icm©

gdzie *R, MW* i *C* oznaczają kolejno wielkości systemu autora, wielkości fotowizualne z Mt Wilson i indeks barwy.

7. Następujące wyniki otrzymano przez porównanie wielkości systemu autora z wielkościami Potsdamer Durchmusterung *(PD)* i Yerkes Actinometry *(Y)*:

$$R - PD = -0^{m}{\cdot}257 + 0.031\,(PD - 6^{m}{\cdot}89) + 0.128\,C;$$

$$R - Y = +\,0.009 + 0.008\,(Y - 6.65) + 0.099\,C.$$

8. Wielkości gwiazd, zawarte w granicach $5^{m}{\cdot}51 - 8^{m}{\cdot}00$ i dostatecznie często obserwowane przez autora (waga $\geqq 8$), okazały się dokładniejsze od odpowiadających im wielkości w systemach *PD* i *Y*, jak to wskazują następujące wartości błędów średnich porównywanych systemów:

$$\varepsilon_{PD} = \pm 0^{m}{\cdot}060, \qquad \varepsilon_{Y} = \pm 0^{m}{\cdot}0.61, \qquad \varepsilon_{R} = \pm 0^{m}{\cdot}032.$$

9. Ostateczne wielkości warszawskiej fotowizualnej fotometrji będą opublikowane po dokonaniu pomiarów pozostałych płyt.

Nouvelle méthode pour la détermination des orbites des étoiles doubles têlescopiques.

(Nowa metoda wyznaczania orbit gwiazd podwójnych)

par

Tadeusz Rakowiecki.

On distingue dans un système d'étoile double *l'orbite vraie* du mouvement relatif du compagnon par rapport à l'étoile principale et *l'orbite apparente* donnée par l'observation. L'orbite apparente est la projection ortographique de l'orbite vraie sur le plan perpendiculaire au rayon visuel allant à l'étoile principale. Les quantités qui déterminent la position, la forme et la grandeur de l'orbite et dont la connaissance est suffisante pour le calcul de la position du satellite dans un instant donné s'appèlent les éléments de l'orbite. Pour la voie réelle ils sont suivants:

A. Les éléments mécaniques:

1) P, période ou durée de la révolution complète,

2) T, époque du passage au périastre.

B. Les éléments géométriques:

3) Ω, angle de position de la ligne des noeuds,

4) i, inclinaison de l'orbite sur le plan tangent à la sphère céleste,

5) ω, angle entre la droite étoile principale — périastre et la ligne des noeuds,

6) e, excentricité de l'orbite,

7) a, demi-grand axe de l'orbite.

icm©

Ces éléments étant connus, on peut calculer pour chaque instant t la position apparente du compagnon, c'est-à-dire sa distance ρ à l'etoile principale et l'angle de position θ que forme ρ avec la direction nord, compté du nord vers l'est, au moyen des formules suivantes:

$$
\begin{aligned}
&E - e \sin E = \frac{360^0}{P}(t - T) \\
&r \sin v = a\sqrt{1-e^2}\sin E \\
&r \cos v = a \cos E - ae \qquad\qquad \text{(I)} \\
&\rho \sin(\theta - \Omega) = r \sin(\omega + v) \cos i \\
&\rho \cos(\theta - \Omega) = r \cos(\omega + v) \,.
\end{aligned}
$$

Le problème inverse, c'est-à-dire la détermination analytique de l'orbite vraie avec les données d'observation, a reçu sa meilleure solution dans la connue méthode de Kowalski. Voilà les formules de cet auteur qui y servent:

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{tg} 2\Omega = \frac{2(C+FG)}{A-B+F^2-G^2}\left|\begin{array}{c}\sin 2\Omega \text{ ayant le signe de} -(C+FG), \\ \Omega < 180^0\end{array}\right| \\
&\frac{2}{p^2} = A + B + F^2 + G^2 + (A - B + F^2 - G^2) \sec 2\Omega \,, \\
&\sec^2 i = p^2(A + B + F^2 + G^2)^2 - 1 \,, \qquad\qquad \text{(II)} \\
&e \sin \omega = p(G\cos\Omega - F\sin\Omega) \cos i \\
&e \cos \omega = p(G\sin\Omega + F\cos\Omega) \\
&a = \frac{p}{1-e^2} \,.
\end{aligned}
$$

Les quantités A, B, C, F, G de ces formules sont les constants coefficients de l'équation de l'ellipse apparente:

$$A\xi^2 + B\eta^2 + 2C\xi\eta + 2F\xi + 2G\eta = 1 \,, \tag{1}$$

où ξ et η sont des coordonnées du satellite, fournies par l'observation, car

$$\xi = \rho \cos\theta \qquad \text{et} \qquad \eta = \rho \sin\theta \,. \tag{2}$$

On peut donc déterminer ces coefficients par la solution des cinq (au moins) équations de la forme (1).

Dans la méthode que nous allons exposer ici, l'équation (1) nous servira aussi pour le point de départ. Cependant pour le but de la méthode nous prendrons la détermination non pas de l'orbite vraie, mais de l'orbite apparente.

Nous appellerons des éléments de l'orbite apparente les sept quantités suivantes:

1) P, durée de la révolution complète,
2) T, époque du passage au périastre,
3) α, longueur du rayon contenant l'étoile principale (c'est la projection du demi-grand axe de l'orbite vraie),
4) β, longueur du rayon conjugué (c'est la projection du demi-petit axe de l'orbite vraie),
5) γ, distance apparente de l'étoile principale au centre de l'orbite,
6) θ_α, angle de positon du rayon α,
7) θ_β, angle de position du rayon β.

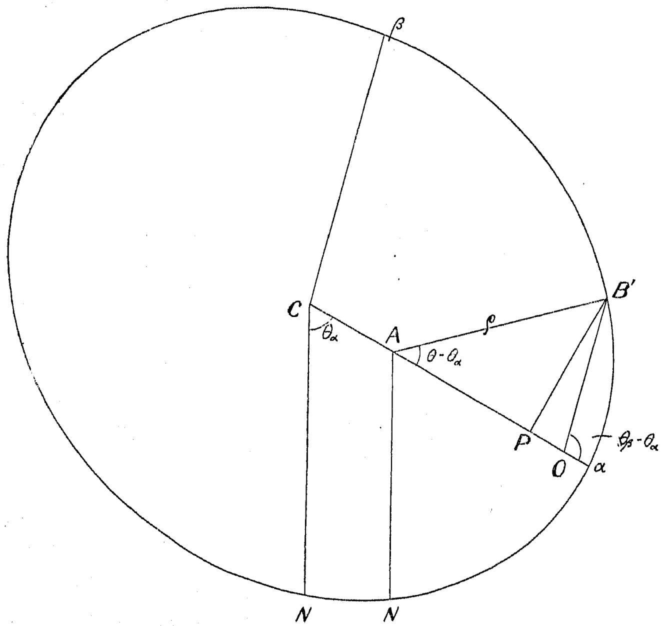
Une fois ces éléments connus, on peut facilement calculer la position du compagnon dans un instant donné. Inversement, avec les données de l'observation on peut calculer ces éléments, sans avoir déterminé d'abord ceux de l'orbite vraie.

Soient a et b les demi axes de l'orbite vraie, x et y *les coordonnées rectangulaires* de la position B du satellite à l'instant t, rapportées à deux axes de l'ellipse. Ces quatre droites forment dans l'orbite apparente les projections α et β, x' et y', c'est-à-dire *les rayons conjugués* α, β et *les coordonnées obliques* x', y' du point B' de l'ellipse apparente qui est une projection du point (x, y) de l'orbite réelle. Puisque les coordonnées sont parallèles aux axes, respectivement aux rayons conjugués correspondants, les rapports des projections restent les mêmes que ceux des droites créatrices. Il y a donc

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{x'}{\alpha} &= \frac{x}{a} = \cos E \,, \\
\frac{y'}{\beta} &= \frac{y}{b} = \sin E \,,
\end{aligned}\right\} \tag{3}
$$

où E est l'anomalie excentrique du point (x, y) dans l'ellipse réelle. On a de (3) les relations:

$$x' = \alpha \cos E \qquad\qquad y' = \beta \sin E \tag{3a}$$



Supposons tracés (fig. 1) les rayons conjugués α et β de l'ellipse apparente et la direction nord, origine des angles de position. Soient $\overline{CA}=\gamma$ la distance de l'étoile principale A au centre de l'ellipse C, $\sphericalangle NC\alpha=\theta_\alpha$ l'angle de position du rayon α, $\sphericalangle NC\beta=\theta_\beta$ l'angle de position du rayon β, soit aussi B' la position apparente du compagnon à l'instant t. Menons la droite $\overline{B'O}$ parallèle au rayon β et la droite $\overline{B'P}$ perpendiculaire au rayon α. Joignons encore B' avec A. Alors les droites

$$\overline{B'O}=y' \qquad \text{et} \qquad \overline{CO}=x'$$

sont *coordonnées obliques* du point B', l'angle $\sphericalangle \alpha AB'=\theta-\theta_\alpha$ est la différence entre l'angle de position $\sphericalangle NAB'=\theta$ du compagnon et celui du rayon principal θ_α, l'angle $\sphericalangle \alpha OB'=\sphericalangle \alpha C\beta=\theta_\beta-\theta_\alpha$ est la diffé-

rence des angles de position des rayons α et β. Comme on voit de la figure (1),

1° $$\overline{B'P}=\overline{B'A}\ \sin\sphericalangle \alpha AB'=\overline{B'O}\sin\sphericalangle \alpha OB'$$

c'est-à-dire

$$\rho\ \sin(\theta-\theta_\alpha)=y'\ \sin(\theta_\beta-\theta_\alpha)$$

2° $$\overline{AP}=\overline{B'A}\ \cos\sphericalangle \alpha AB'=\overline{CO}-\overline{CA}-\overline{PO}$$

c'est-à-dire

$$\rho\ \cos(\theta-\theta_\alpha)=x'-\gamma+y'\cos(\theta_\beta-\theta_\alpha).$$

