamètre inférieur à $^1/_n$. Ceci étant posé prenons l'ensemble parfait π_{n_1} $(n_1 = 1)$ et un intervalle ϑ_1 qui jouit des propriétés suivantes:

a) ϑ_1 contient le point x_0;

b) les extrémités de ϑ_1 n'appartiennent pas à π_{n_1};

c) l'ensemble π_{n_1} a au moins un point qui n'appartient pas à ϑ_1

En retranchant de l'ensemble π_{n_1} sa partie contenue dans ϑ_1 nous obtenons un ensemble parfait que nous désignons par π'_{n_1}.

Ceci étant, prenons un entier n_2, $n_2 > n_1$, suffisamment grand pour que l'ensemble π_{n_2} soit contenu dans ϑ_1 et un intervalle ϑ_2 qui jouit des propriétés suivantes:

a) le point x_0 est contenu dans ϑ_2;

b) les extrémités de ϑ_2 n'appartiennent pas à l'ensemble π_{n_2};

c) l'ensemble π_{n_2} contient au moins un point n'appartenant pas à l'intervalle ϑ_2.

En retranchant de l'ensemble π_{n_2} sa partie contenue dans ϑ_2 nous obtenons un ensemble parfait que nous désignons par π'_{n_2}. En opérant d'une manière analogue, nous obtenons un ensemble parfait π_{n_3}, et *ains de suite.*

En continuant ce procédé indéfiniment, nous obtenons une suite d'ensembles parfaits

$$\pi'_{n_1}, \pi'_{n_2}, \pi'_{n_3}, \ldots$$

Il est facile de voir que l'ensemble

$$\pi' = x_0 + \pi'_{n_1} + \pi'_{n_2} + \pi'_{n_3} + \ldots$$

est un ensemble parfait et que $f(x)$ est continue au point x_0 relativement à π.

c. q. f. d.

11. Maintenant revenons au théorème I. Nous devons indiquer ici que, pour ce théorème, il y a une proposition *en quelque sorte inverse*

dont l'énoncé est le suivant: on peut indiquer, pour chaque ensemble donné E qui est toujours de première catégorie, une fonction $f(x)$ ayant la propriété de Baire dont l'ensemble de tous les points de discontinuité totale coïncide précisement avec l'ensemble E.

En effet, si l'ensemble E est au plus dénombrable, on peut toujours construire une fonction croissante $f(x)$ qui est discontinue en chaque point de l'ensemble E et continue en chaque point de l'ensemble complémentaire CE (W. Sierpiński). Dans ce but, nous prenons une suite

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots \xi_n, \ldots$$

de tous les points de l'ensemble E et désignons par $\varphi_n(x)$ la fonction qui est égale à 0 pour $x < \xi_n$ et égale à ε_n, $\varepsilon_n < 0$, pour $x > \xi_n$. Si nous supposons que la série

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \ldots + \varepsilon_n + \ldots$$

est convergente, $f(x)$ est une fonction cherchée.

Maintenant nous passons au second cas où l'ensemble E est non dénombrable. Soit P l'ensemble de tous les points de condensation de Lindelöf de l'ensemble E. On sait que P est un ensemble parfait.

Prenons la suite

$$\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots \delta_n \ldots$$

de tous les intervalles contigus à P. Comme chaque intervalle δ_n contient au plus une infinité non dénombrable de points de E, on peut construire une fonction à variation bornée $\varphi_n(x)$ qui est définie pour chaque point de l'intervalle δ_n et qui jouit des propriétés suivantes: 1⁰ pour chaque point x de l'intervalle δ_n on a:

$$0 \leqq \varphi_n(x) < {}^1/_n;$$

2⁰ $\varphi_n(x)$ est continue et est égale à 0 aux extrémités de l'intervalle δ_n

3⁰ l'ensemble de tous les points de discontinuité de $\varphi_n(x)$ sur δ_n est identique à la partie de l'ensemble E comprise dans δ_n. Enfin, désignons par $\varphi(x)$ la fonction qui est égale à 1 en chaque point de E appartenant à P et égale à 0 en chaque autre point. Il est évident que la fonction $f(x)$ déterminée par l'égalité:

$$f(x) = \varphi(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots + \varphi_n(x) + \ldots$$

possède la propriété de Baire et que l'ensemble de tous les points de discontinuité totale de cette fonction est identique à l'ensemble E.

