$$1+\frac{1}{s}(1+\beta_2(\theta_1,\ \theta_2,\ \ldots,\ \theta_s))\leqq \gamma_n$$

für jedes ganze $n>0$, also auch

$$1+\frac{1}{s}(1+\beta_2(\theta_1,\ \theta_2,\ \ldots,\ \theta_s))\leqq \operatorname{Max}\left(\frac{s\,\beta_2(\theta_1)+2s}{(s-1)\,\beta_2(\theta_1)+2s-1},\ \frac{s+1}{s}\right)$$

für $\beta_2(\theta_1)<\infty$, bzw.

$$1+\frac{1}{s}(1+\beta_2(\theta_1,\ \theta_2,\ \ldots,\ \theta_s))\leqq \frac{s}{s-1}\quad \text{für}\quad \beta_2(\theta_1)=\infty.$$

Daraus folgt aber

$$\beta_2(\theta_1,\ \theta_2,\ \ldots,\ \theta_s)\leqq \operatorname{Max}\left(\frac{\beta_2(\theta_1)-s+1}{(s-1)\,\beta_2(\theta_1)+2s-1},\ 0\right)\quad \text{für}\quad \beta_2(\theta_1)<\infty,$$

$$\beta_2(\theta_1,\ \theta_2,\ \ldots,\ \theta_s)\leqq \frac{1}{s-1}\quad \text{für}\quad \beta_2(\theta_1)=\infty;$$

nach dem ersten Teil dieses Paragraphen kann aber hier das Zeichen $<$ nicht gelten. Damit ist also auch die Behauptung 2b des Satzes 2 bewiesen.

---



# Sur deux connexions affines généralisées*)

## (O dwóch uogólnieniach koneksji afinalnej.)

Par

W. Ślebodziński.

En 1915 M. Żorawski a publié deux Mémoires consacrés aux invariants différentiels du système suivant

$$\frac{d^2x_i}{dt^2}=v_i\left(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n,\ \frac{dx_1}{dt},\ \ldots,\ \frac{dx_n}{dt}\right)\qquad (i=1,\ 2,\ \ldots\ n)\qquad \text{(a)}$$

qu'on peut encore remplacer par le système équivalent du premier ordre

$$\frac{dx_i}{dt}=y_i,\quad \frac{dy_i}{dt}=v_i\,(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n,\ y_1,\ \ldots,\ y_n).\qquad \text{(b)}$$

Dans le premier [1]) de ces Mémoires il est question des invariants du système (a) vis-à-vis des transformations

$$\bar{x}_i=\bar{x}_i\,(x_1,\ \ldots,\ x_n)$$

du groupe général à $n$ variables, le deuxième [2]) a pour objet les invariants simultanés du système (a) et de la forme différentielle

$$\sum_{i=j}^{n} a_{ij}\,(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)\,\delta x_i\,\delta x_j$$

*) Un résumé de ce travail a été objet d'une communication faite le 15 septembre 1933, au XIV^ème Congrès des naturalistes et médecins polonais à Poznań. 1) [7] Les chiffres entre crochets se rapportent à l'index bibliographique placé à la fin du Mémoire. 2) [8].

par rapport aux transformations de la forme

$$\bar{x}_i = \bar{x}_i(t, x_1, \ldots, x_n), \quad \bar{t} = t. \tag{c}$$

Dans l'un et dans l'autre cas les invariants dont il était question ont été appliqués au problème d'équivalence correspondant. C'est sur le premier de ces Mémoires que nous voudrions attirer ici l'attention particulière, son objet étant intimement lié aux recherches récentes dans le domaine de la géométrie différentielle. Il est en effet évident que le système (a) contient comme un cas spécial celui d'équations différentielles des géodésiques d'un espace à connexion affine sans torsion. Il suffirait, pour obtenir ce cas particulier, de supposer que les fonctions $v_i$ soient des polynomes homogènes du second degré en $\frac{dx_i}{dt}$ à coefficients indépendants de la variable $t$. On conçoit donc bien que dans les recherches de M. Żorawski interviennent des grandeurs, désignées par les symboles $A_{\lambda,\mu\nu}$, qui généralisent les coefficients $\Gamma^{\mu\nu}_{\lambda}$ du déplacement parallèle et que l'on y rencontre une opération analogue à la différentiation covariante. Il est presque inutile d'ajouter que parmi les covariants du système (a) on trouve une grandeur, de composantes $B_{i\varkappa\lambda\mu}$, analogue au tenseur de courbure d'un espace à connexion affine. La théorie de M. Żorawski contenant ainsi implicitement celle du déplacement parallèle, l'idée s'impose d'imaginer une connexion plus générale ayant pour point de départ les équations (a) dans leur forme générale au lieu des équations spéciales des géodésiques d'une connexion affine proprement dite. Or, le développement de cette idée est le but principal du Mémoire présent. Pour l'atteindre il fallait modifier les calculs de M. Żorawski, en les adoptant convenablement à notre problème actuel.

Le Mémoire est divisé en deux Chapitres. Dans le premier nous traitons la connexion liée au système (b) et aux transformations (c); elle est fondée sur la notion de l'élément linéaire de coefficients $y_i$, issu du point $(x_i)$ et regardé au moment $t$. Après avoir donné quelques définitions (n° 1), nous introduisons dans le n° **2** trois opérations covariantes (trois espèces de différentiation covariante) et nous calculons les parenthèses de Poisson relatives à celles-ci. Ceci nous permet de trouver les courbures de la connexion, parmi lesquelles deux, désignées respectivement par les symboles $V_{\varkappa}^{\cdot\lambda}$ et $B_{\varkappa\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ jouiront dans la suite un rôle prépondérant. En terminant ce n° nous définissons la différentielle absolue d'un tenseur. Le n° suivant contient les équations





de structure de la connexion et les identités généralisées de Bianchi. Le n° **4** est consacré aux applications de la théorie précédente à l'intégration du système (a). Nous y supposons que certaines courbures de la connexion sont nulles et nous montrons quel parti on en peut tirer pour simplifier le procédé d'intégration. Nous prouvons ainsi que, si la courbure fondamentale $V_{\varkappa}^{\cdot\lambda}$ est nulle, l'intégration du système (a) revient à l'intégration successive de deux systèmes du premier ordre dont chacun est à $n$ inconnues. Nous terminons ce n° en donnant la proposition suivante: pour que le système (a) puisse être transformé dans le système particulier suivant

$$\frac{d^2 \bar{x}_i}{d\bar{t}^2} = 0,$$

il faut el il suffit que les courbures $V_{\varkappa}^{\cdot\lambda}$ et $B_{\varkappa\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ soient nulles. Dans le n° **5** nous traitons le problème d'équivalence de deux systèmes de la forme (a) vis-à-vis des transformations (c) et nous le réduisons à celui de deux systèmes dont chacun se compose de $2n+1$ formes pfaffiennes à $2n+1$ variables et d'une fonction finie. Or, il est bien connu que ce dernier problème se résout au moyen d'une méthode générale que l'on doit à M. Cartan. Le dernier n° du Chapitre I contient quelques remarques concernant les équations aux variations du système (b) et d'autres questions de même genre qui s'y rattachent.

Dans le Chapitre II nous développons une théorie analogue, en prenant pour point de départ le système d'équations suivantes

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = v_i\left(x_1, \ldots, x_n, \frac{dx_1}{dt}, \ldots, \frac{dx_n}{dt}\right)$$

et les transformations

$$\bar{x}_i = \bar{x}_i(x_1, \ldots, x_n)$$

du groupe général à $n$ variables.

Le Mémoire a été rédigé il y a deux ans. Depuis M. D. D. Kosambi a publié un travail suivi d'une Note de M. Cartan. La théorie développée dans ces articles et en particuler dans celui de M. Cartan est au fond identique avec l'objet de mon Mémoire. Je pense néanmoins qu'il ne sera peut-être pas inutile de le publier, eu égard à la différence de la méthode et aux applications à l'intégration et au problème d'équivalence qu'il contient.

Dans tout le Mémoire nous nous servons des notations adoptées par M. Schouten (v. son livre bien connu sur le Calcul de Ricci).

## Chapitre I.

**1. Préliminaires.** Soit donné le système d'équations

$$\frac{d^2 x^\varkappa}{d t^2} + 2\,\Gamma^\varkappa\left(t, x^1, \ldots, x^n, \frac{d x^1}{d t}, \ldots, \frac{d x^n}{d t}\right) = 0, \quad {}^{3)} \tag{1}$$

$\Gamma^\varkappa$ étant des fonctions analytiques réelles, régulières, si le point $(x^1, \ldots, x^n)$ reste dans un domaine $(\Omega)$, si la variable $t$ appartient à un intervalle $(t_1, t_2)$ et si les valeurs des dérivées $\frac{d x^\mu}{d t}$ sont finies et non toutes nulles. Le système (1) peut être remplacé par le système équivalent

$$\frac{d x^\varkappa}{d t} - y^\varkappa = 0, \quad \frac{d y^\varkappa}{d t} + 2\,\Gamma^\varkappa(t, x, y) = 0 \tag{2}$$

à $2n$ inconnues $x^\varkappa, y^\varkappa$. Supposons que l'on effectue sur le système (1) une transformation quelconque de la forme suivante

$$'x^\lambda = 'x^\lambda(t, x^1, \ldots, x^n), \quad 't = t, \quad \frac{D('x^1, \ldots, 'x^n)}{D(x^1, \ldots, x^n)} \neq 0 \tag{3}$$

et soient

$$\frac{d^2\,'x^\varkappa}{d\,'t^2} + 2\,'\Gamma^\varkappa\left('t, 'x^1, \ldots, 'x^n, \frac{d\,'x^1}{d\,'t}, \ldots, \frac{d\,'x^n}{d\,'t}\right) = 0 \tag{1'}$$

les équations du système transformé. Si on les remplace par les équations équivalentes du premier ordre

$$\frac{d\,'x^\varkappa}{d\,'t} - 'y^\varkappa = 0, \frac{d\,'y^\varkappa}{d\,'t} + 2\,'\Gamma^\varkappa('t, 'x, 'y) = 0, \tag{2'}$$

on aura des relations [4])

$$'y^\lambda = \frac{\partial\,'x^\lambda}{\partial x^\rho} y^\rho + \frac{\partial\,'x^\lambda}{\partial t} \tag{4}$$

[3]) Dans tout ce qui suit nous supposons que les indices de l'alphabet grec parcourent les valeurs $1, 2, \ldots, n$.

[4]) [7] $n^0$ 3.





$$2\,'\Gamma^\lambda = \frac{\partial\,'x^\lambda}{\partial x^\rho} 2\,\Gamma^\rho - \frac{\partial^2\,'x^\lambda}{\partial x^\rho\,\partial x^\sigma} y^\rho y^\sigma - 2\,\frac{\partial^2\,'x^\lambda}{\partial t\,\partial x^\rho} y^\rho - \frac{\partial^2\,'x^\lambda}{\partial t^2}. \tag{5}$$

Les $3n+1$ équations (3), (4), (5) définissent un groupe infini $(G)$ de transformations sur les variables $t, x^\varkappa, y^\varkappa, \Gamma^\varkappa$ et il est évident que la détermination des invariants du système (1) pour les transformations (3) se ramène à celle des invariants différentiels du groupe $(G)$, si l'on y regarde les variables $\Gamma^\varkappa$ comme fonctions des variables $t, x^\lambda, y^\lambda$.

Avant d'aborder cette dernière question nous allons établir quelques relations qui nous seront utiles dans la suite. Posons pour ce but

$$\Gamma^\mu_\lambda = \frac{\partial \Gamma^\mu}{\partial y^\lambda}, \quad \Gamma^\mu_{\varkappa\lambda} = \frac{\partial^2 \Gamma^\mu}{\partial y^\varkappa\,\partial y^\lambda}; \tag{6}$$

on aura donc

$$\Gamma^\mu_{\varkappa\lambda} = \Gamma^\mu_{\lambda\varkappa}. \tag{7}$$

Différentions maintenant les équations (5) successivement par rapport aux variables $y^\mu$ et $y^\nu$; si l'on tient compte de la relation

$$\frac{\partial\,'y^\lambda}{\partial y^\mu} = \frac{\partial\,'x^\lambda}{\partial x^\mu} \tag{8}$$

qui est une conséquence de l'équation (4), on sera conduit aux équations suivantes

$$\frac{\partial\,'x^\rho}{\partial x^\mu}\,'\Gamma^\lambda_\rho = \frac{\partial\,'x^\lambda}{\partial x^\rho}\,\Gamma^\rho_\mu - \frac{\partial^2\,'x^\lambda}{\partial x^\rho\,\partial x^\mu} y^\rho - \frac{\partial^2\,'x^\lambda}{\partial t\,\partial x^\mu},$$

$$\frac{\partial\,'x^\rho}{\partial x^\mu}\,\frac{\partial\,'x^\sigma}{\partial x^\nu}\,'\Gamma^\lambda_{\rho\sigma} = \frac{\partial\,'x^\lambda}{\partial x^\tau}\,\Gamma^\tau_{\mu\nu} - \frac{\partial^2\,'x^\lambda}{\partial x^\mu\,\partial x^\nu}.$$

On voit bien que les équations (5) et les deux dernières relations peuvent être résolues par rapport aux dérivées $\frac{\partial^2\,'x^\lambda}{\partial x^\mu\,\partial x^\nu}$, $\frac{\partial^2\,'x^\lambda}{\partial t\,\partial x^\mu}$, $\frac{\partial^2\,'x^\lambda}{\partial t^2}$ et l'on trouve pour ces dérivées les expressions suivantes

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 {}'x^\lambda}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = -\frac{\partial {}'x^\rho}{\partial x^\mu}\frac{\partial {}'x^\sigma}{\partial x^\nu}\,{}'\Gamma^\lambda_{\rho\sigma} + \frac{\partial {}'x^\lambda}{\partial x^\rho}\Gamma^\rho_{\mu\nu}\\
&\frac{\partial^2 {}'x^\lambda}{\partial t\,\partial x^\mu} = \frac{\partial {}'x^\rho}{\partial x^\mu}\frac{\partial {}'x^\sigma}{\partial x^\tau}\,{}'\Gamma^\lambda_{\rho\sigma} y^\tau - \frac{\partial {}'x^\rho}{\partial x^\mu}\,{}'\Gamma^\lambda_\rho - \frac{\partial {}'x^\lambda}{\partial x^\rho}\Gamma^\rho_{\mu\sigma} y^\sigma + \frac{\partial {}'x^\lambda}{\partial x^\rho}\Gamma^\rho_\mu,\\
&\frac{\partial^2 {}'x^\lambda}{\partial t^2} = -\frac{\partial {}'x^\rho}{\partial x^\alpha}\frac{\partial {}'x^\sigma}{\partial x^\beta}\,{}'\Gamma^\lambda_{\rho\sigma} y^\alpha y^\beta + 2\frac{\partial {}'x^\rho}{\partial x^\tau}\,{}'\Gamma^\lambda_\rho y^\tau - 2\,{}'\Gamma^\lambda +\\
&\qquad + \frac{\partial {}'x^\lambda}{\partial x^\tau}\Gamma^\tau_{\rho\sigma} y^\rho y^\sigma - 2\frac{\partial {}'x^\lambda}{\partial x^\rho}\Gamma^\rho_\sigma y^\sigma + 2\frac{\partial {}'x^\lambda}{\partial x^\rho}\Gamma^\rho .
\end{aligned}
\right.
\tag{9}
$$

Telles sont les relations annoncées.