En y substituant les expressions (3a) de x' et y', on obtient

$$\rho\ \sin(\theta-\theta_\alpha)=\beta\ \sin(\theta_\beta-\theta_\alpha)\sin E,$$

$$\rho\ \cos(\theta-\theta_\alpha)=\alpha\cos E-\gamma+\beta\cos(\theta_\beta-\theta_\alpha)\sin E$$

les deux équations qui permettent de calculer la position du satellite, si sont connus les éléments de l'orbite apparente et l'anomalie excentrique du compagnon dans son orbite réelle. En ayant le rayon principal α et la distance γ de l'etoile principale au centre de l'ellipse apparente, le rapport $\frac{\gamma}{\alpha}=e$ nous donne la valeur de l'excentricité de l'orbite vraie. On peut donc calculer l'anomalie excentrique E au moyen de l'équation de Képler

$$E-e\ \sin E=n\ (t-T),$$

si le mouvement moyen $n=\frac{360^0}{P}$ et le temps du passage au périastre T, c'est-à-dire les éléments mécaniques sont donnés.

Ainsi les trois équation

$$E-e\ \sin E=\frac{360^0}{P}(t-T)$$

$$\rho\ \sin(\theta-\theta_\alpha)=\beta\ \sin(\theta_\beta-\theta_\alpha)\ \sin E, \qquad (1') \quad (\mathrm{Ia})$$

$$\rho\ \cos(\theta-\theta_\alpha)=\beta\ \cos(\theta_\beta-\theta_\alpha)\ \sin E+\alpha\cos E-\alpha e \qquad (2')$$

suffisent pour calculer l'éphéméride de l'étoile double, si les éléments de l'orbite apparente sont connus. La première équation est la même que dans la méthode ordinaire, les deux suivantes remplacent les quatre dernières de celle-là (v. p. 2. I).

Les mêmes deux équations (1′) et (2′) nous serviront pour la base de la détermination des éléments de l'orbite apparente. Sauf les quantités ρ et θ, connues par l'observation, ces équations contiennent six quantités inconnues, nommément cinq constants éléments $(\alpha, \beta, e, \theta_\alpha, \theta_\beta)$ et une inconnue variable E. En éliminant cette dernière, nous obtiendrons l'équation qui ne contient que les éléments de l'orbite apparente et les données de l'observation. On effectue cette élimination comme il suit. En multipliant la première équation (1′) par $\cos(\theta_\beta - \theta_\alpha)$ et la deuxième (2′) par $\sin(\theta_\beta - \theta_\alpha)$, puis retranchant (1′) de (2′) nous obtenons

$$\rho \sin(\theta_\beta - \theta) + \alpha e \sin(\theta_\beta - \theta_\alpha) = \alpha \sin(\theta_\beta - \theta_\alpha) \cos E \tag{3'}$$

D'où

$$\rho^2 \sin^2(\theta_\beta - \theta) + 2 \alpha e \rho \sin(\theta_\beta - \theta_\alpha) \sin(\theta_\beta - \theta) + \alpha^2 e^2 \sin^2(\theta_\beta - \theta_\alpha) =$$
$$= \alpha^2 \sin^2(\theta_\beta - \theta_\alpha) - \alpha^2 \sin^2(\theta_\beta - \theta_\alpha) \sin^2 E$$

En substituant dans la dernière équation au lieu $\sin^2(\theta_\beta - \theta_\alpha)\sin^2 E$ l'expression $\dfrac{\rho^2 \sin^2(\theta - \theta_\alpha)}{\beta^2}$, prise de l'équation (1′), on aura

$$\alpha^2 \rho^2 \sin^2(\theta - \theta_\alpha) + \beta^2 \rho^2 \sin^2(\theta_\beta - \theta) + 2 \alpha e \beta^2 \sin(\theta_\beta - \theta_\alpha) \rho \sin(\theta_\beta - \theta) =$$
$$= \alpha^2 \beta^2 (1 - e^2) \sin^2(\theta_\beta - \theta_\alpha). \tag{4'}$$

Mais

$$\rho \sin(\theta - \theta_\alpha) = \rho \sin\theta \cos\theta_\alpha - \rho \cos\theta \sin\theta_\alpha = \eta \cos\theta_\alpha - \xi \sin\theta_\alpha$$
$$\rho \sin(\theta_\beta - \theta) = \rho \cos\theta \sin\theta_\beta - \rho \sin\theta \cos\theta_\beta = \xi \sin\theta_\beta - \eta \cos\theta_\beta,$$

où ξ et η sont les coordonnées rectangulaires du satellite, rapportées à l'astre principal comme origine et à la direction nord comme direction positive de l'axe X.

En substituant les dernières expressions dans l'équation (4′), on obtient, après une simple réduction:

$$\frac{\alpha^2 \sin^2\theta_\alpha + \beta^2 \sin^2\theta_\beta}{\alpha^2\beta^2(1-e^2)\sin^2(\theta_\beta - \theta_\alpha)}\xi^2 + \frac{\alpha^2 \cos^2\theta_\alpha + \beta^2 \cos^2\theta_\beta}{\alpha^2\beta^2(1-e^2)\sin^2(\theta_\beta - \theta_\alpha)}\eta^2$$
$$- 2\frac{\alpha^2 \sin\theta_\alpha \cos\theta_\alpha + \beta^2 \sin\theta_\beta \cos\theta_\beta}{\alpha^2\beta^2(1-e^2)\sin^2(\theta_\beta - \theta_\alpha)}\xi\eta \tag{1a}$$
$$+ \frac{2e\sin\theta_\beta}{\alpha(1-e^2)\sin(\theta_\beta - \theta_\alpha)}\xi - \frac{2e\cos\theta_\beta}{\alpha(1-e^2)\sin(\theta_\beta - \theta_\alpha)}\eta = 1,$$

c'est-à-dire l'équation, en coordonées rectangulaires, de l'ellipse apparente, de la forme

$$A\xi^2 + B\eta^2 + 2C\xi\eta + 2F\xi + 2G\eta = 1,$$

rapportée aux axes rectangulaires ayants pour origine l'étoile principale, l'axe des ξ coïncidant avec la direction nord. Les coefficients de l'équation (1a) ne dépendent que des éléments de l'orbite, et par conséquent, ils sont des quantités constantes. Il suit de la comparaison des deux dernières équations que ces coefficients sont successivement égals:

$$A = \frac{\alpha^2 \sin^2\theta_\alpha + \beta^2 \sin^2\theta_\beta}{\alpha^2\beta^2(1-e^2)\sin^2(\theta_\beta - \theta_\alpha)} > 0$$

$$B = \frac{\alpha^2 \cos^2\theta_\alpha + \beta^2 \cos^2\theta_\beta}{\alpha^2\beta^2(1-e^2)\sin^2(\theta_\beta - \theta_\alpha)} > 0$$

$$C = -\frac{\alpha^2 \sin\theta_\alpha \cos\theta_\alpha + \beta^2 \sin\theta_\beta \cos\theta_\beta}{\alpha^2\beta^2(1-e^2)\sin^2(\theta_\beta - \theta_\alpha)}$$

$$F = \frac{e\sin\theta_\beta}{\alpha(1-e^2)\sin(\theta_\beta - \theta_\alpha)}$$

$$G = -\frac{e\cos\theta_\beta}{\alpha(1-e^2)\sin(\theta_\beta - \theta_\alpha)},$$

Nous rappelons que les expressions analogues de Kowalski sont incomparablement plus compliquées, et que leur déduction est aussi beaucoup plus pénible.

Remarquons que les coefficients A et B sont toujours positifs. Il résulte immédiatement de deux dernières expressions que

$$\operatorname{tg}\theta_\beta = -\frac{F}{G}, \tag{1°}$$

la formule pour calculer l'angle de position du rayon β. Puisque $\sin(\theta_\beta - \theta_\alpha)$ est toujours positif, il suit des expressions pour F et G que $\sin\theta_\beta$ a le signe de F et $\cos\theta_\beta$ celui de $-G$.