12. *Fonctions absolument mesurables.* Nous allons considérer une nouvelle famille de fonctions dites *absolument mesurables.*. J'exposerai quelques résultats de la théorie de ces fonctions. Je prendrai comme guide, dans les énoncés et dans les démonstrations, l'analogie avec la théorie des fonctions ayant la propriété de Baire.

On appelle *absolument mesurable* toute fonction $f(x)$, définie pour chaque point du segment $[a, b]$ et telle que la fonction composée

$$f[\varphi(x)]$$

est mesurable, quelle que soit la fonction $\varphi(x)$ continue et essentiellement croissante. L'intérêt de la théorie des fonctions absolument mesurables tient précisement à ce qu'on peut démontrer d'une manière irréprochable la proposition suivante: *quel que soit un ensemble parfait P, on peut trouver pour toute fonction absolument mesurable $f(x)$ un sous-ensemble parfait π de P, sur lequel $f(x)$ est continue relativement à π* [*].

Cette propriété des fonctions absolument mesurables est en quelque sorte analogue à la propriété de Baire. Pour éclaircir et préciser cette analogie, nous faisons les remarques suivantes. Toute fonction mesurable $f(x)$ définie sur le segment $[a, b]$ est continue sur un certain ensemble parfait Q dont la mesure est aussi approchée de $b-a$ que l'on veut. Il en suit que tout ensemble parfait P de mesure >0 contient un ensemble parfait π, $\pi < P$, sur lequel une fonction mesurable donnée $f(x)$ est continue relativement à π. Comme chaque ensemble parfait P peut être transformé au moyen d'une fonction continue et essentiellement croisante $\varphi(x)$ en un autre ensemble parfait dont la mesure est *positive*, la proposition à démontrer est évidente.

Les fonctions absolument mesurables n'ont pas de relations directes et simples avec les fonctions ayant la propriété de Baire.

En effet, *il existe des fonctions ayant la propriété de Baire qui ne sont pas absolument mesurables et, réciproquement, il existe des fonctions absolument mesurables qui ne possèdent pas la propriété de Baire.*

Pour construire une fonction du premier type, prenons un ensemble E non mesurable au sens de M. Lebesgue et toujours de premiè-

[*] Cette propriété a été introduite par M. Sierpiński dans sa Note récente „Sur un problème de M. Ruziewicz, concernant les fonctions jouissant de la propriété de Baire", Fund. Math. **XXIV** (1935), pp. 12—16. Cf. aussi E. Szpilrajn „Sur une classe de fonctions de M. Sierpiński" l. c. pp. 17—34.

[1] N. Lusin. *Fund. Math.* t. IX, pp. 116—118; S. Saks, *Fund. Math.* t. XI, p. 277. Cf. aussi W. Sierpiński. *Hypothèse du continu* (Monografje Matemnatyczne t. IV, Warszawa 1934), p. 89.

re catégorie. C'est M. N. Lusin qui a construit de tels ensembles [1]. La fonction caractéristique $f(x)$ de cet ensemble E jouit évidemment de la propriété de Baire et n'est nullement absolument mesurable, puisqu'elle n'est pas une fonction mesurable.

Pour construire une fonction du second type, nous prenons, en nous appuyant sur l'hypothèse du continu, dans le segment $[a, b]$ un ensemble non dénombrable E qui est *dénombrable* dans chaque ensemble parfait *non dense* P. Il est évidement que la propriété de l'ensemble E d'être dénombrable dans chaque ensemble parfait non dense est invariante par rapport à toute transformation monotone du segment $[a, b]$, réalisée au moyen d'une fonction continue et croisante $y = \varphi(x)$. Il s'ensuit que la fonction caractéristique $f(x)$ pour l'ensemble E est absolument mesurable et cependant elle est privée de la propriété de Baire, puisque ni l'ensemble E, ni son complémentaire CE ne sont de première categorie dans $[a, b]$.