Avant terminer ces préliminaires nous allons donner encore quelques définitions. A tout système de valeurs des variables $x^\varkappa, y^\varkappa$ nous donnerons le nom de *l'élément linéaire* issu du point $(x^\varkappa)$ et nous allons regarder les quantités $y^\varkappa$ comme les coefficients de direction de cet élément. L'ensemble de tous les systèmes de valeurs $(x^\varkappa, y^\varkappa)$ constitue ainsi une *variété d'éléments*. La variable $t$ va jouer dans les considérations suivantes le rôle du *temps*. Nous désignerons par le symbole $(C)$ la variété d'éléments $(x^\varkappa, y^\varkappa)$ considérés à divers moments $t$. Ceci posé, considérons une grandeur définie au moyen de $n$ coefficients $A^\varkappa$ fonctions de variables $t$, $x^\varkappa$, $y^\varkappa$; nous dirons que cette grandeur est un *vecteur contravariant appuyé au moyent $t$ sur l'élément* $(x^\varkappa, y^\varkappa)$ si les coordonnées $A^\varkappa$ se transforment suivant les formules

$$
{}'A^\varkappa = \frac{\partial {}'x^\varkappa}{\partial x^\rho} A^\rho , \tag{10}
$$

quand on passe des variables $t$, $x^\varkappa$, $y^\varkappa$ aux variables $'t$, $'x^\varkappa$, $'y^\varkappa$ au moyen des formules (3) et (4). Nous dirons de même que les coordonnées $B_\varkappa$ définissent un *vecteur covariant* attaché à l'élément $(x^\varkappa, y^\varkappa)$ au moment $t$, quand on a, dans les mêmes conditions,

$$
B_\varkappa = \frac{\partial {}'x^\rho}{\partial x^\varkappa}\,{}'B_\rho \tag{11}
$$

On définit d'une manière analogue les tenseurs d'ordres supérieurs ayant $(x^\varkappa, y^\varkappa)$ comme élément d'appui au moment $t$. A côté des vecteurs proprement dits nous rencontrerons aussi des grandeurs définies au moyen de $n+1$ coordonnées $\mathfrak{M}^\varkappa$, $\mathfrak{M}^0$, se transformant suivant la loi

$$
{}'\mathfrak{M}^\varkappa = \frac{\partial {}'x^\varkappa}{\partial x^\rho}\mathfrak{M}^\rho + \frac{\partial {}'x^\varkappa}{\partial t}\mathfrak{M}^0 , \quad {}'\mathfrak{M}^0 = \mathfrak{M}^0 ; \tag{12}
$$

un exemple de cette grandeur nous est fourni par le symbole d'une transformation infinitésimale $Df = \mathfrak{M}^\rho \dfrac{\partial f}{\partial x^\rho} + \mathfrak{M}^0 \dfrac{\partial f}{\partial t}$, $\mathfrak{M}^0 = 1$; nous obtenons un autre exemple en posant $\mathfrak{M}^\varkappa = y^\varkappa$, $\mathfrak{M}^0 = 1$, c'est ce qu'on vérifie immédiatement au moyen des relations (3) et (4). A la grandeur $\{\mathfrak{M}^\varkappa, \mathfrak{M}^0\}$ ainsi définie se rattache une autre dont les coordonnées $\mathfrak{N}_\varkappa$, $\mathfrak{N}_0$ se transforment par les formules suivantes

$$
\mathfrak{N}_\varkappa = \frac{\partial {}'x^\rho}{\partial x^\varkappa}\,{}'\mathfrak{N}_\rho , \quad \mathfrak{N}_0 = {}'\mathfrak{N}_0 + \frac{\partial {}'x^\rho}{\partial t}\,{}'\mathfrak{N}_\rho \tag{13}
$$

On vérifie aisément que la forme de Pfaff

$$
\omega = \mathfrak{N}_\varkappa\, dx^\varkappa + \mathfrak{N}_0\, dt
$$

donne naissance à une grandeur de cette espèce. Observons aussi que l'expression $\mathfrak{M}^\rho \mathfrak{N}_\rho + \mathfrak{M}^0 \mathfrak{N}_0$ est une fonction scalaire (invariante). A des grandeurs définies plus haut nous donnerons le nom de *pseudo-vecteurs* (contravariants ou covariants) et nous les distinguerons par les caractères gothiques [5]).

**2. Dérivées covariantes. Connexion affine généralisée $Z_n$.** Soit donné un vecteur contravariant $\{A^\varkappa\}$. On a par définition

$$
{}'A^\varkappa = \frac{\partial {}'x^\varkappa}{\partial x^\rho} A^\rho ;
$$

en différentiant cette équation par rapport à $x^\mu$, on obtient

$$
\frac{\partial {}'A^\varkappa}{\partial {}'x^\rho}\frac{\partial {}'x^\rho}{\partial x^\mu} + \frac{\partial {}'A^\varkappa}{\partial {}'y^\rho}\frac{\partial {}'y^\rho}{\partial x^\mu} = \frac{\partial^2 {}'x^\varkappa}{\partial x^\mu \partial x^\rho} A^\rho + \frac{\partial {}'x^\varkappa}{\partial x^\rho}\frac{\partial A^\rho}{\partial x^\mu} .
$$

[5]) Les deux espèces des grandeurs dont il était question plus haut interviennent pour la première fois dans un Mémoire de M. Wundheiler; v. [6] p. 101.

Mais on a (v. équ. (4))

$$\frac{\partial\, 'y^\rho}{\partial x^\mu} = \frac{\partial^2\, 'x^\rho}{\partial x^\mu \partial x^\sigma} y^\sigma + \frac{\partial^2\, 'x^\rho}{\partial t\, \partial x^\mu}.$$

En rapprochant les deux dernières relations et en éliminant les dérivées

$$\frac{\partial^2\, 'x^\alpha}{\partial x^\rho \partial x^\mu}, \quad \frac{\partial^2\, 'x^\rho}{\partial x^\mu \partial x^\sigma} \text{ et } \frac{\partial^2\, 'x^\rho}{\partial t\, \partial x^\mu}$$

au moyen des équations (9), on sera conduit à la relation suivante

$$\frac{\partial\, 'x^\rho}{\partial x^\mu}\left\{\frac{\partial\, 'A^\alpha}{\partial\, 'x^\rho} + {}'\Gamma^\alpha_{\rho\sigma}\, 'A^\sigma - {}'\Gamma^\sigma_\rho \frac{\partial\, 'A^\alpha}{\partial\, 'y^\sigma}\right\} = \frac{\partial\, 'x^\alpha}{\partial y^\rho}\left\{\frac{\partial A^\rho}{\partial x^\mu} + \Gamma^\rho_{\mu\sigma} A^\sigma - \Gamma^\sigma_\mu \frac{\partial A^\rho}{\partial y^\sigma}\right\};$$

elle montre que les expressions

$$\overset{(1)}{\nabla}_\mu A^\lambda = \frac{\partial A^\lambda}{\partial x^\mu} + \Gamma^\lambda_{\mu\rho} A^\rho - \Gamma^\sigma_\mu \frac{\partial A^\lambda}{\partial y^\sigma} \tag{14 a}$$

sont les composantes d'un tenseur mixte du deuxième ordre. On établit de la même façon la covariance des expressions

$$\overset{(1)}{\nabla}_\mu B_\nu = \frac{\partial B_\nu}{\partial x_\mu} - \Gamma^\rho_{\mu\nu} B_\rho - \Gamma^\rho_\mu \frac{\partial B_\nu}{\partial y_\rho}, \tag{14 b}$$

$$\overset{(1)}{\nabla}_\mu f = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} - \Gamma^\rho_\mu \frac{\partial f}{\partial y^\rho}, \tag{14 c}$$

où $f$ est une fonction scalaire des variables $t$, $x^\alpha$, $y^\alpha$ et où $B_\nu$ sont les composantes d'un vecteur covariant. L'opération $\overset{(1)}{\nabla}_\mu$ s'étend facilement aux tenseurs d'ordres supérieurs. On a par exemple

$$\overset{(1)}{\nabla}_\mu C^{\cdot\cdot\nu}_{\alpha\lambda} = \frac{\partial C^{\cdot\cdot\nu}_{\alpha\lambda}}{\partial x^\mu} - \Gamma^\rho_{\mu\alpha} C^{\cdot\cdot\nu}_{\rho\lambda} - \Gamma^\rho_{\mu\lambda} C^{\cdot\cdot\nu}_{\alpha\rho} + \Gamma^\nu_{\mu\rho} C^{\cdot\cdot\rho}_{\alpha\lambda} - \Gamma^\rho_\mu \frac{\partial C^{\cdot\cdot\nu}_{\alpha\lambda}}{\partial y^\rho},$$

$C^{\cdot\cdot\nu}_{\alpha\lambda}$ étant les composantes d'un tenseur du troisième ordre. A l'opération désignée par le symbole $\overset{(1)}{\nabla}_\mu$ nous donnerons le nom de *dérivation covariante de première espèce.*

Différentions maintenant l'équation





$$'A^\alpha = \frac{\partial\, 'x^\alpha}{\partial x^\rho} A^\rho$$

par rapport à la variable $y^\mu$; il viendra

$$\frac{\partial\, 'A^\alpha}{\partial\, 'y^\rho} \frac{\partial\, 'y^\rho}{\partial y^\mu} = \frac{\partial\, 'x^\alpha}{\partial x^\rho} \frac{\partial A^\rho}{\partial y^\mu}.$$

En ayant égard à la relation (8), on peut mettre cette relation sous la forme suivante

$$\frac{\partial\, 'x^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial\, 'A^\alpha}{\partial\, 'y^\rho} = \frac{\partial\, 'x^\alpha}{\partial x^\rho} \frac{\partial A^\rho}{\partial y^\mu}.$$

Elle met en évidence le caractère tensoriel des expressions

$$\overset{(2)}{\nabla}_\mu A^\alpha = \frac{\partial A^\alpha}{\partial y^\mu}. \tag{15 a}$$

Dans le cas d'un vecteur covariant $\{B_\nu\}$ ou d'une fonction scalaire $f$ cette opération prend la même forme

$$\overset{(2)}{\nabla}_\mu B_\nu = \frac{\partial B_\nu}{\partial y^\mu}, \tag{15 b}$$

$$\overset{(2)}{\nabla}_\mu f = \frac{\partial f}{\partial y^\mu}. \tag{15 c}$$

Aux expressions ainsi définies nous donnerons le nom de *dérivées covariantes de deuxième espèce.*

On trouve une troisième opération covariante, si l'on différentie les équations $'A^\alpha = \frac{\partial\, 'x^\alpha}{\partial x^\rho} A^\rho$ par rapport à la variable $t$ et si l'on élimine ensuite les dérivées secondes des variables $'x^\alpha$, en se servant des relations (9). En appliquant le même procédé à un vecteur covariant $\{B_\lambda\}$ et à une fonction scalaire $f$, on vérifie facilement que les expresions

$$\overset{(3)}{\nabla} A^\alpha = \frac{\partial A^\alpha}{\partial t} + \Gamma^\alpha_\rho A^\rho + y^\rho \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\rho} - 2\Gamma^\rho \frac{\partial A^\alpha}{\partial y^\rho}, \tag{16 a}$$

$$\overset{(3)}{\nabla} B_\lambda = \frac{\partial B_\lambda}{\partial t} - \Gamma^\rho_\lambda B_\rho + y^\rho \frac{\partial B_\lambda}{\partial x^\rho} - 2\,\Gamma^\rho \frac{\partial B_\lambda}{\partial y^\rho} \tag{16 b}$$

sont respectivement les composantes d'un vecteur contravariant et d'un vecteur covariant et que l'expression

$$\overset{(3)}{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial t} + y^\rho \frac{\partial f}{\partial x^\rho} - 2\,\Gamma^\rho \frac{\partial f}{\partial y^\rho} \tag{16 c}$$

est une fonction scalaire. Dans le cas d'un $\{\varphi_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}\}$ cette opération *(dérivation covariante de troisième espèce)* prend la forme

$$\overset{(3)}{\nabla} \varphi_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} = \frac{\partial \varphi_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}}{\partial t} - \Gamma^\rho_\lambda \varphi_{\rho\mu}^{\cdot\cdot\nu} - \Gamma^\rho_\mu \varphi_{\lambda\rho}^{\cdot\cdot\nu} + \Gamma^\nu_\rho \varphi_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\rho} + y^\rho \frac{\partial \varphi_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}}{\partial x^\rho} - 2\,\Gamma^\rho \frac{\partial \varphi_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}}{\partial y^\rho}.$$

On remarquera que dans les expressions des dérivées covariantes de différentes espèces interviennent trois systèmes de coefficients $\Gamma^\varkappa$, $\Gamma^\varkappa_\lambda$, $\Gamma^\varkappa_{\lambda\mu}$, liés par les relations (6); nous rappellerons aussi que les $\Gamma^\varkappa_{\lambda\mu}$ sont *symétriques* en deux indices inférieurs (équ. (7)).

Maintenant nous nous proposons de calculer les différences

$$\overset{(1)}{\nabla}_\varkappa \overset{(2)}{\nabla}_\lambda A^\mu - \overset{(2)}{\nabla}_\lambda \overset{(1)}{\nabla}_\varkappa A^\mu,\quad \overset{(1)}{\nabla}_\varkappa \overset{(3)}{\nabla} A^\mu - \overset{(3)}{\nabla} \overset{(1)}{\nabla}_\varkappa A^\mu \text{ et } \overset{(2)}{\nabla}_\varkappa \overset{(3)}{\nabla} A^\mu - \overset{(3)}{\nabla} \overset{(2)}{\nabla}_\varkappa A^\mu.$$

En employant les formules (14 a), (15 a) et (16 a), on trouve successivement

$$\overset{(1)}{\nabla}_\varkappa \overset{(1)}{\nabla}_\lambda A^\mu - \overset{(1)}{\nabla}_\lambda \overset{(1)}{\nabla}_\varkappa A^\mu = - R_{\varkappa\lambda\rho}^{\cdot\cdot\cdot\mu} A^\rho + K_{\varkappa\lambda}^{\cdot\cdot\rho} \overset{(2)}{\nabla}_\rho A^\mu, \tag{17}$$

$$\overset{(1)}{\nabla}_\varkappa \overset{(2)}{\nabla}_\lambda A^\mu - \overset{(2)}{\nabla}_\lambda \overset{(1)}{\nabla}_\varkappa A^\mu = - B_{\varkappa\lambda\rho}^{\cdot\cdot\cdot\mu} A^\rho, \tag{18}$$

$$\overset{(1)}{\nabla}_\varkappa \overset{(3)}{\nabla} A^\mu - \overset{(3)}{\nabla} \overset{(1)}{\nabla}_\varkappa A^\mu = - W_{\varkappa\rho}^{\cdot\cdot\mu} A^\rho + V_\varkappa^{\cdot\rho} \overset{(2)}{\nabla}_\rho A^\mu, \tag{19}$$

$$\overset{(2)}{\nabla}_\varkappa \overset{(3)}{\nabla} A^\mu - \overset{(3)}{\nabla} \overset{(2)}{\nabla}_\varkappa A^\mu = \overset{(1)}{\nabla}_\varkappa A^\mu, \tag{20}$$

où l'on a posé

$$V_\varkappa^{\cdot\lambda} = \frac{\partial \Gamma^\lambda_\varkappa}{\partial t} - 2\frac{\partial \Gamma^\lambda}{\partial x^\varkappa} + \Gamma^\rho_\varkappa \Gamma^\lambda_\rho - 2\,\Gamma^\rho\,\Gamma^\lambda_{\varkappa\rho} + y^\rho \frac{\partial \Gamma^\lambda_\varkappa}{\partial x^\rho}, \tag{21}$$





$$K_{\varkappa\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\mu} = \frac{\partial \Gamma^\mu_\varkappa}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial \Gamma^\mu_\lambda}{\partial x^\varkappa} + \Gamma^\rho_\varkappa \Gamma^\mu_{\lambda\rho} - \Gamma^\rho_\lambda \Gamma^\mu_{\varkappa\rho}, \tag{22}$$

$$W_{\varkappa\lambda}^{\cdot\cdot\mu} = \frac{\partial \Gamma^\mu_{\varkappa\lambda}}{\partial t} - \frac{\partial \Gamma^\mu_\lambda}{\partial x^\varkappa} + \Gamma^\mu_\rho \Gamma^\rho_{\varkappa\lambda} - \Gamma^\rho_\lambda \Gamma^\mu_{\varkappa\rho} - 2\,\Gamma^\rho \frac{\partial \Gamma^\mu_{\varkappa\lambda}}{\partial y^\rho} + y^\rho \frac{\partial \Gamma^\mu_{\varkappa\lambda}}{\partial x^\rho}, \tag{23}$$

$$R_{\varkappa\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = \frac{\partial \Gamma^\nu_{\mu\varkappa}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial \Gamma^\nu_{\mu\lambda}}{\partial x^\varkappa} + \Gamma^\rho_{\mu\varkappa} \Gamma^\nu_{\lambda\rho} - \Gamma^\rho_{\lambda\mu} \Gamma^\nu_{\varkappa\rho} + \Gamma^\rho_\varkappa \frac{\partial \Gamma^\nu_{\mu\lambda}}{\partial y^\rho} - \Gamma^\rho_\lambda \frac{\partial \Gamma^\nu_{\mu\varkappa}}{\partial y^\rho}, \tag{24}$$

$$B_{\varkappa\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = \frac{\partial \Gamma^\nu_{\varkappa\lambda}}{\partial y^\mu} = \frac{\partial^3 \Gamma^\nu}{\partial y^\varkappa\, \partial y^\lambda\, \partial y^\mu}. \tag{25}$$