Par une combinaison des autres expressions pour les coefficients on trouve facilement:

d'abord

$$A G - C F = \frac{e \sin \theta_\alpha}{\alpha \beta^2 (1 - e^2)^2 \sin^2 (\theta_\beta - \theta_\alpha)}$$

$$B F - C G = \frac{e \cos \theta_\alpha}{\alpha \beta^2 (1 - e^2)^2 \sin^2 (\theta_\beta - \theta_\alpha)}$$

or

$$\operatorname{tg} \theta_\alpha = \frac{A G - C F}{B F - C G} \qquad (2^0)$$

a formule permettant de calculer l'angle de position du rayon principal α, $\sin \theta_\alpha$ ayant le signe de l'expression $A G - C F$;

puis

$$A B - C^2 = \frac{1}{\alpha^2 \beta^2 (1 - e^2)^2 \sin^2 (\theta_\beta - \theta_\alpha)} > 0,$$

$$(A G - C F) G + (B F - C G) F = \frac{e^2}{\alpha^2 \beta^2 (1 - e^2)^3 \sin^2 (\theta_\beta - \theta_\alpha)} > 0,$$

or

$$\frac{e^2}{1 - e^2} = \frac{(A G - C F) G + (B F - C G) F}{A B - C^2} = \frac{A G^2 + B F^2 - 2 C F G}{A B - C^2} \qquad (3^0)$$

la formule qui servira à calculer l'excentricité de l'orbite vraie; si l'on pose $e = \sin \lambda$, alors $\frac{e^2}{1 - e^2} = \operatorname{tg}^2 \lambda$;

ensuite

$$\alpha e = \gamma = \frac{\sqrt{(A G - C F)^2 + (B F - C G)^2}}{A B - C^2} = \frac{A G - C F}{A B - C^2} \cdot \frac{1}{\sin \theta_\alpha} \qquad (4^0)$$

la distance de l'étoile principale au centre de l'orbite;

enfin

$$\beta e = \sqrt{\frac{F^2 + G^2}{A B - C^2}} = \frac{F}{\sqrt{A B - C^2}} \cdot \frac{1}{\sin \theta_\beta} \qquad (5^0)$$

Les formules (4^0) et (5^0) permettent de calculer les rayons α et β, l'excentricité e étant déterminée par la formule (3^0).

Ainsi nous avons déduit les cinq formules (1^0, 2^0, 3^0, 4^0, 5^0) à l'aide desquelles on peut calculer les éléments géométriques de l'orbite apparente, quand sont déterminés auparavant les cinq coefficients de l'équation de cette orbite en coordonnées rectangulaires

$$A \xi^2 + B \eta^2 + 2 C \xi \eta + 2 F \xi + 2 G \eta = 1 \qquad (1$$

On détermine ces coefficients par la solution des cinq équations (1) formées pour cinq positions du satellite.

Quad les éléments géométriques sont déterminés, on peut calculer les éléments mécaniques P et T. Pour cela nous calculons les anomalies moyennes M du compagnon dans l'orbite vraie pour deux instants t_1 et t_2, éloignées l'une de l'autre le plus possible, pour lesquels les positions du satellite (distance ρ et angle de position θ) sont connues. On a pour ces instants les équations

$$\frac{360^0}{P} (t_1 - T) = M_1$$

$$\frac{360^0}{P} (t_2 - T) = M_2$$

qui donnent

$$P = (t_2 - t_1) \cdot \frac{360^0}{M_2 - M_1}$$

$$T = t - \frac{M}{360^0} P$$

ou autrement

$$n = \frac{M_2 - M_1}{t_2 - t_1}$$

$$P = \frac{360^0}{n}$$

$$T = t - \frac{M}{n}$$

Dans la méthode ordinaire le calcul de M s'effectue par l'intermédiaire des éléments de l'orbite vraie au moyen des formules:

$$\operatorname{tg} (v + \omega) = \operatorname{tg} (\theta - \Omega) \sec i, \qquad (1'')$$

$$\operatorname{tg} \frac{E}{2} = \operatorname{tg} \frac{v}{2} \operatorname{tg} \left(45^0 - \frac{\lambda}{2}\right), \quad \text{où } \lambda = \arcsin e, \qquad (2'')$$

$$M = E - e \sin E. \qquad (3'')$$

Dans notre méthode on pourrait calculer E à l'aide de l'équation

$$\beta \sin (\theta_\beta - \theta_\alpha) \sin E = \rho \sin (\theta - \theta_\alpha)$$

ou

$$\alpha \sin (\theta_\beta - \theta_\alpha) \cos E = \rho \sin (\theta_\beta - \theta) + \alpha e \sin (\theta_\beta - \theta_\alpha).$$

Mais à cause des erreurs d'observation, contenues dans les valeurs mesurées de ρ et de θ, ces équations donnent pour E des valeurs discordantes. Pour diminuer l'influence de ces erreurs, il sera préférable de former de ces deux équations une seule, en éliminant la distanne ρ, parce que l'erreur contenue ici est probablement plus grande que celle de l'angle θ.

icm©

Ecrivons ces équations comme il suit

$$\frac{\beta}{b}\sin(\theta_\beta-\theta_\alpha)\, b\sin E=\rho\sin(\theta-\theta_\alpha)$$

$$\frac{\alpha}{a}\sin(\theta_\beta-\theta_\alpha)\,(a\cos E-a\,e)=\rho\sin(\theta_\beta-\theta)$$

où a et b sont les demi axes de l'ellipse vraie.

Mais dans l'ellipse

$$b\sin E=r\sin v$$

$$a\cos E-a\,e=r\cos v$$

r et v étant la distance réelle et l'anomalie vraie du compagnon. En mettant ces expressions dans les équations précédentes, on obtient, après la division

$$\operatorname{tg} v=\frac{\alpha}{\beta}\sqrt{1-e^2}\,\frac{\sin(\theta-\theta_\alpha)}{\sin(\theta_\beta-\theta)} \tag{v}$$

la relation qui exprime l'anomalie vraie du satellite dans l'orbite réelle selon son angle de position θ et les éléments de l'orbite apparente. Puisque E, et par conséquent v, appartiennent à la même moitié de la circonférence que $\theta-\theta_\alpha$, la formule (v) permettera de calculer v sans ambiguïté. Remarquons que

$$\frac{d\operatorname{tg} v}{d\theta}=\frac{\alpha}{\beta}\sqrt{1-e^2}\,\frac{\sin(\theta_\beta-\theta_\alpha)}{\sin^2(\theta_\beta-\theta)}\,.$$

Il en suit que pour la détermination des éléments mécaniques il ne faut pas prendre de positions voisines de θ_β.

En ayant v, on détermine E et M à l'aide des formules (2″) et (3″) de la page précédente.

Réunissons ici les formules de notre méthode.

A, Calcul des éléments de l'orbite apparente.

Après la détermination des coefficients de l'équation

$$A\xi^2+B\eta^2+2C\xi\eta+2F\xi+2G\eta=1,$$

où les coordonnées $\xi=\rho\cos\theta$ et $\eta=\rho\sin\theta$, on calcule d'abord *les éléments géométriques* de l'orbite:

1°, l'angle de position du rayon β

$$\operatorname{tg}\theta_\beta=-\frac{F}{G}\,,\qquad (\sin\theta_\beta \text{ ayant le signe de } F),$$

2°, l'angle de position du rayon α

$$\operatorname{tg}\theta_\alpha=\frac{AG-CF}{BF-CG}\,,\qquad (\sin\theta_\alpha \text{ ayant le signe de } AG-CF),$$

3°, l'excentricité de l'orbite vraie

$$\operatorname{tg}^2\lambda=\frac{AG^2+BF^2-2CFG}{AB-C^2}$$

$$e=\sin\lambda$$

4°, la distance de l'étoile principale au centre et la longueur du rayon α

$$\alpha\,e=\frac{AG-CF}{AB-C^2}\cdot\frac{1}{\sin\theta_\alpha}$$

5°, la longueur du rayon β

$$\beta\,e=\frac{F}{\sqrt{AB-C^2}}\,\frac{1}{\sin\theta_\beta}$$

Puis on calcule *les éléments mécaniques* P et T:

a) calcul de l'anomalie moyenne M pour deux instants:

$$\operatorname{tg} v=\frac{\alpha}{\beta}\sqrt{1-e^2}\,\frac{\sin(\theta-\theta_\alpha)}{\sin(\theta_\beta-\theta)}$$

(v appartient à la même moitié de la circonférence que $\theta-\theta_\alpha$),

$$\sin\lambda=e$$

$$\operatorname{tg}\frac{E}{2}=\operatorname{tg}\frac{v}{2}\operatorname{tg}\left(45^0-\frac{\lambda}{2}\right),$$

$$M=E-e\sin E,$$

b) calcul de P et T

6°, $$n=\frac{M_2-M_1}{t_2-t_1}\,,\qquad P=\frac{360^0}{n}$$

7°, $$T=t-\frac{M}{n}$$

B. Calcul de l'éphéméride:

$$E - e\sin E = n(t - T)$$

$$\rho\sin(\theta - \theta_\alpha) = \beta\sin(\theta_\beta - \theta_\alpha)\sin E$$

$$\rho\cos(\theta - \theta_\alpha) = \beta\cos(\theta_\beta - \theta_\alpha)\sin E + \alpha\cos E - \alpha e.$$

Les anomalies v, E, M il faut compter toujours dans la direction des angles de position. Quand le mouvement du satellite est rétrograde, alors $M_1 > M_2$ et les formules 6⁰ donnent pour la période P et pour le mouvement moyen n les valeurs négatives.