Nous compléterons ce résultat par la proposition suivante:

Théorème III. — *L'ensemble de tous les points de discontinuité totale de toute fonction absolument mesurable ne peut contenir aucun ensemble parfait.*

Démonstration.

Pour démontrer notre théorème admettons que l'ensemble Ξ de tous les points de discontinuité totale d'une fonction absolument mesurable $f(x)$ contient un ensemble parfait P. Alors on peut trouver un ensemble parfait π contenu dans P et tel que $f(x)$ est continue sur π relativement à π. Cela veut dire que chaque point x_0 de seconde espèce de l'ensemble π n'est pas un point de discontinuité totale de $f(x)$, c'est ce qui contredit à l'hypothèse faite. c. q. f. d.

13. Le problème sur *la nature* de l'ensemble de tous les points de discontinuité totale des fonctions d'une variable réelle présente, il me semble, de grandes difficultés, et nous ne savons pas résoudre cette question: existe-t-il une fonction $f(x)$ convenablement choisie et ayant un ensemble donné à l'avance E pour ensemble de tous les points de discontinuité?

C'est la raison pour laquelle nous nous contenterons de démontrer la proposition suivante:

il existe une fonction $f(x)$ d'une variable réelle ayant chaque point du segment $[a, b]$ pour point de discontinuité totale.

Démonstration.

Prenons des ensembles E et $\mathcal{E}$ tels que:

1^0 la somme de ces ensembles est égale au segment $[a, b]$ et leur produit est nul;

2^0 il n'y a aucun ensemble parfait contenu entièrement ni dans E, ni dans $\mathcal{E}$.

C'est M. W. Sierpiński qui a construit des ensembles pareils.

Soit $f(x)$ la fonction caractéristique de l'ensemble E, c'est à dire, telle que $f(x)=1$ pour chaque point x de E et $f(x)=0$ pour chaque point x de $\mathcal{E}$. Je dis que chaque point x_0 du segment $[a, b]$ est un point de discontinuité totale de la fonction $f(x)$.

Pour le démontrer supposons que $f(x)$ admet un point x_0 de continuité partielle. Cela veut dire qu'il existe un ensemble parfait P contenant le point x_0 et tel que $f(x)$ est continue au point x_0 (d'un côté, si x_0 est l'extrémité du segment $[a, b]$).

Maintenant prenons une partie π de l'ensemble P qui contient le point x_0 et qui est contenue dans un intervalle dont les extrémités n'appartiennent pas à l'ensemble P. Si le diamètre de l'ensemble π est suffisamment petit, $f(x)$ est constante sur π. Comme l'ensemble π doit contenir des points de chacun des ensembles E et $\mathcal{E}$, nous arrivons à une contradiction. c. q. f. d.

14. *Propriété de Darboux.* Après avoir étudié les propriétés des points de continuité partielle et de discontinuité totale de fonctions diverses, nous passons à la considération des fonctions de Darboux. Nous allons démontrer ici la proposition fondamentale suivante:

Théorème III. — *Si une fonction quelconque rentrant dans la classification de Baire possède la propriété de Darboux, elle n'a aucun point de de discontinuité totale.*

Démonstration.

Tout d'abord rappelons la démonstration du théorème II (voyez n^0 6). Nous y avons établi que, si une fonction $f(x)$ rentre dans la classification de Baire et si ξ est un point quelconque de discontinuiré totale de $f(x)$, on peut trouver un intervalle δ qui jouit des propriétés suivantes:

1^0 ξ est une extrémité de δ;

2^0 ε étant un nombre positif quelconque suffisamment petit, il existe, dans l'intervalle δ, au plus une infinité dénombrable de points donnant lieu à l'inégalité:

$$|f(x)-f(\xi)|<\varepsilon$$

Il en suit qu'il existe un point ξ', $\xi' \neq \xi$, de l'intervalle δ tel que

$$|f(\xi')-f(\xi)|>\varepsilon,$$

et, par suite,

$$f(\xi') \neq f(\xi).$$

Comme notre fonction $f(x)$ a la propriété de Darboux, l'ensemble de toutes les valeurs de $f(x)$ sur l'intervalle δ, contenues dans l'intervalle

$$(f(\xi)-\varepsilon<y<f(\xi)+\varepsilon),$$

est non dénombrable. Cela veut dire qu'il y a une infinité non dénombrable de points de l'intervalle δ donnant lieu à l'inégalité

$$|f(x)-f(\xi)|<\varepsilon.$$

On aboutit ainsi à une contradiction. c. q. f. d.