Les égalités ci-dessus montrent immédiatement que *les quantités désignées par les symboles* $V_\varkappa^{\cdot\lambda}$, $K_{\varkappa\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\mu}$, $W_{\varkappa\lambda}^{\cdot\cdot\mu}$, $R_{\varkappa\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ et $B_{\varkappa\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ *représentent les composantes des tenseurs covariants du système* (1) *vis-à-vis du groupe de transformations* (3). On vérifie aussi facilement sur les formules (21) — (25) que le tenseur $B_{\varkappa\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ est *symétrique* en trois indices inférieurs et que les affineurs $K_{\varkappa\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\mu}$ et $R_{\varkappa\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ jouissent des propiétés qui s'expriment par les relations suivantes

$$\begin{gathered} K_{\varkappa\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\mu} + K_{\lambda\varkappa}^{\cdot\cdot\cdot\mu} = 0, \\ R_{\varkappa\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\nu} + R_{\lambda\varkappa\mu}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = 0, \qquad R_{\varkappa\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\nu} + R_{\lambda\mu\varkappa}^{\cdot\cdot\cdot\nu} + R_{\mu\varkappa\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = 0. \end{gathered} \tag{26}$$

Une autre conséquence immédiate des équations mentionnées plus haut sont les égalités

$$R_{\varkappa\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = \frac{\partial K_{\varkappa\lambda}^{\cdot\cdot\nu}}{\partial y^\mu}, \tag{27}$$

$$K_{\varkappa\lambda}^{\cdot\cdot\mu} = W_{\varkappa\lambda}^{\cdot\cdot\mu} - W_{\lambda\varkappa}^{\cdot\cdot\mu}, \qquad W_{\varkappa\lambda}^{\cdot\cdot\mu} + K_{\varkappa\lambda}^{\cdot\cdot\mu} = \frac{\partial V_\varkappa^{\cdot\mu}}{\partial y^\lambda}. \tag{28}$$

Nous obtiendrons dans le $n^{\underline{o}}$ suivant d'autres relations entre les covariants du système (1).

En vue des applications ultérieures nous donnerons ici encore quelques relations entre les dérivées covariantes d'une fonction scalaire $f$. Pour simplifier l'écriture posons

$$X_\lambda f = \overset{(1)}{\nabla}_\lambda f, \qquad Y_\lambda f = \overset{(2)}{\nabla}_\lambda f, \qquad T f = \overset{(3)}{\nabla} f. \tag{29}$$

En partant des formules (14 c), (15 c) et (16 c), on établit sans peine les relations suivantes

$$(X_\varkappa X_\lambda) = K_{\varkappa\lambda}^{\cdot\cdot\rho} Y_\rho f, \qquad (X_\varkappa T) = -\Gamma_\varkappa^\rho X_\rho f + V_\varkappa^{\cdot\rho} Y_\rho f, \qquad (Y_\lambda T) =$$

$$= X_\lambda f - \Gamma_\lambda^\rho Y_\rho f. \tag{30}$$

Telles sont les égalités que nous avions en vue. Remarquons que les expresions $(X_\varkappa T)$ et $(Y_\lambda T)$ ne jouissent pas du caractère tensoriel.

Considérons maintenant une fonction quelconque $f$ des variables $t$, $x^\varkappa$, $y^\varkappa$; on démontrera facilement, en se servant des formules (14 c), (15 c) et (16 c), l'identité ci-dessous

$$df = \overset{(1)}{\omega}{}^\rho \overset{(1)}{\nabla}_\rho f + \overset{(2)}{\omega}{}^\rho \overset{(2)}{\nabla}_\rho f + dt \overset{(3)}{\nabla} f, \tag{31}$$

où l'on a posé

$$\overset{(1)}{\omega}{}^\rho = dx^\rho - y^\rho dt, \quad \overset{(2)}{\omega}{}^\rho = dy^\rho + 2\Gamma^\rho dt + \Gamma_\sigma^\rho (dx^\sigma - y^\sigma dt). \tag{32}$$

On en conclut que les formes pfaffiennes $\overset{(1)}{\omega}{}^\rho$, $\overset{(2)}{\omega}{}^\rho$ sont les composantes de deux vecteurs infinitésimaux contravariants, c'est ce qu'on peut d'ailleurs vérifier par un calcul direct, en s'aidant des relations (3), (4) et (9). Cela nous conduit à une extension à la variété $(\mathcal{C})$ de la notion de *différentielle absolue* d'un vecteur; en la désignant par le symbole $\delta$, on aura par définition

$$\begin{aligned} \delta A^\varkappa &= \overset{(1)}{\omega}{}^\rho \overset{(1)}{\nabla}_\rho A^\varkappa + \overset{(2)}{\omega}{}^\rho \overset{(2)}{\nabla}_\rho A^\varkappa + dt \overset{(3)}{\nabla} A^\varkappa, \\ \delta B_\varkappa &= \overset{(1)}{\omega}{}^\rho \overset{(1)}{\nabla}_\rho B_\varkappa + \overset{(2)}{\omega}{}^\rho \overset{(2)}{\nabla}_\rho B_\varkappa + dt \overset{(3)}{\nabla} B_\varkappa \end{aligned} \tag{33}$$

ou, en explicitant les formules,

$$\begin{aligned} \delta A^\varkappa &= dA^\varkappa + \Gamma_{\rho\sigma}^\varkappa A^\rho (dx^\sigma - y^\sigma dt) + \Gamma_\rho^\varkappa A^\rho dt, \\ \delta B_\varkappa &= dB_\varkappa - \Gamma_{\varkappa\sigma}^\rho B_\rho (dx^\sigma - y^\sigma dt) + \Gamma_\varkappa^\rho B_\rho dt. \end{aligned} \tag{34}$$

Nous pouvons donc dire que les formules (33), qui s'étendent d'une manière évidente aux tenseurs quelconques, établissent dans la variété $(\mathcal{C})$ une *connexion affine généralisée* que nous désignerons dans la suite par le symbole $Z_n$; les coefficients $\Gamma^\varkappa$, $\Gamma_\lambda^\varkappa$, $\Gamma_\varkappa^{\lambda\mu}$ porteront le nom de *composantes*





*de la connexion $Z_n$.* Rappelons que les relations (9) donnent les lois de la transformation de ces composantes. La connexion $Z_n$ est douée de cinq *courbures* dont les composantes nous avons désignées plus haut par les symboles $V_\varkappa^{\cdot\lambda}$, $K_{\varkappa\lambda}^{\cdot\cdot\mu}$, $W_{\varkappa\lambda}^{\cdot\cdot\mu}$, $R_{\varkappa\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$, $B_{\varkappa\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$. Remarquons que, si la courbure $V_\varkappa^{\cdot\lambda}$ est nulle, il en est de même pour les courbures $K_{\varkappa\lambda}^{\cdot\cdot\mu}$, $W_{\varkappa\lambda}^{\cdot\cdot\mu}$ et $R_{\varkappa\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$; cela est une conséquence immédiate des identités (27) et (28).

3. **Les équations de structure de la connexion $Z_n$.** Revenons aux formes $\overset{(1)}{\omega}{}^\varkappa$ et $\overset{(2)}{\omega}{}^\varkappa$, définies par les équations (32) et posons encore

$$\omega_\lambda^\varkappa = \Gamma_\lambda^\varkappa dt + \Gamma_{\rho\lambda}^\varkappa (dx^\rho - y^\rho dt). \tag{35}$$

En différentiant extérieurement les équations (32) et (35), on trouve successivement

$$(\overset{(1)}{\omega}{}^\varkappa)' + [\omega_\rho^\varkappa \overset{(1)}{\omega}{}^\rho] = -[\overset{(2)}{\omega}{}^\varkappa dt], \tag{36}$$

$$(\overset{(2)}{\omega}{}^\varkappa)' + [\omega_\rho^\varkappa \overset{(2)}{\omega}{}^\rho] = -V_\rho^{\cdot\varkappa} [\overset{(1)}{\omega}{}^\rho dt] - \tfrac{1}{2} K_{\rho\sigma}^{\cdot\cdot\varkappa} [\overset{(1)}{\omega}{}^\rho \overset{(1)}{\omega}{}^\sigma] \tag{37}$$

et

$$(\omega_\lambda^\varkappa)' + [\omega_\rho^\varkappa \omega_\lambda^\rho] = -\tfrac{1}{2} R_{\rho\sigma\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} [\overset{(1)}{\omega}{}^\rho \overset{(1)}{\omega}{}^\sigma] - B_{\rho\sigma\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} [\overset{(1)}{\omega}{}^\rho \overset{(2)}{\omega}{}^\sigma] + W_{\rho\lambda}^{\cdot\cdot\varkappa} [dt \overset{(1)}{\omega}{}^\rho]. \tag{38}$$

Telles sont les *équations de structure de la connexion $Z_n$.*

La différentiation extérieure des équations (36) conduit aux relations

$$R_{\rho\sigma\tau}^{\cdot\cdot\cdot\lambda} + R_{\sigma\tau\rho}^{\cdot\cdot\cdot\lambda} + R_{\tau\rho\sigma}^{\cdot\cdot\cdot\lambda} = 0, \quad K_{\rho\sigma}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} = W_{\rho\sigma}^{\cdot\cdot\varkappa} - W_{\sigma\rho}^{\cdot\cdot\varkappa};$$

d'après une remarque antérieure (*n*° 2) ces relations résultent aussi immédiatement des équations de définition (22), (23) et (24). De même, les équations (37) donnent naissance aux relations

$$R_{\varkappa\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = \overset{(2)}{\nabla}_\mu K_{\varkappa\lambda}^{\cdot\cdot\nu}, \tag{39}$$

$$K_{\varkappa\lambda}^{\cdot\cdot\nu} + W_{\varkappa\lambda}^{\cdot\cdot\nu} = \overset{(2)}{\nabla}_\lambda V_\varkappa^{\cdot\nu}, \tag{40}$$

$$\overset{(1)}{\nabla}_{[\varkappa} K_{\lambda\mu]}^{\cdot\cdot\nu} = 0, \tag{41}$$

$$\overset{(3)}{\nabla} K_{\varkappa\lambda}^{\cdot\cdot\mu} = -2 \overset{(1)}{\nabla}_{[\varkappa} V_{\lambda]}^{\cdot\mu}. \tag{42}$$

Si enfin on différentie extérieurement les équations (38), on obtient les identités suivantes

$$\overset{(1)}{\nabla}_{[\iota} R_{\varkappa\lambda]\mu}^{\cdot\cdot\cdot\nu} + K_{[\iota\varkappa}^{\cdot\cdot\rho} B_{\lambda]\rho\mu}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = 0, \tag{42}$$

$$\overset{(2)}{\nabla}_{\iota} R_{\varkappa\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\nu} + 2\,\overset{(1)}{\nabla}_{[\varkappa} B_{\lambda]\iota\mu}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = 0, \tag{43}$$

$$\overset{(3)}{\nabla} R_{\varkappa\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\nu} + 2\,\overset{(1)}{\nabla}_{[\varkappa} W_{\lambda]\mu}^{\cdot\cdot\nu} - 2\, V_{[\varkappa}^{\cdot\rho} B_{\lambda]\rho\mu}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = 0, \tag{44}$$

$$\overset{(3)}{\nabla} B_{\varkappa\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\nu} - \overset{(2)}{\nabla}_{\varkappa} W_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} = 0. \tag{45}$$

Toutes ces identités trouvées plus haut généralisent celles de Bianchi.

**4. Cas particuliers.** a) Supposons la courbure $V_{\lambda}^{\cdot\mu}$ nulle; on aura donc aussi $K_{\varkappa\lambda}^{\cdot\cdot\mu}=0$ (v. la remarque faite à la fin du $n^0$ **2**). Nous allons montrer que, dans cette hypothèse, le problème d'intégration du système (1) peut être simplifié, en se ramenant à l'intégration successive de deux systèmes différentiels dont chacun est formé de $n$ équations du premier ordre à $n$ inconnues. Remarquons en premier lieu que nous pouvons remplacer le système susdit par les équations

$$\frac{dx^1}{y^1} = \ldots = \frac{dx^n}{y^n} = \frac{dy}{-\Gamma^1} = \ldots = \frac{dy^n}{-\Gamma^n} = dt. \tag{46}$$

Ce dernier système, dont l'intégration exige en général des opérations d'ordres $2n$, $2n-1, \ldots, 1$, est équivalent à l'équation

$$Tf = \frac{\partial f}{\partial t} + y^\rho \frac{\partial f}{\partial x^\rho} - 2\,\Gamma^\rho \frac{\partial f}{\partial y^\rho} = 0.$$

Or, dans le cas actuel, les équations

$$X_\varkappa f = 0, \quad Tf = 0 \tag{47}$$

constituent, en vertu des relations (30), un système complet.

D'après l'identité (cf. $n^0$ **2**, équ. (31) et (29))

$$df = \overset{(1)}{\omega}{}^\rho X_\rho f + \overset{(2)}{\omega}{}^\rho Y_\rho f + dt\, Tf$$

au système complet (47) correspond le système complètement intégrable formé d'équations





$$\overset{(2)}{\omega}{}^\rho = 0. \tag{48}$$

Cela résulte aussi des équations de structure (37). L'intégration du système (47) ou, ce qui est la même chose, du système (48), exige des opérations d'ordres $n$, $n-1, \ldots, 1$. Si on égale les $n$ intégrales indépendantes du système (47) à des constantes arbitraires, le système (46) se réduit à $n$ équations différentielles du premier ordre à $n$ inconnues; l'intégration de ce dernier système exige des opérations d'ordres $n$, $n-1, \ldots, 1$.