Nous donnerons ici encore les formules à l'aide desquelles on peut calculer les demi axes a' et b', l'excentricité e' et l'angle de position $\bar{\omega}$ du grand axe $2a'$ de l'orbite apparente. Les relations entre ces quantités et les éléments α, β, θ_α, θ_β de l'orbite expriment les formules:

$$a'^2 + b'^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

$$a'b' = \alpha\beta\sin(\theta_\beta - \theta_\alpha) \quad \text{(équations d'Apollonius),}$$

$$\operatorname{tg}(\theta_\alpha + \theta_\beta - 2\bar{\omega}) = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}\operatorname{tg}(\theta_\beta - \theta_\alpha) \qquad (\bar{\omega} < 180^0)$$

$$\sqrt{1 - e'^2} = \frac{b'}{a'} = \sqrt{-\operatorname{tg}(\theta_\alpha - \bar{\omega})\operatorname{tg}(\theta_\beta - \bar{\omega})} < 1$$

L'excentricité e', l'angle de position $\bar{\omega}$ du grand axe et les demi-axes a', b' de l'orbite apparente peuvent être déterminés aussi immédiatement des valeurs des coefficients de l'équation

$$A\xi^2 + B\eta^2 + 2C\xi\eta + 2F\xi + 2G\eta = 1$$

par les *formules nouvelles*:

$$\operatorname{tg}2\bar{\omega} = \frac{2C}{A - B}, \quad \sin 2\bar{\omega} \text{ ayant le signe de } -C,\ \bar{\omega} < 180^0$$

$$e'^2 = \frac{2\sqrt{(A-B)^2 + C^2}}{A + B + \sqrt{(A-B)^2 + 4C^2}}$$

$$a'^2(1 - e^2) = \frac{2}{A + B - \sqrt{(A-B)^2 + 4C^2}}$$

$$b'^2(1 - e^2) = \frac{2}{A + B + \sqrt{(A-B)^2 + 4C^2}}$$

$$a'b'(1 - e^2) = \frac{1}{\sqrt{AB - C^2}}$$

(où e est l'excentricité de l'orbite vraie calculable par les formules 3⁰) qu'on déduit par le procédé analogue à celui développé pour θ_α, θ_β... A l'aide des formules

$$\operatorname{tg}\theta_\beta = -\frac{F}{G}$$

$$\operatorname{tg}E'_\alpha = -\frac{b'}{a'}\operatorname{ctg}(\theta_\beta - \bar{\omega})$$

on calcule l'anormalie excentrique E'_α du rayon principal.

Si, au lieu des quantités de la page 3, nous prenons pour *les éléments de l'orbite apparente* a', b', $\bar{\omega}$, E'_α et e (excentricité de l'orbite vraie), alors on peut calculer l'éphéméride du satellite d'après les formules.

$$E - e\sin E = n(t - T)$$

$$E' = E + E'_\alpha$$

$$\rho\sin(\theta - \bar{\omega}) = b'\sin E' - b'e\sin E'_\alpha$$

$$\rho\cos(\theta - \bar{\omega}) = a'\cos E' - a'e\cos E'_\alpha$$

Après avoir déterminé les éléments α, β, e, θ_α, θ_β de l'orbite apparente, on peut calculer les éléments de l'ellipse réelle

a) au moyen des formules de J. Herschel:

1) angle de position Ω de la ligne des noeuds

$$\operatorname{tg}(\theta_\alpha + \theta_\beta - 2\Omega) = \frac{\alpha^2(1 - e^2) - \beta^2}{\alpha^2(1 - e^2) + \beta^2}\operatorname{tg}(\theta_\beta - \theta_\alpha), \qquad (\Omega < 180^0)$$

2) inclinaison i de l'orbite vraie sur l'orbite apparente

$$\cos^2 i = -\operatorname{tg}(\theta_\alpha - \Omega)\operatorname{tg}(\theta_\beta - \Omega) < 1$$

3) angle ω entre la ligne des noeuds et la droite étoile principale-périastre

$$\operatorname{tg}^2\omega = -\frac{\operatorname{tg}(\theta_\alpha - \Omega)}{\operatorname{tg}(\theta_\beta - \Omega)}, \quad \omega \text{ appartient au même quadrant que } \theta_\alpha - \Omega$$

4) axes de l'orbite vraie

$$\frac{a}{b} = \sqrt{1-e^2}$$

$$a\,b = \alpha\,\beta \sin(\theta_\beta - \theta_\alpha) \sec i,$$

b) ou au moyen des *formules nouvelles*, données ici sans déduction:

$$\operatorname{tg}\nu = \frac{\alpha\sqrt{1-e^2}}{\beta}, \qquad \nu < 90^0,$$

$$\operatorname{tg}2\omega = \operatorname{tg}2\nu \cos(\theta_\beta - \theta_\alpha), \qquad \sin 2\omega \text{ ayant le signe de } -\cos(\theta_\beta - \theta_\alpha),$$

$$\sin 2\mu = \sin 2\nu \sin(\theta_\beta - \theta_\alpha), \qquad 2\mu < 90^0$$

$$\cos i = \operatorname{tg}\mu$$

Vérification:

$$\operatorname{tg}(\theta_\alpha - \Omega) = \operatorname{tg}\omega \cos i, \qquad (\Omega < 180^0) \qquad a \sin\omega \cos i = \alpha \sin(\theta_\alpha - \Omega)$$

$$a = \alpha\frac{\cos\mu}{\sin\nu}, \qquad b = \beta\frac{\cos\mu}{\cos\nu}. \qquad b\cos\omega\cos i = \beta\sin(\theta_\beta - \Omega)$$

Exemple numèrique.

Calcul de l'orbite du compagnon de Sirius.

Prenons les cinq *positions singulières* du compagnon de Sirius, obtenues par interpolation des positions, publiées par P. **Baize** dans son article „Le compagnon de Sirius" (Bulletin de la Société Astr. de France, 1931 p. 386), réduites au pôle de l'année 1931.

Dates	Coordonnées polaires: Angles de position.	Distances	Coordonnées rectangulaires	
t	θ	ρ	$\xi = \rho\cos\theta$	$\eta = \rho\sin\theta$
1890,26	360^0	4'',20	+4'',20	0'',0
1897,64	180^0	4,16	—4,16	0,0
1901,65	135^0	5,27	—3,73	+3,73
1910,10	90^0	9,18	0,0	+9,18
1881,49	45^0	9'',87	+6'',98	+6'',98

En mettant ces valeurs de ξ et η dans l'équation

$$\xi^2 A + \eta^2 B + 2\xi\eta C + 2\xi F + 2\eta G = 1$$

on obtient les cinq équations

$$(4{,}20)^2 A + 4{,}20\,.\,2F = 1$$

$$(4{,}16)^2 A - 4{,}16\,.\,2F = 1$$

$$(3{,}73)^2 (A + B - 2C) + 3{,}73\,.\,(2G - 2F) = 1$$

$$(9{,}18)^2 B + 9{,}18\,.\,2G = 1$$

$$(6{,}98)^2 (A + B + 2C) + 6{,}98\,.\,(2G + 2F) = 1$$

La solution de ces équations donne pour les coefficients les valeurs suivantes:

$A =$	0,0572350	$\lg A = \bar{2},75766$
$B =$	0,0378144	$\lg B = \bar{2},57765$
$C =$	—0,0200346	$\lg C = \bar{2},30178_n$
$F =$	— 0,0011447	$\lg F = \bar{3},05869_n$
$G =$	—0,1191060	$\lg G = \bar{1},07593_n$

Calcul des éléments de l'orbite apparente.

