Über den Inhalt einer auf der Kugel liegenden geschlossenen Kurve

von

Włodzimierz Stożek.

Es sei eine auf der Kugel $x^2+y^2+z^2=1$ liegende geschlossene doppelpunktlose Kurve (C) gegeben:

$$(1)\qquad \begin{cases} x=\cos u(s)\cdot\cos v(s) \\ y=\cos u(s)\cdot\sin v(s) \qquad 0\leq s<l \\ z=\sin u(s) \end{cases}$$

wobei s die Bogenlänge bedeutet.

Die Kurve (C) zerlegt die Kugeloberfläche in zwei Teile, von denen wir den einen (P) als den inneren und den zweiten als den äusseren bezeichnen werden.

Setzt man voraus, dass die Funktionen $u(s)$ und $v(s)$ zweimal stetig differenzierbar sind, so kann man offenbar zur Berechnung des Flächeninhaltes von (P) die Gauss-Bonnetsche Formel:

$$(2)\qquad \int_{(C)}\frac{ds}{\rho_g}+\int_{(P)}K\,d\sigma=2$$

benutzen. Dabei bedeutet $\frac{1}{\rho_g}$ die geodätische Krümmung der Kurve (1), ds das Bogenelement dieser Kurve und zwar so gerichtet, dass das Flächenstück (P) zur linken Seite bleibt, K die Gauss'sche Krümmung und $d\sigma$ das Flächenelement von (P).

In dieser Arbeit wird eine andere Formel für den Flächeninhalt abgeleitet, wobei die Voraussetzung der stückweise einmaligen stetigen Differenzierbarkeit von $u(s)$ und $v(s)$ genügt. Dabei haben alle in der Formel vorkommenden Grössen eine einfache geometrische Bedeutung. Die Formel lautet:

$$P = \int_{(C)} \frac{\cos(e, n)}{1 - \cos(e, OM)} \, ds \tag{3}$$

Es bedeutet e einen beliebigen festen Einheitsvektor, dessen Anfangspunkt der Mittelpunkt O der Kugel ist und dessen Endpunkt innerhalb des Bereiches (P) liegt und n die innere Tangentialnormale im Punkte $M(s)$ der Kurve (C).

Der Flächeninhalt P ist nichts anderes, als der Körperwinkel, unter welchem man das Flächenstück (P) vom Mittelpunkt O aus sieht.

Um diesen Winkel zu berechnen, wählen wir auf dem Einheitsvektor $(-e)$ einen beliebigen von C verschiedenen Punkt Q, der also ausserhalb des durch (C) bestimmten Kegels mit dem Scheitel C liegt. Der Körperwinkel $W(Q)$, unter welchem man von Q aus die Mantelfläche (S) dieses Kegels sieht, drückt sich bekanntlich durch das Gaussche Integral aus:

$$W(Q) = \varepsilon_1 \int_{(S)} \frac{\cos(r_{MQ}\, n_M)}{r^2_{MQ}} \, d\sigma_M \tag{4}$$

wo $\varepsilon_1 = \pm 1$ so gewählt ist, dass die rechte Seite $\geqq 0$ ist. Dabei bezeichnet r_{MQ} den Abstand des Punktes Q von dem Integrationspunkte M, n_M die im Punkte M nach dem Inneren des Kegels gerichtete Normale, (r_{MQ}, n_M) den Winkel zwischen der inneren Normalen und der Richtung vom Punkte M nach Q, $d\sigma_M$ das Flächenelement der Mantelfläche (S).

Für $Q \to O$ geht dieses Integral offenbar in den Flächeninhalt P über.

Wir setzen zuerst voraus, dass die Funktionen $u(s)$, $v(s)$ stetig differenzierbar sind.

Seien λ, μ, ν die Richtungskosinus von e, und $r\lambda$, $r\mu$, $r\nu$ $(r < 0)$ die Koordinaten von Q. Wir führen auf der Mantelfläche (S) die Parameter ρ, s ein, durch die Gleichungen:

$$\begin{cases} x = \rho \cos u(s) \cdot \cos v(s) \\ y = \rho \cos u(s) \cdot \sin v(s) \\ z = \rho \sin u(s) \end{cases} \qquad \begin{matrix} 0 < \rho < 1 \\ 0 \leqq s \leqq l. \end{matrix} \tag{5}$$

Alsdann haben wir:

$$\begin{cases} \cos(n_M, x) = \dfrac{\varepsilon_2 \rho}{\sqrt{EG - F^2}} \left[u' \sin v - v' \sin u \cos u \cos v\right] \\[2ex] \cos(n_M, y) = \dfrac{\varepsilon_2 \rho}{\sqrt{EG - F^2}} \left[-u' \cos v - v' \sin u \cos u \sin v\right] \\[2ex] \cos(n_M, z) = \dfrac{\varepsilon_2 \rho}{\sqrt{EG - F^2}} \cdot v' \cos^2 u \end{cases} \tag{6}$$

wo $\varepsilon_2 = \pm 1$ so gewählt sein soll, dass die Normale nach dem Inneren gerichtet ist.