On peut donner un forme un peu différente au théorème précédent:

Pour qu'une fonction quelconque rentrant dans la classification de Baire possède la propriété de Darboux, il est nécessaire que $f(x)$ n'ait aucun point de discontinuité totale.

15. Cette condition nécessaire est-elle suffisante? Voici la réponse à cette question: *même parmi les fonctions de classe 2 de la classification de Baire il y a une fonction $f(x)$ qui n'a aucun point de discontinuité totale et cependant elle ne possède pas la propriété de Darboux.*

Nous allons construire une telle fonction $f(x)$. A cet effet, prenons sur le segment $[a, b]$ un ensemble E du type F_σ et de première catégorie par rapport à $[a, b]$ et partout non dénombrable sur ce segment $[a, b]$; cela veut dire que l'ensemble E est une somme d'ensembles fermés F_n $(n=1, 2, 3, 4, \ldots)$ sans points communs deux à deux, chacun de ces ensembles F_n étant non dénombrable et non dense partout dans $[a, b]$. Soit $f_n(x)$ la fonction caractéristique pour l'ensemble E_n. Il est évident que f_n est une fonction de classe 1 de la classification de Baire; par suite, la fonction $f(x)$ déterminée par l'égalité

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots$$

est une fonction de classe $\leqq 2$. Comme $f(x)$ n'a aucun point de continuité dans le segment $[a, b]$, elle est précisement de classe 2.

Il est clair que $f(x)$ est la fonction caractéristique pour E.

D'ailleurs, on voit bien que $f(x)$ n'a aucun point de discontinuité totale.

En effet, si le point x_0 n'appartient pas à l'ensemble E, on peut toujours trouver un ensemble parfait P ayant ce point x_0 pour point de seconde espèce et contenu dans l'ensemble complémentaire CE, puisque E est de première catégorie sur $[a, b]$.

Si le point x_0 appartient à l'ensemble E, on peut construire à l'aide des ensembles e_n, e_n étant une partie de l'ensemble E_n, un ensemble parfait P ayant le point x_0 pour point de seconde espèce et contenu dans E.

Il en résulte que la fonction $f(x)$ n'a aucun point de discontinuité totale.

16. Mais la famille des fonctions *de classe* 1 est une exception à la règle, puisque pour cette famille la proposition suivante est vraie:

Théorème fondamental. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'uee fonction $f(x)$ de classe 1, définie sur le segment $[a, b]$, possède la propriété de Darboux, est la continuité partielle de cette fonction en chaque point de ce segment.*

Démonstration.

La nécessité de la condition du théorème est déjà démontrée. Il nous reste à démontrer que cette condition est encore suffisante. Donc, nous supposons que $f(x)$ est une fonction finie de classe 1, définie sur un segment $[a, b]$ et partiellement continue en chaque point de ce segment.

Maintenant prenons un segment nouveau quelconcue $[a', b']$ contenu dans $[a, b]$ et désignons par m' et M' respectivement la limite supérieure de la fonction $f(x)$ sur le segment $[a', b]$.

La propriété de Darboux consiste en ce que quel que soit le nombre y_0 compris *entre* m' et M' (au sens strict) $(m' < y_0 < M')$, on peut toujours trouver un point x_0 de l'intervalle (a', b') donnant lieu à l'égalité: $f(x_0) = y_0$.

Maintenant admettons, *par impossible*; que la fonction considérée ne possède pas la propriété de Darboux. Cela veut dire que quel que soit un point x du segment $[a', b']$, on a:

$$\text{ou bien} \quad (\mathrm{I}) \quad f(x) < y_0,$$

$$\text{ou bien} \quad (\mathrm{II}) \quad f(x) > y_0.$$

Désignons par E_1 l'ensemble de tous les points du segment $[a' b']$ qui satisfont à l'inégalité (I) et, d'une manière analoque, par E_2 l'ensemble de tous les points du segment $[a^1, b^1]$ qui satisfont à l'inégalité (II). On voit bien que la somme des ensembles E_1 et E_2 est égale au segment $[a^1, b^1]$, $E_1 + E_2 = [a^1\ b^1]$, et aucun des ensembles E_1 et E_2 n'est dépourvu de points.