Les éléments géométriques:

1°. Angle de position du rayon β.

$$\operatorname{tg}\theta_\beta = -\frac{F}{G}$$

F	$\bar{3},05869_n$	$\sin\theta_\beta < 0$
$-G$	$\bar{1},07593$	$\cos\theta_\beta > 0$
$\operatorname{tg}\theta_\beta$	$\bar{3},98276_n$	
$\theta_\beta = 360^0 - 0^0\,33'\,2''$	$\sin\theta_\beta$	$\bar{3},98274_n$

2°. Angle de position du rayon α

$$\operatorname{tg}\theta_\alpha = \frac{AG - CF}{BF - CG} = \frac{m}{n}$$

AG	$\bar{3},83359_n$	BF	$\bar{5},63634_n$	m	$\bar{3},83506_n$
CF	$\bar{5},36047$	CG	$\bar{3},37771$	n	$\bar{3},38552_n$
				$\operatorname{tg}\theta_\alpha$	0,44954

$AG = -0{,}006817$	$BF = -0{,}00004329$	
$-CF = -0{,}000023$	$-CG = -0{,}00238622$	$\theta_\alpha = 250^0\,26'44''$
$m = -0{,}006840$	$n = -0{,}00242951$	
$\sin\theta_\alpha < 0$	$\cos\theta_\alpha < 0$	$\sin\theta_\alpha$ $\bar{1},87420_n$

3°. Excentricité de l'orbite vraie

$$\mathrm{tg}^2\lambda = \frac{AG^2 + BF^2 - 2CFG}{AB - C^2} = \frac{m'}{n'}, \qquad e = \sin\lambda$$

AG^2	$\overline{4},90952$	$AG^2 = 0,00081194$	$AB = 0,0021642$
BF^2	$\overline{8},69503$	$BF^2 = 0,00000005$	$-C^2 = -0,0004014$
$2CFG$	$\overline{6},73743_n$	$-2CFG = 0,00000546$	
		$m' = 0,00081745$	$n' = 0,0017628$
AB	$\overline{3},33531$		
C^2	$\overline{4},60356$		

m'	$\overline{4},91246$		$\lambda = 34^0\,15'\,13''$
n'	$\overline{3},24620$		
$\mathrm{tg}^2\lambda$	$\overline{1},66626$		$45^0 - \frac{\lambda}{2} = 27^0 52' 23'',5$
$\mathrm{tg}\,\lambda$	$\overline{1},83313$		
$e = \sin\lambda$	$\overline{1},75040$	$e = 0,5629$	$\frac{\lambda}{2} = 17^0\,7'\,36'',5$

4°. Longueur du rayon α

$$\alpha e = \frac{AG - CF}{AB - C^2}\,\mathrm{cosec}\,\theta_\alpha = \frac{m}{n'}\,\mathrm{cosec}\,\theta_\alpha$$

m	$\overline{3},83506_n$	
$1:n'$	$2,75380$	
$\mathrm{cosec}\,\theta_\alpha$	$0,02580_n$	$\alpha e = \gamma = 4'',1177$ (distance de l'étoile principale au centre)
αe	$0,61466$	
α	$0,86426$	$\alpha = 7'',316$

5°. Longueur du rayon β

$$\beta e = \frac{F}{\sqrt{AB - C^2}}\,\mathrm{cosec}\,\theta_\beta$$

F	$\overline{3},05869_n$	
$1:\sqrt{AB - C^2}$	$1,37690$	
$\mathrm{cosec}\,\theta_\beta$	$2,01726_n$	
βe	$0,45285$	
β	$0,70245$	$\beta = 5'',042$

Ainsi nous avons obtenu les valeurs suivantes pour les éléments géométriques de l'orbite apparente:

Longueur du rayon principal	$\alpha = 7'',316$	$\lg\alpha = 0,86426$
Longueur du rayon conjugué	$\beta = 5'',042$	$\lg\beta = 0,70245$
Distance de l'étoile principale au centre	$\gamma = 4'',118$	$\lg\gamma = 0,61466$
Angle de position du rayon α	$\theta_\alpha = 250^0\,26'\,44''$	
Angle de position du rayon β	$\theta_\beta = 359^0\,26'\,58''$.	

Au lieu de la distance γ on donne ordinairement l'excentricité

$e = \frac{\gamma}{\alpha}$ de l'orbite vraie, $\quad e = 0,5629 \quad \lg e = \overline{1},75040.$

Les éléments mécaniques.

Données:

Dates	Angles de position (réduits au pôle 1931)
$t_1 = 1864,20$	$\theta_1 = 80^0,48 = 80^0\,28'\,48''$
$t_2 = 1930,09$	$\theta_2 = 49^0,20 = 49^0\,12'\,\,0''$

1) Anomalies vraies

$$\mathrm{tg}\,v = \frac{\alpha}{\beta}\sqrt{1 - e^2}\,\frac{\sin(\theta - \theta_\alpha)}{\sin(\theta_\beta - \theta)}$$

$\theta_1 = 440^0\,28'\,48''$		$\theta_2 = 409^0\,12'$	
$\theta_\alpha = 250^0\,26'\,44''$		$\theta_\alpha = 250^0\,26'\,44''$	
$\theta_\beta = 359^0\,26'\,58''$		$\theta_\beta = 359^0\,26'\,58''$	
$\theta_1 - \theta_\alpha = 190^0\,\,2'\,\,4''$	$v_1 > 180^0$	$\theta_2 - \theta_\alpha = 158^0\,45'\,16''$	$v_2 < 180^0$
$\theta_\beta - \theta_1 = 278^0\,58'\,10''$		$\theta_\beta - \theta_2 = 310^0\,14'\,58''$	

$\sin(\theta_1 - \theta_\alpha)$	$\overline{1},24115_n$	$\sin(\theta_2 - \theta_\alpha)$	$\overline{1},55915$
$1:\sin(\theta_\beta - \theta_1)$	$0,00534_n$	$1:\sin(\theta_\beta - \theta_2)$	$0,11734_n$
α	$0,86426$		
$1:\beta$	$\overline{1},29755$	$\frac{\alpha}{\beta}\sqrt{1 - e^2}$	$0,07908$
$\sqrt{1 - e^2}$	$\overline{1},91727$		
$\mathrm{tg}\,v_1$	$\overline{1},32557$	$\mathrm{tg}\,v_2$	$\overline{1},75557_n$
$180^0 < v_1 < 270^0$		$90^0 < v_2 < 180^0$	
$v_1 = 191^0\,56'\,57''$		$v_2 = 150^0\,20'\,\,2''$	

2) Anomalies excentriques:

$$\operatorname{tg}\frac{E}{2}=\operatorname{tg}\frac{v}{2}\operatorname{tg}\left(45^0-\frac{\lambda}{2}\right)$$

$45^0-\frac{\lambda}{2}=27^0\,52'\,23'',5$	$\operatorname{tg}\left(45^0-\frac{\lambda}{2}\right)$ $\bar{1},72335$		
$\frac{v_1}{2}=95^0\,58'\,28'',5$	$\operatorname{tg}\frac{v_1}{2}$ $\bar{1},98024_n$	$\frac{E_1}{2}=101^0\,11'\,35''$	
$\frac{v_2}{2}=75^0\,10'\,\,1''$	$\operatorname{tg}\frac{v_2}{2}$ $0,57703$	$\frac{E_2}{2}=63^0\,24'\,\,2''$	
	$\operatorname{tg}\frac{E_1}{2}$ $\bar{1},70359_n$	$E_1=202^0\,23'\,10''$	
	$\operatorname{tg}\frac{E_2}{2}$ $0,30038$	$E_2=126^0\,48'\,\,4''$	

3) Anomalies moyennes

$$M=E-e\sin E,$$

e $\bar{1},75040$	$\frac{180^0}{\pi}$ $1,75812$		$-e^0\sin E_1=+\;12^0,28$
			$-e^0\sin E_2=-\;25^0,82$
$\sin E_1$ $\bar{1},58075_n$	$e\sin E_1$ $\bar{1},33115_n$		$M_1=\;214^0,67$
$\sin E_2$ $\bar{1},90348$	$e\sin E_2$ $\bar{1},65388$		$M_2=\;100^0,98$
	$e^0\sin E_1$ $1,08927_n$,		
	$e^0\sin E_2$ $1,41200$,		

4) Période et mouvement moyen:

$$n=\frac{M_2-M_1}{t_2-t_1}\qquad\qquad P=\frac{360^0}{n}$$

Parce que l'intervalle de temps $t_2-t_1=65,89$ ans est plus grand que la période, il faut prendre, au lieu de M_1, anomalie $M'=M_1+360^0$

$$M_2=\;100^0,98$$
$$-M'=-574^0,67\qquad\qquad n=-\frac{473^0,69}{65,89}=-7^0,189$$
$$M_2-M'=-473^0,69$$

$$P=\frac{360}{7,189}=50,07 \text{ ans}.$$

5) Temps du passage au périastre:

$$T=t-\frac{M}{n}$$

$M=214^0,67$	$t=\;1864,20$	
$n=-7^0,189$	$-\frac{M}{n}=+29,86$	$T=1894,06$

Calculons encore: a) l'angle de position $\tilde{\omega}$ du grand axe de l'orbite apparente, b) son excentricité e', c) ses axes a' et b', d) l'anomalie E'_α.

a) $\operatorname{tg}2\tilde{\omega}=\frac{2C}{A-B}$, $\sin 2\tilde{\omega}$ a le signe $-C$,