Il résulte de cela la conséquence suivante: *si la courbure $V_{\mu}^{\lambda}$ est nulle, l'intégration du système* (1) *peut être effectuée au moyen des opérations successives d'ordres $n$, $n-1, \ldots, 1$, $n$, $n-1, \ldots, 1$ au lieu des opérations d'ordres $2n$, $2n-1, \ldots, 1$ qui sont nécessaires dans le cas général.*

Appliquons ce résultat au cas $n=1$. Ici le système (1) se compose d'une seule équation

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\,\Gamma\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) = 0 \tag{49}$$

qui est équivalente au système

$$\frac{dx}{dt} - y = 0, \quad \frac{dy}{dt} + 2\,\Gamma(t, x, y) = 0.$$

Les composantes $\Gamma_{\lambda}^{\mu}$, $\Gamma_{\varkappa\lambda}^{\mu}$ se réduisent à deux seulement: $\Gamma_1^1 = \dfrac{\partial \Gamma}{\partial y}$, $\Gamma_{11}^1 = \dfrac{\partial^2 \Gamma}{\partial y^2}$ et les courbures $K_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\mu}$, $R_{\varkappa\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ sont identiquement nulles. La courbure $V_{\varkappa}^{\cdot\lambda}$ a une seule composante $V_1^{\cdot 1}$ qui peut être mise sous la forme suivante

$$V = \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t\, \partial y} - 2\,\frac{\partial \Gamma}{\partial x} + \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial y}\right)^2 - 2\,\Gamma\,\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial y^2} + y\,\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x\, \partial y}$$

et qui est une fonction scalaire (invariante). Le système (48) se réduit ici à l'équation unique

$$dy + 2\,\Gamma\, dt + \frac{\partial \Gamma}{\partial y}(dx - y\, dt) = 0. \tag{50}$$

D'après le théorème précédent, si $V=0$, cette équation est complètement intégrable et son intégrale générale peut être présentée sous la

forme $y = \varphi(t, x, C)$, $C$ étant une constante arbitraire. En comparant cette relation à l'equation $\frac{dx}{dt} = y$, on obtient

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(t, x, C).$$

On voit donc que, si l'on a $V = 0$, l'intégration de l'équation (49) se réduit à l'intégration successive de deux équations différentielles ordinaires du premier ordre à une inconnnue.

**b)** Maintenant nous nous proposons d'étudier un cas plus spécial, en supposant

$$V_{\lambda}^{\cdot\mu} = 0, \quad B_{\varkappa\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = 0. \tag{51}$$

Nous allons démontrer que, les hypothèses ci-dessus étant admises, le système (1) peut être transformé, au moyen d'une transformation de la forme (3), en le système suivant

$$\frac{d^2 x^{\varkappa}}{dt^2} = 0.$$

Remarquons pour ce but que, d'après la definition (25) du tenseur $B_{\varkappa\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ et d'après la deuxième des hypothèses (51), les fonctions $\Gamma^{\mu}(t, x, y)$ sont des polynomes du second degré en $y^{\varkappa}$. On peut donc poser

$$2\,\Gamma^{\mu} = A_{\rho\sigma}^{\mu}\, y^{\rho} y^{\sigma} + 2\, B_{\rho}^{\mu}\, y^{\rho} + C^{\mu}, \tag{52}$$

$A_{\rho\sigma}^{\mu} = A_{\sigma\rho}^{\mu}$, $B_{\rho}^{\mu}$, $C^{\mu}$ étant des fonctions des variables $t, x^{\mu}$. Il s'en suit que l'on a

$$\Gamma_{\lambda}^{\mu} = \frac{\partial \Gamma^{\mu}}{\partial y^{\lambda}} = A_{\lambda\rho}^{\mu}\, y^{\rho} + B_{\lambda}^{\mu}, \quad \Gamma_{\varkappa\lambda}^{\mu} = A_{\varkappa\lambda}^{\mu}. \tag{53}$$

Donc, en tenant compte de la formule (22), l'équation $K_{\varkappa\lambda}^{\cdot\cdot\mu} = 0$, qui est une conséquence de l'hypothése $V_{\lambda}^{\cdot\mu} = 0$, prend ici la forme

$$\frac{\partial A_{\varkappa\rho}^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} y^{\rho} - \frac{\partial A_{\lambda\rho}^{\mu}}{\partial x^{\varkappa}} y^{\rho} + \frac{\partial B_{\varkappa}^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial B_{\lambda}^{\mu}}{\partial x^{\varkappa}} + A_{\lambda\rho}^{\mu}\,(A_{\varkappa\sigma}^{\rho} y^{\sigma} + B_{\varkappa}^{\rho}) - A_{\varkappa\rho}^{\mu}\,(A_{\lambda\sigma}^{\rho} y^{\sigma} + B_{\lambda}^{\rho}) = 0,$$

d'où l'on déduit les deux identités suivantes

$$\frac{\partial A_{\iota\varkappa}^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial A_{\iota\lambda}^{\mu}}{\partial x^{\varkappa}} + A_{\iota\varkappa}^{\rho} A_{\lambda\rho}^{\mu} - A_{\iota\lambda}^{\rho} A_{\varkappa\rho}^{\mu} = 0, \tag{54 a}$$





$$\frac{\partial B_{\varkappa}^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial B_{\lambda}^{\mu}}{\partial x^{\varkappa}} + A_{\lambda\rho}^{\mu} B_{\varkappa}^{\rho} - A_{\varkappa\rho}^{\mu} B_{\lambda}^{\rho} = 0. \tag{54 b}$$

De même, en tenant compte de la définition (21) la première des hypothèses (51) peut s'écrire comme il suit

$$\frac{\partial A_{\lambda\rho}^{\mu}}{\partial t} y^{\rho} - 2\,\frac{\partial B_{\rho}^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} y^{\rho} - \frac{\partial A_{\rho\sigma}^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} y^{\rho} y^{\sigma} + \frac{\partial B_{\lambda}^{\mu}}{\partial t} - \frac{\partial C^{\mu}}{\partial x^{\lambda}}$$

$$+ (A_{\lambda\rho}^{\tau} y^{\rho} + B_{\lambda}^{\tau})\,(A_{\tau\sigma}^{\mu} y^{\sigma} + B_{\tau}^{\mu}) - A_{\lambda\tau}^{\mu}\,(A_{\rho\sigma}^{\tau} y^{\rho} y^{\sigma} + 2\, B_{\rho}^{\tau} y^{\rho} + C^{\tau})$$

$$+ y^{\rho}\left(\frac{\partial A_{\lambda\sigma}^{\mu}}{\partial x^{\rho}} y^{\sigma} + \frac{\partial B_{\lambda}^{\mu}}{\partial x^{\rho}}\right) = 0.$$

Cette dernière relation conduit à son tour aux trois identités

$$\frac{\partial A_{\iota\lambda}^{\mu}}{\partial x^{\varkappa}} + \frac{\partial A_{\iota\varkappa}^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} - 2\,\frac{\partial A_{\varkappa\lambda}^{\mu}}{\partial x^{\iota}} + A_{\iota\lambda}^{\rho} A_{\varkappa\rho}^{\mu} + A_{\iota\varkappa}^{\rho} A_{\lambda\rho}^{\mu} - 2\, A_{\varkappa\lambda}^{\rho} A_{\iota\rho}^{\mu} = 0,$$

$$\frac{\partial A_{\varkappa\lambda}^{\mu}}{\partial t} + \frac{\partial B_{\lambda}^{\mu}}{\partial x^{\varkappa}} - 2\,\frac{\partial B_{\varkappa}^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} + A_{\varkappa\lambda}^{\rho} B_{\rho}^{\mu} + A_{\varkappa\rho}^{\mu} B_{\lambda}^{\rho} - 2\, A_{\rho\lambda}^{\mu} B_{\varkappa}^{\rho} = 0, \tag{55}$$

$$\frac{\partial B_{\lambda}^{\mu}}{\partial t} - \frac{\partial C^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} + B_{\lambda}^{\rho} B_{\rho}^{\mu} - A_{\lambda\rho}^{\mu} C^{\rho} = 0.$$

Il est facile de vérifier que les relations (54) et (55) se réduisent aux suivantes

$$\frac{\partial A_{\iota\varkappa}^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial A_{\iota\lambda}^{\mu}}{\partial x^{\varkappa}} + A_{\iota\varkappa}^{\rho} A_{\lambda\rho}^{\mu} - A_{\iota\lambda}^{\rho} A_{\varkappa\rho}^{\mu} = 0,$$

$$\frac{\partial A_{\varkappa\lambda}^{\mu}}{2\,t} - \frac{\partial B_{\varkappa}^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} + A_{\varkappa\lambda}^{\rho} B_{\rho}^{\mu} - A_{\lambda\rho}^{\mu} B_{\varkappa}^{\rho} = 0, \tag{55}$$

$$\frac{\partial B_{\lambda}^{\mu}}{\partial t} - \frac{\partial C^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} + B_{\lambda}^{\rho} B_{\rho}^{\mu} - A_{\lambda\rho}^{\mu} C^{\rho} = 0$$

qui sont indépendantes. .

Rappelons maintenant que, d'après les résultats obtenus dans la première partie de ce $n^0$, le système d'équations

$$\overset{(1)}{\omega}{}^{\mu} = d\,y^{\mu} + 2\,\Gamma^{\mu}\,dt + \Gamma_{\rho}^{\mu}\,(dx^{\rho} - y^{\rho}\,dt) = 0 \tag{57}$$

est complètement intégrable, les conditions d'intégrabilité $V_{\lambda}^{\mu} = 0$ étant

par hypothèse satisfaites. En portant les expressions (52) et (53) dans les équations (57), on trouve

$$\overset{(2)}{\omega}{}^{\mu} = dy^{\mu} + (A^{\mu}_{\rho\sigma} y^{\sigma} + B^{\mu}_{\rho})\, dx^{\rho} + (B^{\mu}_{\sigma} y^{\sigma} + C^{\mu})\, dt = 0. \tag{58}$$

Il est évident, d'après la forme des équations (58), que l'intégrale générale de ce système peut être mise sous la forme suivante

$$M^{\lambda}_{\mu} y^{\mu} + N^{\lambda} = c^{\lambda}, \tag{59}$$

où l'on a désigné par les symboles $M^{\lambda}_{\mu}$, $N^{\lambda}$ des fonctions des variables $t$, $x^{\varkappa}$ et par les symboles $c^{\lambda}$ des constantes arbitraires. Pour que les relations ci-dessus représentent l'intégrale générale du système (58), il faut et il suffit que l'on ait

$$\|M^{\lambda}_{\mu}\| \neq 0 \tag{60}$$

et que les égalités $d(M^{\lambda}_{\mu} y^{\mu} + N^{\lambda}) = 0$ soient des conséquences des équations (58). En développant ces dernières relations et en y portant les expressions des différentielles $dy^{\mu}$ tirées des équations (58), on est conduit aux équations

$$\frac{\partial M^{\lambda}_{\mu}}{\partial x^{\nu}} y^{\mu} + \frac{\partial N^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} - M^{\lambda}_{\rho} (A^{\rho}_{\nu\mu} y^{\mu} + B^{\rho}_{\nu}) = 0,$$

$$\frac{\partial M^{\lambda}_{\mu}}{\partial t} y^{\mu} + \frac{\partial N^{\lambda}}{\partial t} - M^{\lambda}_{\rho} (B^{\rho}_{\mu} y^{\mu} + C^{\rho}) = 0.$$

qui de son coté donnent naissance aux quatre relations nouvelles

$$\begin{aligned} \frac{\partial M^{\lambda}_{\mu}}{\partial x^{\nu}} &= A^{\rho}_{\mu\nu} M^{\lambda}_{\rho}, & \frac{\partial M^{\lambda}_{\mu}}{\partial t} &= B^{\rho}_{\mu} M^{\lambda}_{\rho}, \\ \frac{\partial N^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} &= B^{\rho}_{\nu} M^{\lambda}_{\rho}, & \frac{\partial N^{\lambda}}{\partial t} &= C^{\rho} M^{\lambda}_{\rho}. \end{aligned} \tag{61}$$

On vérifie facilement que les conditions d'intégrabilité des équations (61) sont identiquement satisfaites en vertu des relations (56) et que la détermination des inconnues $M^{\lambda}_{\mu}$, $N^{\lambda}$ exige $n(n+1)$ quadratures. Remarquons aussi que les fonctions $M^{\lambda}_{\mu}$ peuvent être déterminées de façon que l'inégalité (60) soit satisfaite pour un système arbitrairement choisi des valeurs $x^{\varkappa} = \overset{0}{x}{}^{\varkappa}$, $t = \overset{0}{t}$ et, par conséquent, dans un voisinage convenable de ces valeurs.





Ceci étant, on s'aperçoit immédiatement que les équations (61) entraînent les relations suivantes

$$\frac{\partial M^{\lambda}_{\mu}}{\partial x^{\nu}} = \frac{\partial M^{\lambda}_{\nu}}{\partial x^{\mu}}, \quad \frac{\partial M^{\lambda}_{\mu}}{\partial t} = \frac{\partial N^{\lambda}}{\partial x^{\mu}};$$

il existe donc $n$ fonctions $\Phi^{\lambda}$ des variables $t$, $x^{\varkappa}$ telles que l'on ait

$$M^{\lambda}_{\mu} = \frac{\partial \Phi^{\lambda}}{\partial x^{\mu}}, \quad N^{\lambda} = \frac{\partial \Phi^{\lambda}}{\partial t}, \tag{62}$$

leur détermination exigeant $n$ nouvelles quadratures. En rapprochant les équations (59) et (62), on peut présenter l'intégrale générale du système (58) sous la forme suivante

$$\frac{\partial \Phi^{\lambda}}{\partial x^{\mu}} y^{\mu} + \frac{\partial \Phi^{\lambda}}{\partial t} = c^{\lambda}. \tag{63}$$

Remarquons aussi que, d'après ce qui précède et d'après les relations (60) et (62), le déterminant $\left\| \frac{\partial \Phi^{\lambda}}{\partial x^{\mu}} \right\|$ est différent de zéro dans un voisinage des valeurs $\overset{0}{x}{}^{\varkappa}$, $\overset{0}{t}$. Donc, si l'on pose

$$'x^{\lambda} = \Phi^{\lambda}(t, x^{1}, \ldots, x^{n}) \quad 't = t, \tag{64}$$

on obtient une transformation de la forme (3), qui, prolongée aux variables $y^{\lambda}$, conduit aux formules

$$'y^{\lambda} = \frac{\partial \Phi^{\lambda}}{\partial x^{\mu}} y^{\mu} + \frac{\partial \Phi^{\lambda}}{\partial t}. \tag{65}$$

Si l'on assujettit le système (1) à la transformation (64), l'intégrale générale du système d'équations, transformé du système (58), prendra la forme $'y^{\lambda} = c^{\lambda}$; cette remarque est une conséquence immédiate des équations (63) et (65). On en conclut que le système (58) lui-même sera changé en le système suivant

$$'\overset{(2)}{\omega}{}^{\mu} = d\,'y^{\mu} = 0.$$

Eu égard à la définition (32) des formes $\overset{(2)}{\omega}{}^{\mu}$, on en déduira les identités

$$'\Gamma^{\mu} = 0.$$

Ceci prouve que les équations (1) prendront la forme

$$\frac{d^2\,'x^\mu}{d\,'t^2}=0,$$

c'est ce qu'il fallait démontrer. On voit en outre que l'intégrale générale du système (1) peut être écrite de la façon suivante

$$\Phi^\lambda(t, x^1, \ldots, x^n) = c^\lambda\, t + d^\lambda,$$

$c^\lambda$ et $d^\lambda$ étant des constantes arbitraires; comme on a vu, on obtient cette intégrale au moyen des $n(n+2)$ quadratures.