Comme $f(x)$ est une fonction de classe **1** de la classification de Baire, l'ensemble de tous les points de continuité de $f(x)$ est partout dense dans le segment $[a^1, b^1]$. Soit ξ un point quelconque de ce derniier ensemble. Nous considérons le cas où ξ est contenu dans E_1. On peut choisir un intervalle suffisamment petit δ contenant le point ξ et tel que pour chaque point de cet intervalle on a l'inégalité (I). Cela veut dire que δ est contenu dans E_1. D'une manière analogue, si le point ξ appartient à E_2, on peut trouver un intervalle δ contenu dans E_2, et contenant le point ξ.

Désignons par Δ_ξ le plus grand des intervalles δ qui jouit des propriétés suivantes:

a) δ contient le point ξ;

b) δ est contenu entièrement dans E_1, ou bien dans E_2. On dit que Δ_ξ est *un intervale maximum* pour le point ξ.

Si nous prenons deux intervalles maxima $\Delta_{\xi'}$ et $\Delta_{\xi''}$, où $\xi' \neq \xi''$, on aperçoit immédiatement que ces intervalles n'ont aucun point commun, puisque dans le cas contraire, en faisant la somme de ces ensembles, on obtient un intervalle maximum nouveau et plus grand que chacun des intervalles $\Delta_{\xi'}$ et $\Delta_{\xi''}$, ce qui est impossible. De plus, il est évident que les intervalles $\Delta_{\xi'}$ et $\Delta_{\xi''}$ ne peuvent avoir aucune extrémité commune. Pour s'en assurer, admettons que x_0 est l'extrémité commune pour les deux intervalles $\Delta_{\xi'}$ et $\Delta_{\xi''}$. Cela veut dire que x_0 appartient à l'un des ensembles E_1 et CE_1, CE_1 étant l'ensemble complémentaire de E_1. Prenons pour le point x_0 un chemin parfait P_0; la fonction $f(x)$ est continue au point x_0 relativement à P_0. Maintenant nous suppons que x_0 appartient à l'ensemble E_1. Dans ce cas on a: $f(x) < y_0$ et, parsuite, en vertu de la continuité de $f(x)$ au point x_0 rélativement à P_0, nous avons pour tout point x de P_0 suffisamment approché de x_0 l'inégalité

$$f(x) < y_0.$$

Ceci nous montre que ce point x appartient à E_1. On en déduit immédiatement que *si un point quelconque x_0 du segment $[a', b']$ appartient à l'ensemble E_1, la partie π_0 du chemin parfait P_0 au point x_0. contenue* *dans un intervalle δ_0 suffisamment petit et contenant le point x_0, est aussi contenue dans E_1.*

En tenant compte de la symétrie des ensembles E_1 et CE_1, on en conclut que la proposition précédente subsiste aussi dans le cas où x_0 fait partie de l'ensemble $E_2 = CE_1$. Dans ce cas la partie π_0 du chemin parfait P_0 au point x_0, contenue dans un intervalle δ_0 suffisamment petit, tait partie de l'ensemble $E_2 = CE_1$.

Cela posé revenons au cas, où x_0 est l'extrémité commune des deux *intervalles maxima* $\Delta_{\xi'}$ et $\Delta_{\xi''}$. Pour fixer les idées supposons que x_0 appartient à E_1. On sait déjà que dans ce cas la partie π_0 du chemin parfait P_0 au point x_0 fait partie de l'ensemble E_1. Il est clair que l'ensemble π_0 contient des points qui appartiennent à Δ_{ξ}, et en même temps contient des points qui appartiennent à $\Delta_{\xi''}$. Comme tous les deux intervalles $\Delta_{\xi'}$, et $\Delta_{\xi''}$ sont contenus ou bien dans E_1, ou bien dans $E_2 = CE_1$, on en conclut que l'ensemble E_1 contient l'ensemble-somme