(2)	$0,30103$	
C	$\bar{2},30178_n$	$\sin 2\tilde{\omega}>0$
$1:(A-B)$	$1,71174$	
$\operatorname{tg}2\tilde{\omega}$	$0,31455_n$	$90^0<2\tilde{\omega}<180^0$ $2\tilde{\omega}=115^0\,51'\,30''$ $\tilde{\omega}=57^0\,55'\,45''$

b) $e'^2=\frac{2\sqrt{(A-B)^2+4C^2}}{A+B+\sqrt{(A-B)^2+4C^2}}$ Si $\operatorname{tg}\mu=-\frac{A-B}{A+B}\sec 2\tilde{\omega}$,

alors $1-e'^2=\operatorname{tg}(45^0-\mu)$

$A-B=$	$0,0194206$	$\mu=$	$25^0\;\;6'\,13''$
$A+B=$	$0,0950494$	$45^0-\mu=$	$19^0\;53'\,47''$
$-(A-B)$	$\bar{2},28826_n$	$(1-e'^2)$	$\bar{1},55860$
$1:(A+B)$	$1,02205$	$\sqrt{1-e'^2}$	$\bar{1},77930$
$\sec 2\tilde{\omega}$	$0,36041_n$	e'	$\bar{1},90244$
$\operatorname{tg}\mu$	$\bar{1},67072$	$e'=$	$0,7988$

c)

$$\frac{b'}{a'}=\sqrt{1-e'^2}$$

$$a'\,b'=\alpha\beta\sin(\theta_\beta-\theta_\alpha)$$

ou

$$a'\,b'=\frac{1}{(1-e^2)\sqrt{AB-C^2}}$$

$\theta_\beta-\theta_\alpha=$	$109^0\,0'\,14''$	$a'\,b'$	$1,54237$	
$\sin(\theta_\beta-\theta_\alpha)$	$\bar{1},97566$	$\frac{b'}{a'}$	$\bar{1},77930$	
$\alpha\beta$	$1,56671$	a'^2	$1,76307$	
$1:(1-e^2)$	$0,16546$	a'	$0,88153$	$a'=7'',612$
$1:\sqrt{AB-C^2}$	$1,37690$	b'^2	$1,32167$	
		b'	$0,66083$	$b'=4'',58$

d) $\operatorname{tg} E'_\alpha = -\dfrac{b'}{a'} \operatorname{ctg}(\theta_\beta - \bar{\omega})$

		$\theta_\beta - \bar{\omega} =$	$301^0\, 31'\, 13''$
		$-\operatorname{ctg}(\theta_\beta - \bar{\omega})$	$\bar{1},78766_n$
$\operatorname{tg} E'_\alpha$	$1,56696$	$\mu \dfrac{b'}{a'}$	$\bar{1},77930$
$E'_\alpha =$	$200^0\, 15'\, 4''$		

Calcul de l'orbite vraie des éléments de l'orbite apparente à l'aide de nos formules.

$$\operatorname{tg} \nu = \frac{\alpha}{\beta}\sqrt{1-e^2}, \qquad \nu < 90^0 \qquad 2\mu < 90^0,$$

$$\sin 2\mu = \sin 2\nu \sin(\theta_\beta - \theta_\alpha),$$

$$\operatorname{tg} 2\omega = \operatorname{tg} 2\nu \cos(\theta_\beta - \theta_\alpha), \qquad \sin 2\omega \text{ a le signe de } -\cos(\theta_\beta - \theta_\alpha)$$

$$\cos i = \operatorname{tg} \mu,$$

$$\operatorname{tg}(\theta_\alpha - \Omega) = \operatorname{tg} \omega \cos i, \qquad \theta_\alpha - \Omega \text{ appartient au même quadrant que } \omega, \quad \Omega < 180^0$$

$$a = \alpha \cos \mu \operatorname{cosec} \nu.$$

$\operatorname{tg} \nu$	$0,07\,908$		
$\nu =$	$50^0\, 11'\, 15''$	$\theta_\beta - \theta_\alpha =$	$109^0\ \ 0'\, 14''$
$2\nu =$	$100^0\, 22'\, 30''$		
$\sin 2\nu$	$\bar{1},99\,284$	$\operatorname{tg} 2\nu$	$0,73\,735_n$
$\sin(\theta_\beta - \theta_\alpha)$	$\bar{1},97\,566$	$\cos(\theta_\beta - \theta_\alpha)$	$\bar{1},51\,273_n$
$\sin 2\mu$	$\bar{1},96\,850$	$\operatorname{tg} 2\omega$	$0,25\,008$
$2\mu =$	$68^0\, 26'\, 36''$		$0 < 2\omega < 90^0$
$\mu =$	$34^0\, 13'\, 18''$	$2\omega =$	$60^0\, 39'\, 14'' + 360^0,$
$\operatorname{tg}\mu = \cos i$	$\bar{1},83\,260$	$\omega =$	$30^0\, 19'\, 37'' + 180^0,$
$i =$	$47^0\ \ 8'\, 40''$		
$\operatorname{tg} \omega$	$\bar{1},76\,714$	α	$0,86426$
		$\cos \mu$	$\bar{1},91744$
$\operatorname{tg}(\theta_\alpha - \Omega)$	$\bar{1},59\,974$	$\operatorname{cosec} \nu$	$0,11456$
$\theta_\alpha - \Omega =$	$21^0\, 41'\, 45'' + 180^0$		
θ_α	$= 250^0\, 26'\, 44''$	a	$0,89626$
Ω	$= 48^0\, 45' < 180^0$	$a =$	$7'',875$

Calcul de l'orbite vraie des coefficients A, B, C, F, G par la méthode de **Kowalski** (vérification du calcul précédent):

1) Angle de position de la ligne des noeuds

$$\operatorname{tg} 2\Omega = \frac{2(C+FG)}{A-B+F^2-G^2} = \frac{m}{n}, \qquad \sin 2\Omega \text{ a le signe } -(C+FG).$$

FG	$\bar{4},13462$	$A-B=$	$0,0194206$	m	$\bar{2},59984_n$
$FG=$	$0,00013634$	$F^2=$	$0,0000013$	n	$\bar{3},71899$
$C=$	$-0,0200346$	$-G^2=$	$-0,0141860$	$\operatorname{tg} 2\Omega$	$0,88085_n$
$C+FG=$	$-0,0198983$	$n=$	$+0,0052359$		$90^0 < 2\Omega < 180^0$
$\sin 2\Omega > 0$				$2\Omega =$	$97^0\, 29'\, 42''$
$m =$	$-0,0397966$			$\Omega =$	$48^0\, 44'\, 51''$

2) Paramètre de l'orbite vraie

$$\frac{2}{p^2} = A+B+F^2+G^2+(A-B+F^2-G^2)\sec 2\Omega = k + n \sec 2\Omega$$

$A+B=$	$0,0950494$	n	$\bar{3},71899$	$\dfrac{p^2}{2}$	$1,16054$
$F^2+G^2=$	$0,0141873$	$\sec 2\Omega$	$0,88459_n$		
$k=$	$0,1092367$	$n \sec 2\Omega$	$\bar{2},60358_n$	(2)	$0,30103$
$n \sec 2\Omega =$	$-0,0401403$			p^2	$1,46157$
				p	$0,73078$
$\dfrac{2}{p^2} =$	$0,0690964$			$p =$	$5'',380$

3) Inclinaison

$$\sec^2 i = p^2(A+B+F^2+G^2) - 1 = p^2 k - 1$$

p^2	$1,46157$	$p^2 k =$	$3,162$	$\cos^2 i$	$\bar{1},66514$
k	$\bar{1},03839$	$\sec^2 i =$	$2,162$	$\cos i$	$\bar{1},83257$
$p^2 k$	$0,49996$			$i =$	$47^0\, 8'\, 50''$

4) Angle entre le périastre et la ligne des noeuds, excentricité.

$$e \sin \omega = p \cos i\, G \cos \Omega - p \cos i\, F \sin \Omega = m - n$$

$$e \cos \omega = p\, G \sin \Omega + p\, F \cos \Omega \qquad = k + l$$

$p \cos i$	$0,56335$	p	$0,73078$	$m =$	$-0,28735$	$e \sin \omega$	$\bar{1},45363_n$
$\cos \Omega$	$\bar{1},81913$	k	$\bar{1},68282_n$	$-n =$	$+0,003149$	$e \cos \omega$	$\bar{1},68647_n$

icm©

$G\ \bar{1},07593_n$	$l\ \bar{3},60860_n$	$e \sin\omega = -0,284201$	$\operatorname{tg}\omega\quad \bar{1},76716$
			$\omega = 210^0\,19'\,40''$
$\sin\Omega\ \bar{1},87611$			
$F\ \bar{3},05869_n$		$k = -0,48175$	
$m\ \bar{1},45841_n$		$l = -0,00406$	$\sin\omega\quad \bar{1},70325_n$
$n\ \bar{3},49815_n$		$e\cos\omega = -0,48581$	$e\quad \bar{1},75038$
			$e = 0,5629$

5) Demi-grand axe a

$$a = \frac{p}{1-e^2}$$

$\sqrt{1-e^2}\quad \bar{1},91728$

$(1-e^2)\quad \bar{1},83456$

$p\quad 0,73078$

$a\quad 0,89622 \qquad a = 7'',875$

Calculons encore l'anomalie v par l'intermédiaire des éléments de l'orbite vraie pour les positions

$\theta_1 = 80^0\,28'\,48''$

$\theta_2 = 49^0\,12'\,0''$

$$\operatorname{tg}(v+\omega) = \operatorname{tg}(\theta-\Omega)\sec i$$

$\Omega = 48^0\,44'\,52''$	$\sec i\quad 0,16743$	
$\theta_1 - \Omega = 31^0\,43'\,56''$	$\operatorname{tg}(\theta_1-\Omega)\quad \bar{1},79126$	$\operatorname{tg}(v_1+\omega)\quad \bar{1},95869$
$\theta_2 - \Omega = 27'\,8''$	$\operatorname{tg}(\theta_2-\Omega)\quad \bar{3},89724$	$\operatorname{tg}(v_2+\omega)\quad \bar{2},06467$
$v_1+\omega = 42^0\,16'\,45''$	$v_1 = 191^0\,57'\,5''$	
$v_2+\omega = 39'\,54''$	$v_2 = 150^0\,20'\,14''$	
$\omega = 210^0\,19'\,40''$		

Nous voyons que les valeurs des éléments de l'orbite vraie du compagnon de Sirius, obtenues par la méthode de Kowalski, sont les mêmes que celles calculées des éléments de l'orbite apparente à l'aide de nos formules.