On peut donc, en résumant, énoncer la proposition suivante:

*Pour que le système d'équations*

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d t^2} + 2\,\Gamma^\alpha\left(t, x, \frac{dx}{d t}\right) = 0$$

*puisse être transformé, au moyen d'une transformation de la forme*

$$'x^\alpha = 'x^\alpha(t, x^1, \ldots, x^n), \quad 't = t,$$

*en le système suivant*

$$\frac{d^2\,'x^\alpha}{d\,'t^2} = 0,$$

*il faut et il suffit que l'on ait*

$$V_\lambda^{\cdot\mu} = 0, \quad B_{\alpha\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = 0;$$

*si ces conditions sont satisfaites, l'intégrale générale du système donné s'obtient par $n(n+2)$ quadratures.*

**5. Probleme d'équivalence.** Abordons maintenant le problème d'équivalence de deux systèmes

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d t^2} + 2\,\Gamma^\alpha\left(t, x, \frac{dx}{d t}\right) = 0 \tag{1}$$

et

$$\frac{d^2\,'x^\alpha}{d t^2} + 2\,'\Gamma^\alpha\left('t, 'x, \frac{d\,'x}{d\,'t}\right) = 0 \tag{1'}$$

vis-à-vis d'un changement de variables de la forme suivante

$$'x^\alpha = 'x^\alpha(t, x^1, \ldots, x^n), \quad 't = t. \tag{3}$$

Comme auparavant nous allons remplacer les systèmes ci-dessus par les





systèmes du premier ordre

$$d x^\alpha - y^\alpha\, d t = 0, \quad d y^\alpha + 2\,\Gamma^\alpha(t, x, y)\, d t = 0. \tag{2}$$

$$d\,'x^\alpha - 'y^\alpha\, d\,'t = 0, \quad d\,'y^\alpha + 2\,'\Gamma^\alpha('t, 'x, 'y)\, d\,'t = 0, \tag{2'}$$

et le groupe (3) par le groupe prolongé

$$'x^\alpha = 'x^\alpha(t, x^1, \ldots, x^n), \quad 't = t, \quad 'y^\alpha = \frac{\partial\,'x^\alpha}{\partial x^\rho} y^\rho + \frac{\partial\,'x^\alpha}{\partial t}. \tag{66}$$

Ceci posé, rappelons en premier lieu que parmi les tenseurs covariants au système (2) vis-à-vis du groupe infini (66) il se trouve plusieurs vecteurs covariants comme $K_{\alpha\rho}^{\cdot\cdot\rho}$, $W_{\alpha\rho}^{\cdot\cdot\rho}$, $V_\alpha^{\cdot\sigma} K_{\sigma\rho}^{\cdot\cdot\rho}$, $V_\alpha^{\cdot\sigma} W_{\sigma\rho}^{\cdot\cdot\rho}$, $\overset{(1)}{\nabla}_\alpha V_\rho^{\cdot\rho}$, $\overset{(2)}{\nabla}_\alpha V_\rho^{\cdot\rho}$; de plus, l'opération $\overset{(3)}{\nabla}$ permet de déduire de chacun de ces vecteurs une suite illimitée de nouveaux vecteurs covariants, le vecteur $K_{\alpha\rho}^{\cdot\cdot\rho}$, par exemple, donnant naissance aux grandeurs suivantes

$$\overset{(3)}{\nabla} K_{\alpha\rho}^{\cdot\cdot\rho}, \quad \overset{(3)(3)}{\nabla\nabla} K_{\alpha\rho}^{\cdot\cdot\rho}, \quad \overset{(3)(3)(3)}{\nabla\nabla\nabla} K_{\alpha\rho}^{\cdot\cdot\rho}, \ldots$$

dont chacune est un vecteur covariant (cf. p. 10). Or, dans la suite nous nous bornerons au cas assez général, où parmi les vecteurs ainsi trouvés il y a $n$ indépendants que nous désignerons par les symboles

$$a_\alpha^i \qquad (i = \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{n});$$

l'indice latin placé en haut sert ici pour distinguer les vecteurs, l'indice grec placé en bas désignant comme d'habitude les composantes d'un même vecteur. Nous conviendrons aussi, pour éviter toute confusion, que les indices latins parcourent les valeurs $\overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{n}$.

Posons maintenant

$$\Omega^i = a_\rho^i\, \overset{(1)}{\omega}{}^\rho, \quad \Pi^i = a_\rho^i\, \overset{(2)}{\omega}{}^\rho;$$

nous avons ainsi formé $2n$ invariants du système (2) auxquels nous adjoindrons l'invariant fini $t$. Cela veut dire que, *si les systèmes* (2) *et* (2') *sont équivalents vis-à-vis d'un changement de variables de la forme* (66), *ce même changement transforme chacune à chacune les expressions* $\Omega^i$, $\Pi^i$, $t$ *correspondant au système* (2) *dans les expressions* $'\Omega^i$, $'\Pi^i$, $'t$ *correspondant au système* (2'); on aura donc

$$\Omega^i = {}'\Omega^i, \quad \Pi^i = {}'\Pi^i, \quad t = {}'t \tag{67}$$

Réciproquement, supposons que, *étant donnés deux systèmes* (2) *et* (2'), *il existe une transformation des variables* $t, x^\alpha, y^\alpha$ *aux variables* $t, {}'x^\alpha, {}'y^\alpha$ *réalisant les égalités* (67); *nous allons montrer que cette transformation est de la forme* (66) *et qu'elle transforme le système* (2) *dans le système* (2').

Remarquons en effet que, d'après les formules (32) et d'après la définition des formes $\Omega^i$, les équations ${}'\Omega^i = \Omega^i$ peuvent s'écrire comme il suit

$$'a^i_\rho (d\,'x^\rho - {}'y^\rho\, d\,'t) = a^i_\rho (d\,x^\rho - y^\rho\, d\,t). \tag{68}$$

On voit donc, en égard à l'équation $t = {}'t$, que dans le changement de variables réalisant les égalités (67) les variables ${}'x^\alpha$ ne dépendent que des $x^\alpha$ et de $t$. On aura donc

$$'x^\alpha = {}'x^\alpha (t, x', \ldots, x^n)$$

et, par suite,

$$d\,'x^\alpha = \frac{\partial\,'x^\alpha}{\partial x^\rho} d\,x^\rho + \frac{\partial\,'x^\alpha}{\partial t} d\,t.$$

En portant ces expressions dans les équations (68), on trouve

$$\left('a^i_\sigma \frac{\partial\,'x^\sigma}{\partial x^\rho} - a^i_\rho\right) d\,x^\rho - \left\{'a^i_\rho \left('y^\rho - \frac{\partial\,'x^\rho}{\partial t}\right) - a^i_\rho y^\rho\right\} d\,t = 0.$$

Les variables $t, x^\alpha$ etant indépendantes, on en déduit

$$a^i_\rho = {}'a^i_\sigma \frac{\partial\,'x^\sigma}{\partial x^\rho}, \quad 'a^i_\rho \left('y^\rho - \frac{\partial\,'x^\rho}{\partial t}\right) - a^i_\rho y^\rho = 0. \tag{69}$$

Si l'on élimine entre ces équations les quantités $a^i_\rho$, on obtient

$$'a^i_\rho \left('y^\rho - \frac{\partial'\,x^\rho}{\partial x^\sigma} y^\sigma - \frac{\partial\,'x^\rho}{\partial t}\right) = 0,$$

et, par suite,

$$'y^\rho = \frac{\partial\,'x^\rho}{\partial x^\sigma} y^\sigma + \frac{\partial\,'x^\rho}{\partial t},$$

les vecteurs $'a^i_\rho$ étant, par hypothèse, indépendants.

Revenons maintenant aux équations (67); en tenant compte de la première de relations (69) et des formules (32), celles-ci peuvent être remplacées par les équations suivantes





$$d\,'x^\rho - {}'y^\rho\, d\,'t = \frac{\partial\,'x^\rho}{\partial x^\sigma} (d\,x^\sigma - y^\sigma\, d\,t),$$

$$d\,'y^\rho + 2\,'\Gamma^\rho\, d\,'t + {}'\Gamma^\rho_\sigma (d\,'x^\sigma - {}'y^\sigma\, d\,'t)$$

$$= \frac{\partial\,'x^\rho}{\partial x^\sigma} \left\{d\,y^\sigma + 2\,\Gamma^\sigma\, d\,t + 2\,\Gamma^\sigma_\tau (d\,x^\tau - y^\tau\, d\,t)\right\}.$$

En résumé, nous avons montré 1° que tout changement de variables transformant les expressions $\Omega^i, \Pi^i, t$ dans les expressions ${}'\Omega^i, {}'\Pi^i, {}'t$ est une transformation appartenant au groupe infini (66) et 2° que les deux systèmes d'équations

$$d\,x^\alpha - y^\alpha\, d\,t = 0, \quad d\,y^\alpha + 2\,\Gamma^\alpha\, d\,t = 0$$

et

$$d\,'x^\alpha - {}'y^\alpha\, d\,'t = 0, \quad d\,'y^\alpha + 2\,'\Gamma^\alpha\, d\,'t = 0$$

sont équivalents par rapport à ce changement de variables. Nous avons ainsi réduit le problème d'équivalence des systèmes (1) et (1') vis-à-vis de la transformation (3) au problème d'équivalence de deux systèmes de formes pfaffiennes; or, à ce dernier problème on peut appliquer la méthode générale de M. Cartan [6]).

Nos raisonnements tombent manifestement en défaut, lorsque parmi les covariants du système (1) il n'existe pas un ensemble de $n$ vecteurs covariants linéairement indépendants; chaque cas de cette nature exige évidemment une étude spéciale; dans le $n^0$ précédent nous avons traité directement un cas de ce genre, où l'on a supposé que toutes les courbures de la connexion $Z_n$ sont nulles, et nous avons montré que deux systèmes d'équations jouissant de cette propriété sont équivalents par rapport à la transformation de la forme (3).

**6. Applications diverses.** a) *Équations aux variations.* Soit $x^\alpha(t)$, $y^\alpha(t)$ une solution particulière du système

$$\frac{d\,x^\alpha}{d\,t} - y^\alpha = 0, \quad \frac{d\,y^\alpha}{d\,t} + 2\,\Gamma^\alpha(t, x, y) = 0. \tag{2}$$

Considérons une solution infiniment voisine

$$x^\alpha(t) + \varepsilon\,\xi^\alpha, \quad y^\alpha(t) + \varepsilon\,\eta^\alpha, \tag{70}$$

où $\varepsilon$ est une constante infiniment petite et les $\xi^\alpha, \eta^\alpha$ des fonctions des

[6]) [2]

$t, x^\lambda, y^\lambda$. Les expressions (70) satisfaisant par hypothèse aux équations (2), on aura

$$\frac{d(x^\varkappa+\varepsilon\xi^\varkappa)}{dt}-(y^\varkappa+\varepsilon\eta^\varkappa)=0,\quad \frac{d(y_\varkappa+\varepsilon\eta^\varkappa)}{dt}+2\Gamma^\varkappa(t, x+\varepsilon\xi, y+\varepsilon\eta)=0;$$

en négligeant les infiniment petits du second ordre et d'ordres supérieurs, on en déduit

$$\frac{d\xi^\varkappa}{dt}-\eta^\varkappa=0,\quad \frac{d\eta^\varkappa}{dt}+2\frac{\partial\Gamma^\varkappa}{\partial x^\rho}\xi^\rho+2\Gamma^\varkappa_\rho\eta^\rho=0. \tag{71}$$

Mais on a

$$\frac{d\xi^\varkappa}{dt}=\frac{\partial\xi^\varkappa}{\partial t}+\frac{\partial\xi^\varkappa}{\partial x^\sigma}\frac{dx^\sigma}{dt}+\frac{\partial\xi^\varkappa}{\partial y^\sigma}\frac{dy^\sigma}{dt}$$

on encore, en tenant compte des équations (2),

$$\frac{d\xi^\varkappa}{dt}=\frac{\partial\xi^\varkappa}{\partial t}+\frac{\partial_0\xi^\varkappa}{\partial x^\sigma}y^\sigma-2\Gamma^\sigma\frac{\partial\xi^\varkappa}{\partial y^\sigma}.$$

Si l'on porte cette expression dans la première des équations (71) et que l'on se sert de l'opérateur $\overset{(3)}{\nabla}$ (équ. (16a)), on obtient

$$\eta^\varkappa=\overset{(3)}{\nabla}\xi^\varkappa-\Gamma^\varkappa_\rho\xi^\rho.$$

En transformant d'une manière analogue la deuxième des équations (71), on trouve

$$\frac{\partial\eta^\varkappa}{\partial t}+\frac{\partial\eta^\varkappa}{\partial x^\rho}y^\rho+2\Gamma^\sigma\frac{\partial\xi^\varkappa}{\partial y^\sigma}+2\frac{\partial\Gamma^\varkappa}{\partial x^\rho}\xi^\rho+2\Gamma^\varkappa_\rho y^\rho=0.$$

En éliminant entre les deux dernières relations les quantités $\eta^\varkappa$, il vient

$$\overset{(3)}{\nabla}\overset{(3)}{\nabla}\xi^\varkappa=V_\sigma^{\cdot\varkappa}\xi^\sigma. \tag{72}$$

Il résulte de ce qui précède qu'à chaque solution des équations (72) *(équations généralisées de Jacobi)* correspond une solution infiniment voisine d'une solution particulière du système (2).

b) *Transformations infinitésimales.* Maintenant nous nous proposons de trouver les conditions pour qu'une transformation infinitésimale $Uf$ en $t, x^\varkappa, y^\varkappa$ laisse invariant le système (2). Celui-ci étant équivalent à l'équation





$$Tf=\frac{\partial f}{\partial t}+y^\rho\frac{\partial f}{\partial x^\rho}-2\Gamma^\rho\frac{\partial f}{\partial x^\rho}=0,$$

la condition cherchée est notamment l'existence d'une identité de la forme

$$(TU)=m\,Tf, \tag{73}$$

où $m$ est un coefficient convenablement choisi. Observons aussi que, les transformations $Tf, X_\varkappa f$ et $Y_\varkappa f$ étant indépendantes (cf. p. 7), la transformation $Uf$ peut être présentée sous la forme suivante

$$Uf=A^\rho X_\rho f+B^\rho Y_\rho f+C\,Tf,$$

où $\{A^\rho\}$ et $\{B^\rho\}$ sont deux vecteurs contravariants et $C$ une fontion scalaire. On peut même supposer $C=0$, c'est ce que nous ferons dans la suite.