Es gilt:

$$\cos(r_{QM}, n_M) = \frac{A r \rho}{r_{QM}} \cdot \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{EG - F^2}}, \tag{7}$$

wobei

$$A = \lambda (u' \sin v - v' \sin u \cos u \cos v)$$
$$- \mu (u' \cos v + v' \sin u \cos u \sin v) + \nu v' \cos^2 u.$$

Wir haben auch:

$$r^2_{QM} = r^2 - 2 r \rho B + \rho^2 \tag{8}$$

wo

$$B = \lambda \cos u \cos v + \mu \cos u \sin v + \nu \sin v$$

zur Abkürzung gesetzt wurde.

Setzen wir die Werte (7) und (8) in die rechte Seite der Gleichung (4) ein, so folgt:

$$W(Q) = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \int_0^1 \int_0^l \frac{A r \rho \, d\rho \, ds}{r^3_{QM}} = \varepsilon \int_0^1 \int_0^l \frac{A r \rho \, d\rho \, ds}{[r^2 - 2 r \rho B + \rho^2]^{\frac{3}{2}}}$$

wo $\varepsilon = \varepsilon_1 \varepsilon_2 = \pm 1$ ist.

Da nun

$$\int_0^1 \frac{r \rho \, d\rho}{[r^2 - 2 r \rho B + \rho^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{B\rho - r}{(1 - B^2)\,[r^2 - 2 r \rho B + \rho^2]^{\frac{1}{2}}} \Bigg|_0^1$$

so ist

$$\lim_{Q \to O} W(Q) = P = \varepsilon \int_{(C)} \frac{A}{1 - B} \, ds \tag{9}$$

Bemerken wir noch, dass n die Komponenten

$$yz' - zy' = u' \sin v - v' \sin u \cos u \cos v$$

$$zx' - xz' = -u' \cos v - v' \sin u \cos u \sin v$$

$$xy' - yx' = v' \cos^2 u$$

besitzt, so ergibt sich:

(10) $$A = \cos(e, n)$$

und

(11) $$B = \cos(e, On)$$

Setzt man nun die Werte (10) und (11) in die rechte Seite von (9) ein, so bekommt man die Formel:

(12) $$P = \varepsilon \int_{(C)} \frac{\cos(e, n)}{1 - \cos(e, OM)} ds$$

Um noch das Vorzeichen ε zu bestimmen, bemerken wir zunächst, dass es aus Stetigkeitsgründen von der Gestalt der Kurve (C) und der Wahl des Vektors e unabhängig ist. Wenn wir z. B. für C einen Parallelkreis der oberen Einheitskugel, für e den positiven Einheitsvektor der z Achse wählen und wenn P den Flächeninhalt der oberen Kalotte bedeutet, so ist in (12) der Zähler des Integranden stets positiv. Daher ist $\varepsilon = +1$.

Wenn die Funktionen $u(s)$, $v(s)$ nur stückweise stetig differenzierbar sind, so ist unsere Formel auch richtig. Man beweist das am einfachsten durch Abrundung der Ecken und Grenzübergang unter Beachtung der Tatsache, dass der Integrand dabei gleichmässig beschränkt bleibt. Damit ist unsere Formel (3) vollständig bewiesen.

Im Falle, wo die Kurve (C) auf einer Kugel vom Radius R liegt, ist:

$$P = R \int_{(C)} \frac{\cos(e, n)}{1 - \cos(e, OM)} ds,$$

Sur les fonctions ayant la propriété de Darboux.

par

Isaie Maximoff

(Tcheboksary).

1. C'est G. Darboux qui a démontré, le premier, en 1875 dans son célèbre Mémoire *Sur les fonctions discontinues* (Ann. Ec. Norm. Sup. (2) 4, p. 109—110) la propriété suivante des dérivées exactes: une fonction dérivée (exacte) ne peut passer d'une valeur à une autre dans un segment sans prendre toutes les valeurs intermédiaires. Depuis, cette propriété a reçu le nom *de propriété de Darboux*. On sait que toute fonction continue jouit de cette propriété. Or, G. Darboux qui construisait dans le Mémoire cité des fonctions dérivées non continues, a pu montrer que cette propriété appartient aussi à quelques fonctions *discontiuues*.

En nous proposant de publier un travail sur les transformations des fonctions ayant la propriété de Darboux, nous nous plaçons dans cet article sur le terrain tout-à-fait genéral sans nous restreindre par les hypothèses particulières sur les fonctions considérées. Ultérieurement nous porterons notre attention exclusivement sur les fonctions de la classe 1 de la classification de Baire puisque nous avons pour but d'appliquer les résultats obtenus à l'étude des dérivées exactes.

2. *Chemin parfait.* Soit $f(x)$ une fonction quelconque définie pour toutes les valeurs de x du segment $[a, b]$. Convenons du dire que $f(x)$ possède en un point quelconque x_0 du segment $[a, b]$ *un chemin parfait* [1]), s'il existe un ensemble parfait ayant le point x_0 pour point de seconde espèce et tel que la fontion $f(x)$ est continue au point x_0 relativement

[1]) Voir p „note"