Finalement, voilà les valeurs des éléments du compagnon de Sirius

	L'orbite apparente.	L'orbite réelle.
rayon principal	$\alpha = 7'',316$	$\Omega = 48^0\,45'$
rayon conjugué	$\beta = 5'',042$	$i = 47^0\,8',7$

excentricité de l'orbite vraie $e = 0,5629$	$\omega = 210^0\,19',6$
angle de position du rayon α, $\theta_\alpha = 250^0\,26'\,44''$	$e = 0,5628$
angle de position du rayon β, $\theta_\beta = 359^0\,26'\,58''$	$a = 7'',875$

Temps du passage au périastre $T = 1894{,}06$

Période $P = 50{,}075$ ans

Mouvement moyen $n = -7^0{,}189$ par an.

L'orbite réelle obtenue ici est très rapprochée à celle calculée par Meyermann 1922, A. N. 215, p. 13.

Calcul de la position du compagnon de Sirius pour l'instant $t = 1881{,}5$

1) Anomalie excentrique

$$E - e\sin E = n(t-T) = +7^0,189 \times 12,56 = 90^0,29$$

$$E = 118^0,65 = 118^0\,39'$$

2) Angle de position θ et distance ρ

a) $\rho\sin(\theta-\theta_\alpha) = \beta\sin(\theta_\beta-\theta_\alpha)\sin E$

$\rho\cos(\theta-\theta_\alpha) = \beta\cos(\theta_\beta-\theta_\alpha)\sin E + \alpha\cos E - \alpha e$

$\beta\quad 0,70245$	$\beta\cos(\theta_\beta-\theta_\alpha)\sin E = -1,440$
$\sin(\theta_\beta-\theta_\alpha)\quad \bar{1},97566$	$\alpha\cos E = -3,507$
$\cos(\theta_\beta-\theta_\alpha)\quad \bar{1},51273_n$	$-\alpha e = -4,118$
$\beta\sin(\theta_\beta-\theta_\alpha)\quad 0,67811$	$\rho\cos(\theta-\theta_\alpha) = -9,066$
$\beta\cos(\theta_\beta-\theta_\alpha)\quad 0,21518_n$	$\rho\sin(\theta-\theta_\alpha)\quad 0,62139$
$\sin E\quad \bar{1},94328$	$\rho\cos(\theta-\theta_\alpha)\quad 0,95740_n$
$\beta\sin(\theta_\beta-\theta_\alpha)\sin E\quad 0,62139$	$\operatorname{tg}(\theta-\theta_\alpha)\quad \bar{1},66399_n$
$\beta\cos(\theta_\beta-\theta_\alpha)\sin E\quad 0,15846_n$	$\theta-\theta_\alpha = 155^0\,14'\,10''$
	$\theta_\alpha = 250^0\,26'\,44''$
$\alpha\quad 0,86426$	$\theta = 45^0\,40'\,54''$
$\cos E\quad \bar{1},68075_n$	$\sin(\theta-\theta_\alpha)\quad \bar{1},62210$
$\alpha\cos E\quad 0,54501_n$	$\rho\quad 0,99929$
	$\rho = 9'',98$

b) $E' = E + E'_\alpha$

$$\rho \sin(\theta - \bar{\omega}) = b' \sin E' - b' e \sin E'_\alpha$$
$$\rho \cos(\theta - \bar{\omega}) = a' \cos E' - a e \cos E'_\alpha$$

$E = 118^\circ 39'$	b'	$0{,}66083$	a'	$0{,}88153$
$E'_\alpha = 200^\circ 15' 4''$	e	$\overline{1}{,}75040$	e	$\overline{1}{,}75040$
$E' = 318^\circ 54' 4''$	$\sin E'_\alpha$	$\overline{1}{,}53925_n$	$\cos E'_\alpha$	$\overline{1}{,}97229_n$
	$b' e \sin E'_\alpha$	$\overline{1}{,}95048_n$	$a' e \cos E'_\alpha$	$0{,}60422_n$
	$\sin E'$	$\overline{1}{,}81778_n$	$\cos E'$	$\overline{1}{,}87715$
	$b' \sin E'$	$0{,}47861_n$	$a' \cos E'$	$0{,}75868$
	$b' \sin E' =$	$-3{,}0103$	$a' \cos E' =$	$5{,}7369$
	$-b' e \sin E'_\alpha =$	$+0{,}8922$	$-a' e \cos E'_\alpha =$	$4{,}0199$
	$\rho \sin(\theta - \bar{\omega}) =$	$-2{,}1181$	$\rho \cos(\theta - \bar{\omega}) =$	$9{,}7568$
	$\rho \sin(\theta - \bar{\omega})$	$0{,}32595_n$		
	$\rho \cos(\theta - \bar{\omega})$	$0{,}98931$	$\cos(\theta - \bar{\omega})$	$\overline{1}{,}99000$
	$\operatorname{tg}(\theta - \bar{\omega})$	$\overline{1}{,}33664_n$		
	$\theta - \bar{\omega} =$	$347^\circ 45' 6''$	ρ	$0{,}99930$
	$\bar{\omega} =$	$57^\circ 55' 45''$		
	$\theta =$	$45^\circ 40' 51''$	$\rho =$	$9'',98$

c) $r \sin v = b \sin E$

$$r \cos v = a \cos E - a e$$
$$\rho \sin(\theta - \Omega) = r \sin(v + \omega) \cos i$$
$$\rho \cos(\theta - \Omega) = r \cos(v + \omega)$$

a	$0{,}89622$	r	$0{,}99998$
$\cos E$	$\overline{1}{,}68075_n$	$\cos i$	$\overline{1}{,}83257$
$a \cos E$	$0{,}57697_n$	$\sin(v + \omega)$	$\overline{2}{,}89539_n$
e	$\overline{1}{,}75038$	$\cos(v + \omega)$	$\overline{1}{,}99865$
$a e$	$0{,}64660$		
$a \cos E =$	$-3{,}7655$	$\rho \sin(\theta - \Omega)$	$\overline{1}{,}72793_n$
$-a e =$	$-4{,}4320$	$\rho \cos(\theta - \Omega)$	$0{,}99862$
$r \cos v =$	$-8{,}2075$	$\operatorname{tg}(\theta - \Omega)$	$\overline{2}{,}72931_n$
		$\theta - \Omega =$	$356^\circ 55' 51''$
b	$0{,}81350$	$\Omega =$	$48^\circ 44' 51''$
$\sin E$	$\overline{1}{,}94328$	$\theta =$	$45^\circ 40' 42''$
$r \sin v$	$0{,}75678$		
$r \cos v$	$0{,}91421_n$	$\cos(\theta - \Omega)$	$\overline{1}{,}99937$
$\operatorname{tg} v$	$\overline{1}{,}84257_n$	ρ	$0{,}99925$
$v =$	$145^\circ 9' 52''$	$\rho =$	$9'',98$
$\omega =$	$210^\circ 19' 40''$		
$v + \omega =$	$355^\circ 26' 32''$		
$\sin v$	$\overline{1}{,}75680$		

les mêmes valeurs que sur le page précédente.

Streszczenie.

Wyznaczenie orbity widomej podwójnej gwiazdy teleskopowej i obliczanie efemerydy towarzysza z elementów tej orbity.

$$A\xi^2 + B\eta^2 + 2C\xi\eta + 2F\xi + 2G\eta = 1 \qquad \text{(e)}$$

jest równaniem elipsy w spółrzędnych prostokątnych ξ i η. Jeśli za początek układu osi prostokątnych elipsy widomej towarzysza przyjmiemy gwiazdę główną, kierunek północny koła godzinnego przechodzącego przez gwiazdę główną — za kierunek dodatni odciętych ξ, kierunek przeciwny ruchowi dziennemu gwiazd — za kierunek dodatni rzędnych η, wtedy spółrzędne ξ i η są znane, będąc funkcjami wielkości mierzonych przy obserwacji — kąta pozycyjnego towarzysza θ i odległości jego od gwiazdy głównej ρ:

$$\xi = \rho \cos\theta \qquad \eta = \rho \sin\theta,$$

i pięć pozycyj (θ i ρ) towarzysza wystarczy do utworzenia pięciu równań (*e*), z których można obliczyć nieznane stałe spółczynniki A, B, C, F i G tych równań. Klasyczna metoda Kowalskiego daje wzory, zapomocą których ze spółczynników tych oblicza się elementy toru rzeczywistego.