Ceci posé, la condition (73) prend alors la forme

$$(\overset{(3)}{\nabla}A^\sigma-B^\sigma)X_\sigma f+(\overset{(3)}{\nabla}B^\sigma-V_\rho^{\cdot\sigma}B^\rho)Y_\sigma f=m\,Tf.$$

Les transformations $Tf, X_\sigma f, Y_\sigma f$ étant indépendantes, il en résulte $m=0$ et

$$\overset{(3)}{\nabla}A^\sigma=B^\sigma,\quad \overset{(3)}{\nabla}B^\sigma=V_\rho^{\cdot\sigma}A^\rho.$$

L'élimination des composantes $B^\sigma$ entre les relations ci-dessus conduit aux équations

$$\overset{(3)}{\nabla}\overset{(3)}{\nabla}A^\sigma=V_\rho^{\cdot\sigma}A^\rho \tag{74}$$

On voit donc que la recherche des transformations infinitésimales laissant invariantes les équations (2) se ramène à l'intégration du système (74) qui est identique avec le système (72).

c) *Invariant intégral linéaire.* Aux questions traitées plus haut se rattache d'une façon naturelle le problème suivant: trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que la forme différentielle linéare

$$\omega=M_\varkappa\overset{(1)}{\omega}{}^\varkappa+N_\varkappa\overset{(2)}{\omega}{}^\varkappa$$

soit invariante pour le système (2). Les symboles $M_\varkappa$ et $N_\varkappa$ sont ici les composantes de deux vecteurs covariants, $\overset{(1)}{\omega}{}^\varkappa$ et $\overset{(2)}{\omega}{}^\varkappa$ ayant la signification donnée plus haut (équ. (32)). En différentiant extérieurement la

forme $\omega$ et en tenant compte des équations de structure (36) et (37) de la connexion $Z_n$, on aura

$$\omega' = (\overset{(3)}{\nabla} M_\varkappa + V_\varkappa^{\cdot\rho} M_\rho)\,[d\,t\,\overset{(1)}{\omega}{}^\varkappa] + (\overset{(3)}{\nabla} N_\varkappa + M_\varkappa)\,[d\,t\,\overset{(2)}{\omega}{}^\varkappa] + \ldots,$$

les termes non écrits ne dépendant que des monômes $[\overset{(1)}{\omega}{}^\varkappa\,\overset{(1)}{\omega}{}^\lambda]$, $[\overset{(1)}{\omega}{}^\varkappa\,\overset{(2)}{\omega}{}^\lambda]$ et $[\overset{(2)}{\omega}{}^\varkappa\,\overset{(2)}{\omega}{}^\lambda]$. Le système associé [7]) de la forme $\omega'$ se compose donc des équations de la forme

$$(\overset{(3)}{\nabla} M_\varkappa + V_\varkappa^{\cdot\rho} N_\rho)\,d\,t + \ldots = 0,$$

$$(\overset{(3)}{\nabla} N_\varkappa + M_\varkappa)\,d\,t + \ldots = 0,$$

les termes non écrits étant linéaires et homogènes en $\overset{(1)}{\omega}{}^\varkappa$ et $\overset{(2)}{\omega}{}^\varkappa$. Pour que la forme $\omega$ soit invariante pour le système (2), il faut et il suffit [8]) que les équations ci-dessus soient des conséquences des équations

$$\overset{(1)}{\omega}{}^\varkappa = 0,\quad \overset{(2)}{\omega}{}^\varkappa = 0,$$

celles-ci étant évidemment équivalentes aux équations (2). Ceci entraîne les relations

$$\overset{(3)}{\nabla} M_\varkappa = -V_\varkappa^{\cdot\rho} N_\rho,\quad \overset{(3)}{\nabla} N_\varkappa = -M_\varkappa, \tag{75}$$

d'où l'on déduit immédiatement les équations suivantes

$$\overset{(3)}{\nabla}\,\overset{(3)}{\nabla} N_\varkappa = V_\varkappa^{\cdot\rho} N_\rho.$$

A chaque solution de ce système correspond donc une forme différentielle demandée.

Dans la deuxième partie de ce $n^0$ nous avons vu que, si la transformation infinitésimale $Uf = A^\rho X_\rho f + B^\rho Y_\rho f$ laisse invariant le système (2), les coefficients $A^\rho$ et $B^\rho$ satisfont aux équations

$$\overset{(3)}{\nabla} A^\varkappa = B^\varkappa,\quad \overset{(3)}{\nabla} B^\varkappa = V_\rho^{\cdot\varkappa} A^\rho.$$

En les rapprochant des équations (75), on en déduit la relation

[7]) [3] p. 58.
[8]) [3] p. 74.





$$\overset{(3)}{\nabla}(A^\varkappa M_\varkappa + B^\varkappa N_\varkappa) = 0;$$

les deux symboles $\overset{(3)}{\nabla} f$ et $Tf$ ayant la même signification (cf. p. 7), on peut aussi l'écrire de la manière suivante

$$T(A^\varkappa M_\varkappa + B^\varkappa N_\varkappa) = 0.$$

Nous sommes ainsi arrivés à la conclusion suivante: *si* $\omega = M_\varkappa \overset{(1)}{\omega}{}^\varkappa + N_\varkappa \overset{(2)}{\omega}{}^\varkappa$ *est une forme invariante pour le système* (2) *et que celui-ci admet la transformation infinitésimale* $Uf = A^\varkappa X_\varkappa f + B^\varkappa Y_\varkappa f$, *l'expression* $A^\varkappa M_\varkappa + B^\varkappa N_\varkappa$ *est son intégrale première.*

## Chapitre II.

**1. La connexion affine généralisée $Z_n^*$.** Considérons le système d'équations différentielles

$$\frac{d^2 x^\varkappa}{d\,t^2} + 2\,\Gamma^\varkappa\left(x^1, \ldots, x^n;\ \frac{d\,x^1}{d\,t}, \ldots, \frac{d\,x^n}{d\,t}\right) = 0, \tag{1}$$

les symboles $\Gamma^\varkappa$ désignant des fonctions analytiques réelles, régulières pour tous les systèmes de valeurs $(x^1, \ldots, x^n)$ appartenant à un domaine $(\Omega)$ et pour toutes les valeurs finies non toutes nulles des dérivées $\frac{d\,x^\varkappa}{d\,t}$. Comme auparavant nous remplaçons le système (1) par le système différentiel du premier ordre

$$\frac{d\,x^\varkappa}{d\,t} - y^\varkappa = 0,\quad \frac{d\,y^\varkappa}{d\,t} + 2\,\Gamma^\varkappa(x, y) = 0. \tag{2}$$

Si l'on assujettit les variables $x^\varkappa$ à une transformation quelconque

$$'x^\varkappa = {}'x^\varkappa(x^1, \ldots, x^n), \tag{3}$$

du groupe général $G$ à $n$ variables, les transformés des systèmes (1) et (2) pourront être présentés sous une forme analogue

$$\frac{d^2\,'x^\varkappa}{d\,t^2} + 2\,'\Gamma^\varkappa\left('x^1, \ldots, 'x^n,\ \frac{d\,'x^1}{d\,t}, \ldots, \frac{d\,'x^n}{d\,t}\right) = 0, \tag{1'}$$

$$\frac{d\,'x^\varkappa}{d\,t} - {}'y^\varkappa = 0,\quad \frac{d\,'y^\varkappa}{d\,t} + 2\,'\Gamma^\varkappa('x, 'y) = 0 \tag{2'}$$

et on aura des relations

$$'y^{\mu} = \frac{\partial\, 'x^{\mu}}{\partial\, x^{\rho}}\, y^{\rho} \tag{4}$$

$$2\,'\Gamma^{\mu} = 2\,\frac{\partial\, 'x^{\mu}}{\partial\, x^{\rho}}\,\Gamma^{\rho} - \frac{\partial^2\, 'x^{\mu}}{\partial\, x^{\rho}\,\partial\, x^{\sigma}}\, y^{\rho}\, y^{\sigma} \tag{5}$$

qui, associées aux équations (3), formeront un groupe infini $G^*$ de transformations sur les variables $x^{\varkappa}$, $y^{\varkappa}$, $\Gamma^{\varkappa}$. Or, nous nous proposons d'étudier les invariants différentiels du groupe $G^*$, en regardant, bien entendu, les $\Gamma^{\varkappa}$ comme fonctions des variables $x^{\varkappa}$ et $y^{\varkappa}$. En poursuivant ce but, nous emploirons encore ici un langage géométrique calqué sur celui du Chapitre précédent. En particulier nous nous servirons des notions de *l'élément linéaire* $(x^{\varkappa}, y^{\varkappa})$ issu du *point* $(x^{\varkappa})$ et des *vecteurs appuyés sur un élément linéaire*, en adoptant les définitions données dans le $n^0$ **1** du Ch. I. La seule différence consiste en ce que nous nous bornerons ici exclusivement aux grandeurs indépendantes de la variable $t$.

Ceci posé, la différentiation des équations (4) et (5) par rapport aux variables $y^{\lambda}$ nous conduit succesivement aux relations

$$\frac{\partial\, 'y^{\mu}}{\partial\, 'y^{\lambda}} = \frac{\partial\, 'x^{\mu}}{\partial\, x^{\lambda}} \tag{6}$$

$$\frac{\partial\, 'x^{\rho}}{\partial\, x^{\lambda}}\,'\Gamma^{\mu}_{\rho} = \frac{\partial\, 'x^{\mu}}{\partial\, x^{\rho}}\,\Gamma^{\rho}_{\lambda} - \frac{\partial^2\, 'x^{\mu}}{\partial\, x^{\lambda}\,\partial\, x^{\rho}}\, y^{\rho}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial\, 'x^{\rho}}{\partial\, x^{\varkappa}}\,\frac{\partial\, 'x^{\sigma}}{\partial\, x^{\lambda}}\,'\Gamma^{\mu}_{\rho\sigma} = \frac{\partial\, 'x^{\mu}}{\partial\, x}\,\Gamma^{\rho}_{\varkappa\lambda} - \frac{\partial^2\, 'x^{\mu}}{\partial\, x^{\varkappa}\,\partial\, x^{\lambda}}, \tag{8}$$

les symboles $\Gamma^{\mu}_{\lambda}$ et $\Gamma^{\mu}_{\varkappa\lambda}$ étant définis par les formules

$$\Gamma^{\mu}_{\lambda} = \frac{\partial\, \Gamma^{\mu}}{\partial\, y^{\lambda}}, \quad \Gamma^{\mu}_{\varkappa\lambda} = \Gamma^{\mu}_{\lambda\varkappa} = \frac{\partial^2\, \Gamma^{\mu}}{\partial\, y^{\varkappa}\,\partial\, y^{\lambda}}. \tag{9}$$

Les équations (4), (5), (7), (8) et celles qui s'en déduisent au moyen de la différentiation par rapport aux variables $y^{\varkappa}$ nous font connaître presque immédiatement plusieurs grandeurs covariantes du système (2) vis-à-vis du groupe $G^*$. En effet, en éliminant les dérivées $\dfrac{\partial^2\, 'x^{\mu}}{\partial\, x^{\varkappa}\,\partial\, x^{\lambda}}$ entre les relations (5) et (8), et en tenant compte de l'équation (4), on est conduit à l'identité suivante





$$'\Gamma^{\mu}_{\rho\sigma}\,'y^{\rho}\,'y^{\sigma} - 2\,'\Gamma^{\mu} = \frac{\partial\, 'x^{\mu}}{\partial\, x^{\lambda}}\,(\Gamma^{\lambda}_{\rho\sigma}\, y^{\rho}\, y^{\sigma} - 2\,\Gamma^{\lambda})$$

qui exprime que les quantités

$$S^{\lambda} = \Gamma^{\lambda}_{\rho\sigma}\, y^{\rho}\, y^{\sigma} - 2\,\Gamma^{\lambda} \tag{10}$$

sont les composantes d'un vecteur contravariant. Le même procédé, appliqué respectivement aux relations (5), (7) et (7), (8), met aisément en évidence le caractère tensoriel des grandeurs

$$T^{\lambda} = \Gamma^{\lambda}_{\rho}\, y^{\rho} - 2\,\Gamma^{\lambda} \tag{11}$$

et

$$U_{\mu}^{\cdot\,\nu} = \Gamma^{\nu}_{\mu\rho}\, y^{\rho} - \Gamma^{\nu}_{\mu}. \tag{12}$$

Remarquons encore que, en vertu des équations (4), les coefficients $y^{\varkappa}$ se comportent aussi comme les composantes d'un vecteur contravariant. On vérifie d'ailleurs facilement que les grandeurs trouvées plus haut satisfont à l'identité

$$S^{\lambda} = T^{\lambda} + U_{\rho}^{\cdot\,\lambda}\, y^{\rho}.$$

Si enfin on différentie la relation (8) par rapport à la variable $y^{\nu}$ et que l'on tient compte des équations (6) et (9), on rencontre un nouveau tenseur du quatrième ordre de composantes

$$B_{\varkappa\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\,\nu} = \frac{\partial^3\, \Gamma^{\nu}}{\partial\, y^{\varkappa}\,\partial\, y^{\lambda}\,\partial\, y^{\mu}}. \tag{13}$$

Pour trouver d'autres grandeurs covariantes du système (1) il est préférable d'introduire trois *opérations covariantes* analogues aux opérations données dans le $n^0$ **2** du Chapitre I. Si l'on se donne un vecteur contravariant $\{A^{\varkappa}\}$, un vecteur covariant $\{B_{\varkappa}\}$ et une fonction scalaire $f$ des variables $x^{\varkappa}$, $y^{\varkappa}$, les opérations que nous avons en vue prennent la forme

$$\begin{gathered}\overset{(1)}{\nabla}_{\lambda} A^{\varkappa} = \frac{\partial\, A^{\varkappa}}{\partial\, x^{\lambda}} + \Gamma^{\varkappa}_{\rho\lambda}\, A^{\rho} - \Gamma^{\rho}_{\lambda}\,\frac{\partial\, A^{\varkappa}}{\partial\, y^{\rho}}, \quad \overset{(1)}{\nabla}_{\lambda} B_{\varkappa} = \frac{\partial\, B_{\varkappa}}{\partial\, x^{\lambda}} - \Gamma^{\varkappa}_{\varkappa\lambda}\, B_{\rho} - \Gamma^{\rho}_{\lambda}\,\frac{\partial\, B_{\varkappa}}{\partial\, y^{\rho}}, \\ \overset{(1)}{\nabla}_{\lambda} f = \frac{\partial\, f}{\partial\, x^{\lambda}} - \Gamma^{\rho}_{\lambda}\,\frac{\partial\, f}{\partial\, y^{\rho}};\end{gathered} \tag{14}$$

$$\overset{(2)}{\nabla}_{\lambda} A^{\varkappa} = \frac{\partial\, A^{\varkappa}}{\partial\, y^{\lambda}}, \quad \overset{(2)}{\nabla}_{\lambda} B_{\varkappa} = \frac{\partial\, B_{\varkappa}}{\partial\, y^{\lambda}}, \quad \overset{(2)}{\nabla}_{\lambda} f = \frac{\partial\, f}{\partial\, y^{\lambda}}; \tag{15}$$

$$\overset{(3)}{\nabla} A^\varkappa = y^\rho \frac{\partial A^\varkappa}{\partial x^\rho} - 2\Gamma^\rho \frac{\partial A^\varkappa}{\partial y^\rho} + \Gamma^\varkappa_\rho A^\rho, \quad \overset{(3)}{\nabla} B_\varkappa = y^\rho \frac{\partial B_\varkappa}{\partial x^\rho} - 2\Gamma^\rho \frac{\partial B_\varkappa}{\partial y^\rho} - \Gamma^\rho_\varkappa B_\rho, \tag{16}$$

$$\overset{(3)}{\nabla} f = y^\rho \frac{\partial f}{\partial x^\rho} - 2\Gamma^\rho \frac{\partial f}{\partial y^\rho}.$$

Nous donnerons rapidement la démonstration du caractère tensoriel de la première des opérations (14), les calculs étant tout semblables à ceux employés dans le Chapitre I. Or, on a par définition

$$'A^\varkappa = \frac{\partial\, 'x^\varkappa}{\partial x^\rho} A^\rho;$$

en différentiant cette équation par rapport à la variables $x^\lambda$, il vient

$$\frac{\partial\, 'x^\sigma}{\partial x^\lambda}\frac{\partial\, 'A^\varkappa}{\partial\, 'x^\sigma} + \frac{\partial\, 'y^\sigma}{\partial x^\lambda}\frac{\partial\, 'A^\varkappa}{\partial\, 'y^\sigma} = \frac{\partial^2\, 'x^\varkappa}{\partial x^\lambda\, \partial x^\rho} A^\rho + \frac{\partial\, 'x^\varkappa}{\partial x^\rho}\frac{\partial A^\rho}{\partial x^\lambda}.$$