$$\Delta_{\xi'} + \Delta_{\xi''}.$$

Donc, l'ensemble-somme

$$\Delta_{\xi'} + x_0 + \Delta_{\xi''}$$

fait partie de E_1, c'est ce qui est impossible d'après l'hypothèse fait relativement aux *intervalles maxima*

$$\Delta_{\xi'} \text{ et } \Delta_{\xi''}.$$

Nous aboutissons à la même contradiction, en admettant que l'extrémité commune des intervalles $\Delta_{\xi'}$ et $\Delta_{\xi''}$ appartient à E_2.

Ainsi, dans ce qui précéde, nous avons démontré que deux intervalles maxima $\Delta_{\xi'}$ et $\Delta_{\xi''}$ $\xi' \neq \xi''$, n'ont aucune extrémité commune et aucun point commun.

Cela posé, nous allons considérer la totalité de *tous* les intervalles-maxima contenus dans le segment $[a', b']$. D'après ce qui précède, il est clair que cette totalité est dénombrable, c'est à dire, on peut les ranger en suite simple

$$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots \Delta_n, \ldots$$

Comme ces intervalles n'ont aucune extrémité commune, on peut les considérer comme les intervalles contigus à un ensemble parfait Q contenu dans $[a', b']$.

On voit bien que l'ensemble Q est *partout non dense* dans $[a', b']$. En effet, chaque point ξ de continuité de $f(x)$ dans le segment $[a', b']$

est contenu dans l'un des intervalles Δ_i contigus à Q. D'autre part, l'ensemble de tous les points de contiuuité de $f(x)$ est partout dense dans $[a', b']$; par suite, l'ensemble parfait Q est partout non dense dans $[a', b']$. Comme $f(x)$ est une fonction de clase 1, on peut trouver des points de l'ensemble Q en chacun desquels $f(x)$ est continue relativement à Q. Soit η l'un de ces points. Pour fixer les idées, nous supposons que η appartient à l'ensemble E_2 et, par suite,

$$f(\eta) > y_0.$$

Comme $f(x)$ est continue sur Q au point η relativement à Q, on a: $f(x) > y_0$ pour chaque point x de Q suffisamment approché de η. Autrement dit, il existe un intervalle δ suffisamment petit qui jouit des propriétés suivantes:

1° cet intervalle contient le point η;

2° les extrémités de δ n'appartiennent pas à l'ensemble Q;

3° la partie q de Q contenue dans δ fait partie de l'ensemble E_2.

Ceci étant établi nous allons considérer la totalité T de tous les intervalles dont chacun a au moins un point contenu dans δ. Il est évident que *cette totalité* T est identique à la totalité de tous les intervalles contigus à l'ensemble parfait q. je dis que chacun de ces intervalles est contenu dans E_2. En effet, l'ensemble q est contenu dans E_2, par suite, les extrémités a_i et b_i d'un intervalle quelconque $\Delta_i = (a_i, b_i)$ de la totalité T appartiennent a E_2. Or, nous avons vu précédemment que, d'après l'hypothèse faite, on peut construire aux points a_i et b_i des chemins parfaits respectifs

$$P_{a_i} \text{ et } P_{b_i},$$

dont chacun a le diamètre si petit que les ensembles

$$P_{a_i} \text{ et } P_{b_i}$$

sont contenus dans l'ensemble E_2. Cette construction est possible, puisque le diamètre d'un chemin peut être pris aussi petit que l'on veut. D'autre part, Δ_i est contenu entièrement ou bien dans E_2, ou bien dans $E_1 = CE_2$. Comme Δ_i contient sûrement certains points de l'ensemble E_2, Δ_i fait partie de l'ensemble E_2,

Une conséquence immédiate des considérations précédentes est la suivante:

l'ensemble parfait q est entièrement contenu dans E_2 et tout intervalle Δ_i contigu à q et contenu dans δ fait partie de l'ensemble E_2.

Il en suit que l'intervalle δ est aussi contenu dans E_2.

Cela veut dire qu'en réalité aucun des intervalles maxima Δ_i con- dans δ n'est pas un intervalle maximum.