D'autre part, la relation (4) nous donne

$$\frac{\partial\, 'y^\sigma}{\partial x^\lambda} = \frac{\partial^2\, 'x^\sigma}{\partial x^\lambda\, \partial x^\rho} y^\rho;$$

en portant cette expression dans l'équation précédente, on trouve

$$\frac{\partial\, 'x^\sigma}{\partial x^\lambda}\frac{\partial\, 'A^\varkappa}{\partial\, 'x^\sigma} + \frac{\partial^2\, 'x^\sigma}{\partial x^\lambda\, \partial x^\rho} y^\rho \frac{\partial\, 'A^\varkappa}{\partial\, 'y^\sigma} = \frac{\partial^2\, 'x^\varkappa}{\partial x^\lambda\, \partial x^\rho} A^\rho + \frac{\partial\, 'x^\varkappa}{\partial x^\rho}\frac{\partial A^\rho}{\partial x^\lambda};$$

si l'on y élimine les expressions $\frac{\partial^2\, 'x^\sigma}{\partial x^\lambda\, \partial x^\rho} y^\rho$, $\frac{\partial^2\, 'x^\varkappa}{\partial x^\lambda\, \partial x^\rho}$ au moyen des équations (7) et (8) et que l'on tient compte de l'équation (4), on sera conduit finalement à l'équation suivante

$$\frac{\partial\, 'x^\sigma}{\partial x^\lambda}\left\{\frac{\partial\, 'A^\varkappa}{\partial\, 'x^\sigma} + {}'\Gamma^\varkappa_{\rho\sigma}\, 'A^\rho - {}'\Gamma^\rho_\sigma \frac{\partial\, 'A^\varkappa}{\partial\, 'y^\rho}\right\} = \frac{\partial\, 'x^\varkappa}{\partial x^\rho}\left\{\frac{\partial A^\rho}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\rho_{\sigma\lambda} A^\sigma - \Gamma^\sigma_\lambda \frac{\partial A^\rho}{\partial y^\sigma}\right\},$$

ce qui achève la démonstration. — Pour montrer le caractère covariant des grandeurs $\overset{(1)}{\nabla}_\lambda B_\varkappa$ et $\overset{(1)}{\nabla}_\lambda f$, il suffit d'observer que l'on peut les définir au moyen des identités

$$\overset{(1)}{\nabla}_\lambda (f A^\varkappa) = A^\varkappa \overset{(1)}{\nabla}_\lambda f + f \overset{(1)}{\nabla}_\lambda A^\varkappa$$

et

$$\overset{(1)}{\nabla}_\lambda (A^\varkappa B_\varkappa) = A^\varkappa \overset{(1)}{\nabla}_\lambda B_\varkappa + B_\varkappa \overset{(1)}{\nabla}_\lambda A^\varkappa$$





qui doivent être vraies pour tout vecteur contravariant $\{A^\varkappa\}$.

La démonstration de la covariance des opérations (15) étant identique à celle donnée dans le $n^0$ **2** du Ch. I, nous passons maintenant aux opérateurs (16). Leur caractère covariant est une conséquence immédiate des identités

$$\begin{aligned} \overset{(3)}{\nabla} A^\varkappa &= y^\sigma \overset{(1)}{\nabla}_\sigma A^\varkappa - U^{\cdot\varkappa}_{\sigma} A^\sigma + T^\sigma \overset{(2)}{\nabla}_\sigma A^\varkappa, \\ \overset{(3)}{\nabla} B_\varkappa &= y^\sigma \overset{(1)}{\nabla}_\sigma B_\varkappa + U^{\cdot\sigma}_{\varkappa} B_\sigma + T^\sigma \overset{(2)}{\nabla}_\sigma B_\varkappa, \\ \overset{(3)}{\nabla} f &= y^\sigma \overset{(1)}{\nabla}_\sigma f + T^\sigma \overset{(2)}{\nabla}_\sigma f, \end{aligned} \tag{17}$$

que l'on vérifie aisément, en tenant compte des formules (11), (12), (14), (15) et (16).

En calculant les parenthèses de Poisson des dérivées covariantes définies plus haut, on est conduit aux relations

$$\overset{(1)}{\nabla}_\varkappa \overset{(1)}{\nabla}_\lambda A^\mu - \overset{(1)}{\nabla}_\lambda \overset{(1)}{\nabla}_\varkappa A^\mu = - R^{\cdots\cdot\mu}_{\varkappa\lambda\rho} A^\rho + K^{\cdot\cdot\rho}_{\varkappa\lambda} \overset{(2)}{\nabla}_\rho A^\mu, \tag{18}$$

$$\overset{(1)}{\nabla}^\varkappa \overset{(2)}{\nabla}_\lambda A^\mu - \overset{(2)}{\nabla}_\lambda \overset{(1)}{\nabla}_\varkappa A^\mu = - B^{\cdot\cdot\cdot\mu}_{\varkappa\lambda\rho} A^\rho, \tag{19}$$

$$\overset{(1)}{\nabla}_\varkappa \overset{(3)}{\nabla} A^\mu - \overset{(3)}{\nabla} \overset{(1)}{\nabla}_\varkappa A^\mu = - W^{\cdot\cdot\cdot\mu}_{\varkappa\rho} A^\rho + V^{\cdot\rho}_{\varkappa} \overset{(2)}{\nabla}_\rho A^\mu, \tag{20}$$

où l'on a posé

$$R^{\cdots\cdot\nu}_{\varkappa\lambda\mu} = \frac{\partial \Gamma^\nu_{\mu\varkappa}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial \Gamma^\nu_{\mu\lambda}}{\partial x^\varkappa} + \Gamma^\rho_{\mu\varkappa}\Gamma^\nu_{\lambda\rho} - \Gamma^\rho_{\mu\lambda}\Gamma^\nu_{\varkappa\rho} + \Gamma^\rho_\varkappa \frac{\partial \Gamma^\nu_{\mu\lambda}}{\partial y^\rho} - \Gamma^\rho_\lambda \frac{\partial \Gamma^\nu_{\mu\varkappa}}{\partial y^\rho}, \tag{21}$$

$$K^{\cdot\cdot\mu}_{\varkappa\lambda} = \frac{\partial \Gamma^\mu_\varkappa}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial \Gamma^\mu_\lambda}{\partial x^\varkappa} + \Gamma^\rho_\varkappa \Gamma^\mu_{\lambda\rho} - \Gamma^\rho_\lambda \Gamma^\mu_{\varkappa\rho}, \tag{22}$$

$$W^{\cdot\cdot\mu}_{\varkappa\lambda} = - \frac{\partial \Gamma^\mu_\lambda}{\partial x^\varkappa} + \Gamma^\mu_\rho \Gamma^\rho_{\varkappa\lambda} - \Gamma^\rho_\lambda \Gamma^\mu_{\varkappa\rho} - 2\Gamma^\rho \frac{\partial \Gamma^\mu_{\varkappa\lambda}}{\partial y^\rho} + y^\rho \frac{\partial \Gamma^\mu_{\varkappa\lambda}}{\partial x^\rho}, \tag{23}$$

$$V^{\cdot\lambda}_{\varkappa} = -2\frac{\partial \Gamma^\lambda}{\partial x^\varkappa} - \Gamma^\rho_\varkappa \Gamma^\lambda_\rho - 2\Gamma^\rho \Gamma^\lambda_{\varkappa\rho} + y^\rho \frac{\partial \Gamma^\lambda_\varkappa}{\partial x^\rho}. \tag{24}$$

Les tenseurs $V^{\cdot\lambda}_{\varkappa}$, $K^{\cdot\cdot\mu}_{\varkappa\lambda}$, $W^{\cdot\cdot\mu}_{\varkappa\lambda}$ et $R^{\cdots\cdot\nu}_{\varkappa\lambda\mu}$ satisfont aux identités évidentes

$$R_{\varkappa\lambda\mu}^{\cdots\nu} + R_{\lambda\varkappa\mu}^{\cdots\nu} = 0, \quad R_{\varkappa\lambda\mu}^{\cdots\nu} + R_{\lambda\mu\varkappa}^{\cdots\nu} + R_{\mu\varkappa\lambda}^{\cdots\nu} = 0,$$

$$K_{\varkappa\lambda}^{\cdot\cdot\mu} + K_{\lambda\varkappa}^{\cdot\cdot\mu} = 0, \quad W_{\varkappa\lambda}^{\cdot\cdot\mu} - W_{\lambda\varkappa}^{\cdot\cdot\mu} = K_{\varkappa\lambda}^{\cdot\cdot\mu},$$

$$R_{\varkappa\lambda\mu}^{\cdots\nu} = \overset{(2)}{\nabla}_{\mu} K_{\varkappa\lambda}^{\cdot\cdot\nu}, \quad W_{\varkappa\lambda}^{\cdot\cdot\mu} + K_{\varkappa\lambda}^{\cdot\cdot\mu} = \overset{(2)}{\nabla}_{\lambda} V_{\varkappa}^{\cdot\mu}.$$

On vérifie aisément sur ces relations que, si la courbure $V_{\varkappa}^{\cdot\lambda}$ est nulle, il en de même de courbures $K_{\varkappa\lambda}^{\cdot\cdot\mu}$, $W_{\varkappa\lambda}^{\cdot\cdot\mu}$ et $R_{\varkappa\lambda\mu}^{\cdots\nu}$.

Maintenant nous pouvons définir une *connexion* dans l'espace d'éléments linéaires $(x^{\varkappa}, y^{\varkappa})$. Posons pour ce but

$$\omega^{\rho} = dy^{\rho} + \Gamma_{\sigma}^{\rho}\, dx^{\sigma}; \tag{25}$$

si $f$ est une fonction quelconque des variables $x^{\varkappa}$ et $y^{\varkappa}$, on aura identiquement

$$df = dx^{\rho} \overset{(1)}{\nabla}_{\rho} f + \omega^{\rho} \overset{(2)}{\nabla}_{\rho} f.$$

On vérifie facilement cette identité, en tenant compte des formules (14), (15) et (25). Elle montre que les formes $\omega^{\rho}$ sont les composantes d'un vecteur infinitésimal contravariant; il en est de même pour les différentielles $dx^{\rho}$. Ceci étant, on définit la différentielle absolue d'un vecteur $\{A^{\varkappa}\}$ d'élément d'appui $(x^{\varkappa}, y^{\varkappa})$ au moyen de la formule

$$\delta A^{\varkappa} = dx^{\rho} \overset{(1)}{\nabla}_{\rho} A^{\varkappa} + \omega^{\rho} \overset{(2)}{\nabla}_{\rho} A^{\varkappa},$$

une expression analogue étant valable dans le cas d'un vecteur covariant $\{B_{\varkappa}\}$. La variété d'éléments $(x^{\varkappa}, y^{\varkappa})$ est ainsi douée d'une connexion que nous désignerons dans la suite par le symbole $Z_n^*$.

Posons encore

$$\omega_{\lambda}^{\varkappa} = \Gamma_{\lambda\rho}^{\varkappa}\, dx^{\rho}; \tag{26}$$

en différentiant extérieurement les relations (25) et (26), on obtient les *équations de structure de la connexion* $Z_n^*$ que l'on peut écrire de la façon suivante

$$(\omega^{\varkappa})' + [\omega_{\rho}^{\varkappa}\, \omega^{\rho}] = -\frac{1}{2} K_{\rho\sigma}^{\cdot\cdot\varkappa}\, [dx^{\rho}\, dx^{\sigma}] \tag{27}$$

$$(\omega_{\lambda}^{\varkappa})' + [\omega_{\rho}^{\varkappa}\, \omega_{\lambda}^{\rho}] = -\frac{1}{2} R_{\rho\sigma\lambda}^{\cdots\varkappa}\, [dx^{\rho}\, dx^{\sigma}] - B_{\rho\sigma\lambda}^{\cdots\varkappa}\, [dx^{\rho}\, \omega^{\sigma}]. \tag{28}$$

Une nouvelle différentiation de ces équations nous conduit aux identités





généralisées de Bianchi

$$\overset{(1)}{\nabla}_{[\lambda} R_{\varkappa\lambda]\mu}^{\cdots\nu} + K_{[\lambda\varkappa}^{\cdot\cdot\rho} B_{\lambda]\mu\rho}^{\cdots\nu} = 0, \quad \overset{(1)}{\nabla}_{[\varkappa} K_{\lambda]\mu}^{\cdot\cdot\nu} = 0, \quad 2\overset{(1)}{\nabla}_{[\lambda} B_{\varkappa]\lambda\mu}^{\cdots\nu} + \overset{(2)}{\nabla}_{\mu} R_{\lambda\varkappa}^{\cdots\nu} = 0,$$

La connexion $Z_n^*$ ne différe pas essentiellement du déplacement parallèle de M. Berwald; en effet, si l'on suppose que le système (1) est formé d'équations différentielles des extrémales d'une intégrale $\int F(x', \ldots, x^n;\ dx', \ldots, dx^n)$, on obtient la théorie de M. Berwald [9].

**2. Cas particuliers.** Au lieu des symboles $\overset{(1)}{\nabla}_{\varkappa} f$, $\overset{(2)}{\nabla}_{\varkappa} f$, $\overset{(2)}{\nabla} f$, définis plus haut par les formules (14), (15) et (16), nous emploierons dans ce $n^0$ des notations habituelles, en posant

$$X_{\varkappa} f = \frac{\partial f}{\partial x^{\varkappa}} - \Gamma_{\varkappa}^{\rho} \frac{\partial f}{\partial y^{\rho}}, \quad Y_{\varkappa} f = \frac{\partial f}{\partial y^{\varkappa}}, \quad Tf = y^{\rho} \frac{\partial f}{\partial x^{\rho}} - 2\,\Gamma^{\rho} \frac{\partial f}{\partial x^{\rho}}.$$

En calculant les parenthèses $(X_{\varkappa} X_{\lambda})$ et $(X_{\varkappa} T)$, on obtient

$$(X_{\varkappa} X_{\lambda}) = K_{\varkappa\lambda}^{\cdot\cdot\rho}\, Y_{\rho} f, \quad (X_{\varkappa} T) = -\Gamma_{\varkappa}^{\rho} X_{\rho} f - V_{\varkappa}^{\cdot\rho}\, Y_{\rho} f; \tag{29}$$

on vérifie ces identités, en se reportant aux formules (22), (24) et en tenant compte des relations (9).

Ceci posé, nous allons examiner deux cas spéciaux de la connexion $Z_n^*$.

**a)** Supposons en premier lieu que l'on ait

$$V_{\varkappa}^{\cdot\lambda} = 0 \tag{30}$$

et, par conséquent (v. p. 29),

$$K_{\varkappa\lambda}^{\cdot\cdot\mu} = 0 \tag{31}$$

On en conclut, d'après les relations (29), que les équations

$$X_{\varkappa} f = 0, \quad Tf = 0 \tag{32}$$

forment un *système complet.* Si l'on porte les expressions des dérivées $\frac{\partial f}{\partial x^{\varkappa}}$, tirées des équations $X_{\varkappa} f = 0$, dans l'équation $Tf = 0$, celle-ci prend la forme suivante

$$(\Gamma_{\sigma}^{\rho} y^{\sigma} - 2\,\Gamma^{\rho}) \frac{\partial f}{\partial y^{\rho}} = 0$$

[9]) V. p. e. [1].

ou encore

$$T^\rho Y_\rho f = 0,$$

$\{T^\rho\}$ étant le vecteur défini au moyen de la formule (11). Par conséquent le système (32) peut être remplacé par le système suivant

$$X_\varkappa f = 0, \quad T^\rho Y_\rho f = 0. \tag{33}$$

Revenons maintenant au système (1) dont l'intégration se réduit évidemment à l'intégration du système d'équations

$$\frac{d x^1}{y^1} = \ldots = \frac{d x^n}{y^n} = \frac{d y^1}{-2\Gamma^1} = \ldots = \frac{d y^n}{-2\Gamma^n}, \tag{34}$$

suivie d'une quadrature, et remarquons que l'intégration du système (34) est équivalente à celle de l'équation

$$T f = 0.$$

Or on a vu plus haut que, dans l'hypothèse (30), le système (32) est un système complet. Nous allons montrer quel parti peut on en tirer pour le problème d'intégration du système (1), en distiguant dans la suite deux cas suivant que le vecteur $\{T^\rho\}$ est différent de zéro ou non.

Plaçons nous d'abord dans la première hypothèse. Les équations du système (32) étant, dans ce cas, indépendantes, il admet $n-1$ intégrales distinctes. Or, pour intégrer le système (34), on détermine d'abord ces intégrales, c'est ce qui exige des opérations d'ordres $n-1$, $n-2, \ldots, 1$, et on les égale ensuite à des constantes arbitraires. On aura ainsi $n-1$ relations entre les variables $x^\varkappa$, $y^\varkappa$; si on les résout à $n-1$ de ces variables et que l'on porte les expressions obtenues dans les équations du système (34), il se réduit à $n$ équations du premier ordre. L'intégration de ce dernier système exige notamment des opérations d'ordres $n$, $n-1, \ldots, 1$.

Examinons maintenant le second cas, en supposant que l'on ait $T^\rho = 0$. Le système (32) étant équivalent au système (33), il se réduit maintenant aux équations

$$X_\varkappa f = 0$$

qui admettent $n$ intégrales distinctes; on les détermine au moyen des opérations d'ordres $n$, $n-1, \ldots, 1$. En égalant ces intégrales à des constantes arbitraires, on réduit le système (34) à $n-1$ équations. On achève donc le procédé d'intégration pas les opérations d'ordres $n-1$, $n-2, \ldots, 1$.





Donc, nous pouvons énoncer la proposition suivante:

*Si la courbure $V_\varkappa^{\cdot\lambda}$ est nulle, l'intégration du système* (1) *se fait par les opérations successives d'ordres $n-1$, $n-2, \ldots, 1$, $n$, $n-1, \ldots, 1, 0$ ou par les opérations d'ordres $n$, $n-1, \ldots, 1$, $n-1$, $n-2, \ldots, 1, 0$ suivant que le vecteur $\{T^\rho\}$ est différent de zéro ou nul.*

Rappelons que dans le cas général l'intégrale du système (1) peut être obtenue au moyen des opérations d'ordres $2n-1$, $2n-2, \ldots, 1, 0$.

**b)** Maintenant nous allons examiner un autre cas spécial, en supposant que l'on ait

$$B_{\varkappa\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = 0, \quad V_\varkappa^{\cdot\lambda} = 0. \tag{35}$$

D'après la définition (13) du tenseur $B_{\varkappa\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ il en résulte que les fonctions $2\Gamma^\mu$ sont des polynomes du second degré en $y^\varkappa$; on peut donc poser

$$2\Gamma^\mu = A_{\varkappa\lambda}^\mu y^\varkappa y^\lambda + 2 B_\lambda^\mu y^\lambda + C^\mu, \tag{36}$$

les coefficients $A_{\varkappa\lambda}^\mu = A_{\lambda\varkappa}^\mu$, $B_\lambda^\mu$ et $C^\mu$ ne dépendant que des variables $x^\nu$. On aura parsuite (v. équ. (9))

$$\Gamma_\lambda^\mu = A_{\varkappa\lambda}^\mu y^\varkappa + B_\lambda^\mu, \quad \Gamma_{\varkappa\lambda}^\mu = A_{\varkappa\lambda}^\mu. \tag{37}$$

Remarquons encore que, d'après les relations précédentes, la formule (11) devient ici

$$T^\lambda = -(B_\rho^\lambda y^\rho + C^\lambda). \tag{38}$$

Passons maintenant à la deuxième des hypothèses, (35). D'après une remarque antérieure (p. 32) elle entraîne l'égalité suivante

$$K_{\varkappa\lambda}^{\cdot\cdot\mu} = 0. \tag{39}$$

En y portant les expressions (36) et (37), on obtient une relation qui doit être vérifiée identiquement quelles que soient les valeurs des variables $x^\varkappa$ et $y^\varkappa$. En écrivant que cette relation est indépendante des variables $y^\varkappa$, on trouve

$$\begin{gathered} \frac{\partial A_{\lambda\mu}^\nu}{\partial x^\varkappa} - \frac{\partial A_{\varkappa\mu}^\nu}{\partial x^\lambda} + A_{\lambda\mu}^\rho A_{\rho\varkappa}^\nu - A_{\varkappa\mu}^\rho A_{\rho\lambda}^\nu = 0, \\ \frac{\partial B_\varkappa^\mu}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial B_\lambda^\mu}{\partial x^\varkappa} + A_{\sigma\lambda}^\mu B_\varkappa^\sigma - A_{\sigma\varkappa}^\mu B_\lambda^\sigma = 0. \end{gathered} \tag{40}$$

En raisonnant de la même façon sur l'équation $V_\varkappa^{\cdot\lambda} = 0$, on obtient les

conditions suivantes

$$\frac{\partial B^{\mu}_{\lambda}}{\partial x^{\varkappa}} = A^{\sigma}_{\varkappa\lambda} B^{\mu}_{\sigma} - A^{\mu}_{\varkappa\sigma} B^{\sigma}_{\lambda}, \quad \frac{\partial C^{\lambda}}{\partial x^{\varkappa}} = B^{\sigma}_{\varkappa} B^{\lambda}_{\sigma} - A^{\lambda}_{\varkappa\sigma} C^{\sigma}. \tag{41}$$

Ceci étant, envisageons maintenant le système pfaffien formé d'équations

$$\omega^{\varkappa} = dy^{\varkappa} + \Gamma^{\varkappa}_{\rho}\, dx^{\rho} = 0, \tag{42}$$

En vertu des équations de structure (37) et de la relation (39) le système ci-dessus est complètement intégrable; pour déterminer son intégrale générale nous le transformerons, en se servant des formules (37). Il devient ainsi

$$dy^{\varkappa} + (A^{\varkappa}_{\rho\sigma} y^{\sigma} + B^{\varkappa}_{\rho})\, dx^{\rho} = 0 \tag{43}$$

et il est évident que son intégrale générale peut être présentée sous la forme suivante

$$M^{\lambda}_{\varkappa} y^{\varkappa} + N^{\lambda} = c^{\lambda}, \tag{44}$$

où l'on a désigné par les symboles $M^{\lambda}_{\varkappa}$ et $N^{\lambda}$ des fonctions ne dépendant que des variables $x^{\varkappa}$ et par les symboles $c^{\lambda}$ des constantes arbitraires. Pour déterminer les coefficients $M^{\lambda}_{\varkappa}$ et $N^{\lambda}$ on exprime que les relations

$$d(M^{\lambda}_{\varkappa} y^{\varkappa} + N^{\lambda}) = 0$$

sont des conséquences des équations (43). En développant les calculs et en écrivant que les conditions ainsi trouvées doivent être indépendantes des variables $y^{\varkappa}$, on arrive aux égalités suivantes

$$\frac{\partial M^{\lambda}_{\varkappa}}{\partial x^{\iota}} = A^{\rho}_{\iota\varkappa} M^{\lambda}_{\rho}, \quad \frac{\partial N^{\lambda}}{\partial x^{\varkappa}} = M^{\lambda}_{\rho} B^{\rho}_{\varkappa}. \tag{45}$$

On vérifie aisément que les conditions d'intégrabilité des équations (45) sont identiquement satisfaites en vertu des relations (40). Les équations (45) conduisant aux conséquences suivantes

$$\frac{\partial M^{\lambda}_{\varkappa}}{\partial x^{\iota}} = \frac{\partial M^{\lambda}_{\iota}}{\partial x^{\varkappa}},$$

on voit bien que l'on peut trouver $n$ fonctions $\Phi^{\lambda}(x^1, \ldots, x^n)$ telles qu'il soit

$$M^{\lambda}_{\varkappa} = \frac{\partial \Phi^{\lambda}}{\partial x^{\varkappa}}. \tag{46}$$





En rapprochant les formules (46) des relations (44), celles-ci peuvent s'écrire de la façon suivante

$$\frac{\partial \Phi^{\lambda}}{\partial x^{\varkappa}} y^{\varkappa} + N^{\lambda} = c^{\lambda}. \tag{47}$$

Ceci étant, posons

$$'x^{\varkappa} = \Phi^{\varkappa}(x^1, \ldots, x^n), \quad 'y^{\varkappa} = \frac{\partial \Phi^{\varkappa}}{\partial x^{\rho}} y^{\rho} \tag{48}$$

et effectuons sur le système (2) la transformation définie par les formules précédentes; il devient

$$\frac{d\,'x^{\varkappa}}{dt} - 'y^{\varkappa} = 0, \quad \frac{d\,'y^{\varkappa}}{dt} + 2\,'\Gamma^{\varkappa}('x, 'y) = 0$$

et les équations (36), (43) et (44) prendront respectivement la forme

$$2\,'\Gamma^{\mu} = 'A^{\mu}_{\varkappa\lambda}\,'y^{\varkappa}\,'y^{\lambda} + 2\,'B^{\mu}_{\lambda}\,'y^{\lambda} + 'C^{\lambda}, \tag{49}$$

$$d\,'y^{\varkappa} + ('A^{\varkappa}_{\rho\sigma}\,'y^{\sigma} + 'B^{\varkappa}_{\rho})\, d\,'x^{\rho} = 0 \tag{50}$$

et

$$'y^{\lambda} + 'N^{\lambda} = c^{\lambda}, \tag{51}$$

les symboles $'A^{\mu}_{\varkappa\lambda}$, $'B^{\mu}_{\lambda}$, $'C^{\lambda}$ et $'N^{\lambda}$ désignant des fonctions des variables $'x^{\nu}$. Les expressions $'y^{\lambda} = c^{\lambda} - 'N^{\lambda}$ devant satisfaire aux équations (50), quelles que soient les valeurs des constantes $c^{\lambda}$, il s'en suit

$$'A^{\varkappa}_{\rho\sigma} = 0. \tag{52}$$

Reprenons maintenant les identités (41); celles-ci étant équivalentes aux équations invariantes $V^{\lambda}_{\varkappa} = 0$, elles se changeront en des relations de même forme, quand on prend pour nouvelles variables $'x^{\varkappa}$ et $'y^{\varkappa}$ au lieu de $x^{\varkappa}$, $y^{\varkappa}$. Si encore on tient compte des équations (52), on aura

$$\frac{\partial\,'B^{\mu}_{\lambda}}{\partial\,'x^{\varkappa}} = 0, \quad \frac{\partial\,'C^{\lambda}}{\partial\,'x^{\varkappa}} = 'B^{\rho}_{\varkappa}\,'B^{\lambda}_{\rho}.$$

On en déduit

$$'B^{\mu}_{\lambda} = \beta^{\mu}_{\lambda}, \quad 'C^{\mu} = \beta^{\mu}_{\rho}\,\beta^{\rho}_{\sigma}\, x^{\sigma} + \gamma^{\mu}$$

et, par conséquent (v. équ. (49) et (52)),

$$2\,'\Gamma^{\mu} = 2\,\beta^{\mu}_{\rho}\,'y^{\rho} + (\beta^{\rho}_{\sigma}\,\beta^{\mu}_{\rho}\, x^{\sigma} + \gamma^{\mu}), \tag{53}$$

$\beta^{\mu}_{\rho}$ et $\gamma$ étant des constantes arbitraires.

En définitive le système (1) prendra la forme

$$\frac{d^2 {}'x^\varkappa}{dt^2} + 2\,\beta^\varkappa_\rho \frac{d\,{}'x^\rho}{dt} + \beta^\rho_\sigma\,\beta^\varkappa_\rho\,{}'x^\sigma + \gamma^\varkappa = 0. \tag{54}$$

On peut donc énoncer la proposition suivante:

*Si les courbures $B_{\varkappa\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ et $V_\varkappa^{\cdot\mu}$ sont nulles, le système peut être changé au moyen d'une transformation ponctuelle en le système* (54), *où les coefficients $\beta^\varkappa_\rho$ et $\gamma^\varkappa$ ont des valeurs constantes.*

c) Disons encore quelques mots sur le cas plus spécial caractérisé par les hypothèses

$$B_{\varkappa\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = 0, \quad V_\varkappa^{\cdot\lambda} = 0, \quad T^\lambda = 0.$$

D'après la proposition précédente il résulte de deux premières hypothèses que le système (1) peut être transformé en le système (54). En tenant compte des formules (38) et (53), la troisième hypothèse devient

$$\beta^\lambda_\rho\,{}'y^\rho + \beta^\lambda_\sigma\,\beta^\sigma_\rho\,{}'x^\rho + \gamma^\lambda = 0.$$

Pour que cette condition soit identiquement satisfaite, il faut et il suffit que l'on ait

$$\beta^\varkappa_\rho = 0, \quad \gamma^\varkappa = 0;$$

le système (54) prendra donc la forme suivante

$$\frac{d^2 {}'x^\varkappa}{dt^2} = 0. \tag{55}$$

Nous sommes ainsi arrivés au théorème suivant:

*Pour que le système* (1) *puisse être transformé, au moyen d'une transformation ponctuelle, en le systeme* (55), *il faut et il suffit que l'on ait $T^\lambda = 0$, $V_\varkappa^{\cdot\mu} = 0$, $B_{\varkappa\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$.*

---





## INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.


[1] L. Berwald Parallelübertragung in allgemeinen Räumen (Atti Congresso Int. Mat., Bologna, 1928).

[2] E. Cartan Les sous-groupes des groupes continus de transformations (Ann. Ec. Norm., t. 25, 1908, Ch. I).

[3] E. Cartan Leçons sur les invariants intégraux (Paris, 1922).

[4] D. D. Kosambi Parallelism and Path-spaces (Math. Zeitschrift, t. 37, 1933).

[5] E. Cartan Observations sur le Mémoire précédent (Ibidem).

[6] A. Wundheiler Rheonome Geometrie, Absolute Mechanik (Prace mat.-fiz., t. 40, 1932).

[7] K. Żorawski Über Differentialinvarianteu gewisser Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen gegenüber Punkttransformationen (Bull. Acad. Cracovie, 1915).

[8] K. Żorawski Über gewisse Differentialinvarianten der Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung (Bulletin Int. Acad. de Bohème, 1915).


---

### Streszczenie.


Praca niniejsza składa się z dwóch części: pierwsza z nich poświęcona jest geometryzacji układu równań różniczkowych

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = v_i\left(t, x_1, \ldots, x_n, \frac{dx_1}{dt}, \ldots, \frac{dx_n}{dt}\right) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{a}$$

ze względu na grupę przekształceń postaci

$$\overline{x}_i = \overline{x}_i(t, x_1, \ldots, x_n), \quad \overline{t} = t;$$

treścią drugiej części jest analogiczne zagadnienie w przypadku, gdy funkcje $v_i$ nie zależą od zmiennej $t$, a grupą podstawową jest ogólna grupa przekształceń punktowych. W obu przypadkach geometryzacja została dokonana za pomocą koneksji, będącej uogólnieniem zwykłej koneksji afinalnej bez skręcenia, a jako element tworzący w tych koneksjach przyjęto element linjowy. Nadmienić należy, że praca ta, ze względu na swój przedmiot a częściowo i metodę, pozostaje w bliskim związku z dwiema rozprawami prof. K. Żorawskiego, poświęconemi niezmiennikom różniczkowym układów równań postaci (a).


---