Donc, nous sommes arrivés à une contdradiction qui achève la démonstration de notre théoréme. C. q. f. d.

17. — Le théorème fondamental précédent met en évidence ce fait important que l'ensemble de toutes les valeurs que prend dans un segment quelconque une fonction de clase $\leqq 1$ dépourvue de point de discontinuité totale est *ou bien* un segment complet, *ou bien* un segment privé de l'une de ses extrémités, *ou bien* un intervalle. Dans le cas particulier où $f(x)$ est de clase 0, cet ensemble, bien entendu, est un segment.

Une question se présente naturellement: cet ensemble peut-il coïncider avec un segment quelconque privé de l'une de ses extrémités? La réponse est affirmative et c'est la raison pour laquelle nous avons supposé précédemment dans le procédé de démonstration du théorème fondamental que y_0 est compris précisement *entre* m' et M' $(m' < y < M')$. Pour le voir remarquons qu'on peut toujours construire une fonction $\varphi(x)$ continue, positive, définie pour chaque point d'un segment donné σ et ayant les propriétés suivantes:

1⁰ $\varphi(x) = 0$, si x est l'extrémité de σ;

2⁰ $\varphi(x) \leqq \varepsilon$, ε étant un nombre positif quelconque;

3⁰ la dérivée $\varphi'(x)$ est continue dans le segment σ, prend la valeur 0 en chacune des extrémités de σ et, enfin, a son maximum égal à M, M étant un nombre positif donné à l'avance.

Maintenant nous faisons la décomposition du segment $[0 \leqq x \leqq 1]$ en segments plus petits par les points:

$$1/2,\ 1/3,\ 1/4,\ \ldots\ 1/n,\ \ldots$$

et rangeons ces segments en suite simple

$$\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3,\ \ldots\ \sigma_n\ \ldots,$$

où le segment σ_{n+1} est situé à gauche du segment σ_n. Ceci fait nous construisons une fonction $\varphi_n(x)$ du type de la fonction $\varphi(x)$ décrite précédemment en prenant $\varepsilon = 1/n^2$ et $M = M_n$, où la suite des nombres

$$M_1,\ M_2,\ M_3,\ \ldots\ M_n,\ \ldots$$

satisfait aux conditions suivantes:

$$M_1 < M_2 < M_3 < \ldots < M_n < \ldots$$

$$\lim_{n=\infty} M_n = M.$$

Ceci étant établi, à l'aide des fonctions $\varphi_n(x)$ nous déterminons une fonction nouvelle $f(x)$ de la manière suivante:

1⁰ $f(0) = 0$,

2⁰ $f(x) = \varphi_n(x)$ pour chaque point x du segment σ_n.

Il est clair que la fonction $f(x)$, ainsi déterminée, est continue sur le segment $[0 \leqq x \leqq 1]$ et sa dérivée $f(x)$ est continue pour tous les points de ce segment à l'exception du point O, où on a évidemment:

$$f'(0) = 0.$$

On voit bien que cette dérivée $f'(x)$ a pour limite supérieure le nombre M qui surpasse toutes les valeurs de $f'(x)$.

D'autre part, $f'(x)$ est une fonction de classe 1 et possède la propriété de Darboux.

18. I'ai entrepris cete étude ayant pour but la transformation *de toute fonction* $f(x)$ *de classe 1* ayant la propriété de Darboux, *en dérivée exacte* au moyen de la substitution

$$x = \varphi(t),$$

où $\varphi(x)$ est une foction continue et essentiellement croissante.

L'article actuel a un caractère préliminaire.

Enfin, il est à rémarquer que W. H. Young en 1907 a publié dans son article *A theorem in the theory of fonctions of a real variable (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.* Tomo XXIV, Fasc' II, p. 187—162) un théorème en quelque sorte analogue au théorème fondamental précédent sur les fonctions de classe 1 ayant la propriété de Darboux. Mais le chemin de continuiié qui a été introduit par W. H. Young est toujours *dénombrable*, et ce chemin ne peut pas rendre de services essentiels dans nos recherches ultérieures sur les fonctions ayant la propriété dé Darboux.