Metoda, podana przez autora, ustala związki między spółczynnikami równania (e) i *elementami orbity widomej.* Za elementy toru widomego możemy przyjąć albo półśrednice sprzężone, będące rzutem półosi wielkiej i małej orbity rzeczywistej, albo półosie wielką i małą elipsy widomej.

Sposób 1-y. Za elementy geometryczne orbity widomej przyjmujemy:

1) α długość promienia elipsy widomej zawierającego gwiazdę główną (rzut półosi wielkiej orbity rzeczywistej);

2) β długość promienia sprzężonego (rzut półosi małej orbity rzeczywistej);

3) θ_α kąt pozycyjny promienia α,

4) θ_β kąt pozycyjny promienia β,

5) e stosunek odległości γ gwiazdy głównej od środka elipsy do długości promienia α (mimośród orbity rzeczywistej).

Niech x i y będą *spółrzędne prostokątne* towarzysza na elipsie rzeczywistej, równoległe do osi wielkiej $2a$ i osi małej $2b$ tej elipsy; zaś x' i y' będące ich rzutami *spółrzędne ukośne* towarzysza na elipsie widomej, równoległe do średnic sprzężonych 2α i 2β.

Wtedy

$$\frac{x'}{\alpha}=\frac{x}{a}=\cos E \qquad\qquad \frac{y'}{\beta}=\frac{y}{b}=\sin E$$

Zatem

$$x'=\alpha\cos E \qquad\qquad y'=\beta\sin E \tag{1}$$

związki między spółrzędnemi ukośnemi satelity na orbicie widomej a anomalją ekscentryczną jego położenia na elipsie rzeczywistej. Z rys. 1, przedstawiającego orbitę pozorną, wynika, że

$$\begin{aligned}\rho\sin(\theta-\theta_\alpha)&=\beta\sin(\theta_\beta-\theta_\alpha)\sin E\\ \rho\cos(\theta-\theta_\alpha)&=\beta\cos(\theta_\beta-\theta_\alpha)\sin E+\alpha\cos E-\alpha e\end{aligned} \tag{2}$$

Z równań (2) można obliczyć pozycję towarzysza, jeśli są znane elementy toru widomego: α, β, θ_α, θ_β, e i anomalja ekscentryczna E towarzysza na orbicie rzeczywistej, którą możemy wyznaczyć dla każdej chwili t z równania

$$E-e\sin E=n(t-T),$$

jeśli są znane jeszcze elementy mechaniczne n i T.

Rugując E z równań (2), otrzymamy

$$\alpha^2\rho^2\sin^2(\theta-\theta_\alpha)+\beta^2\rho^2\sin^2(\theta_\beta-\theta)+2\alpha e\beta^2\sin(\theta_\beta-\theta_\alpha)\rho\sin(\theta_\beta-\theta)=$$
$$=\alpha^2\beta^2(1-e^2)\sin^2(\theta_\beta-\theta_\alpha),$$

Skąd, uwzględniając, że

$$\rho\sin(\theta-\theta_\alpha)=\rho\sin\theta\cos\theta_\alpha-\rho\cos\theta\sin\theta_\alpha=\eta\cos\theta_\alpha-\xi\sin\theta_\alpha$$
$$\rho\sin(\theta_\beta-\theta)=\rho\cos\theta\sin\theta_\beta-\rho\sin\theta\cos\theta_\beta=\xi\sin\theta_\beta-\eta\cos\theta_\beta$$

otrzymujemy równanie postaci (e), w którem spółczynniki równają się kolejno

$$\begin{aligned}A&=\frac{\alpha^2\sin^2\theta_\alpha+\beta^2\sin^2\theta_\beta}{\alpha^2\beta^2(1-e^2)\sin^2(\theta_\beta-\theta_\alpha)}>0\\ B&=\frac{\alpha^2\cos^2\theta_\alpha+\beta^2\cos^2\theta_\beta}{\alpha^2\beta^2(1-e^2)\sin^2(\theta_\beta-\theta_\alpha)}>0\\ C&=-\frac{\alpha^2\sin\theta_\alpha\cos\theta_\alpha+\beta^2\sin\theta_\beta\cos\theta_\beta}{\alpha^2\beta^2(1-e^2)\sin^2(\theta_\beta-\theta_\alpha)}\\ F&=\frac{e\sin\theta_\beta}{\alpha(1-e^2)\sin(\theta_\beta-\theta_\alpha)}\\ G&=-\frac{e\cos\theta_\beta}{\alpha(1-e^2)\sin(\theta_\beta-\theta_\alpha)}\end{aligned} \tag{3}$$

Z równań (3) otrzymujemy

$$\begin{aligned}&1^0 \quad \operatorname{tg}\theta_\beta=-\frac{F}{G}, \quad \sin\theta_\beta \text{ ma znak } F.\\ &2^0 \quad \operatorname{tg}\theta_\alpha=\frac{AG-CF}{BF-CG}\\ &3^0 \quad \frac{e^2}{1-e^2}=\frac{AG^2+BF^2-2CFG}{AB-C^2}\\ &4^0 \quad \alpha e=\frac{\sqrt{(AG-CF)^2+(BF-CG)^2}}{AB-C^2}=\frac{AG-CF}{AB-C^2}\cdot\frac{1}{\sin\theta_\alpha}\\ &\qquad \beta e=\sqrt{\frac{F^2+G^2}{AB-C^2}}=\frac{F}{\sqrt{AB-C^2}}\cdot\frac{1}{\sin\theta_\beta}\end{aligned} \tag{4}$$

wzory, zapomocą których obliczamy elementy geometryczne orbity widomej ze spółczynników równania (e).

Równaniom (2) można przez prostą kombinację nadać postać

$$\beta\sin(\theta_\beta-\theta_\alpha)\sin E=\rho\sin(\theta-\theta_\alpha)$$
$$\alpha\sin(\theta_\beta-\theta_\alpha)(\cos E-e)=\rho\sin(\theta_\beta-\theta)$$

Skąd, uwzględniając, że

$$b\sin E=r\sin v \qquad\qquad a\cos E-ae=r\cos v,$$

icm©

otrzymamy

$$\operatorname{tg} v = \frac{\alpha}{\beta}\sqrt{1-e^2}\,\frac{\sin(\theta-\theta_\alpha)}{\sin(\theta_\beta-\theta)} \tag{5}$$

wzór, wyrażający związek między anomalją prawdziwą v towarzysza na torze rzeczywistym i jego kątem pozycyjnym na drodze widomej.

Mając v dla dwu pozycji satelity, obliczamy elementy mechaniczne P i T według wzorów:

$$\begin{aligned}
&\sin\lambda = e\\
&\operatorname{tg}\frac{E}{2} = \operatorname{tg}\frac{v}{2}\operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{\lambda}{2}\right)\\
&M = E - e\sin E\\
&n = \frac{M_2 - M_1}{t_2 - t_1}\\
&P = \frac{360^0}{n}\\
&T = t - \frac{M}{n}
\end{aligned} \tag{6}$$

Z elementów orbity widomej α, β, θ_α, θ_β, e można obliczyć elementy orbity rzeczywistej

a) zapomocą wzorów J. Herschela (p. str. 13).

b) albo lepiej zapomocą nowych wzorów:

$$\operatorname{tg}\nu = \frac{\alpha}{\beta}\sqrt{1-e^2}, \quad \nu < 90^0$$

$$\sin 2\mu = \sin 2\nu\sin(\theta_\beta - \theta_\alpha), \qquad 2\mu < 90^0$$

$$\cos i = \operatorname{tg}\mu$$

$$\operatorname{tg} 2\omega = \operatorname{tg} 2\nu\cos(\theta_\beta - \theta_\alpha), \qquad \sin 2\omega \text{ ma znak} - \cos(\theta_\beta - \theta_\alpha)$$

$$a = \alpha\operatorname{cosec}\nu\cos\mu$$

$$\operatorname{tg}(\theta_\alpha - \Omega) = \operatorname{tg}\omega\cos i, \qquad \Omega < 180^0.$$

Sposób 2-i. Za elementy geometryczne orbity widomej przyjmujemy:

a' półoś wielką orbity widomej,

b' półoś małą,

$\bar{\omega}$ kąt pozycyjny a' mniejszy od 180^0,

E_α' anomalję ekscentryczną promienia głównego,

e mimośród orbity rzeczywistej, wyznaczający położenie gwiazdy głównej na promieniu głównym.

Wtedy, jeśli są znane jeszcze elementy mechaniczne n i T, efemerydę towarzysza oblicza się zapomocą równań:

$E - e\sin E = n(t - T)$, — E anomalja ekscentryczna towarzysza na torze rzeczywistym,

$E' = E + E'_\alpha$, — E' anomalja ekscentryczna na torze widomym,

$$\rho\sin(\theta - \bar{\omega}) = b'\sin E' - b' e\sin E'_\alpha \tag{1'}$$

$$\rho\cos(\theta - \bar{\omega}) = a'\cos E' - a' e\cos E'_\alpha \tag{2'}$$

Rugując z dwu ostatnich równań E' i uwzględniając, że

$$\rho\sin(\theta - \bar{\omega}) = -\xi\sin\bar{\omega} + \eta\cos\bar{\omega}$$

$$\rho\cos(\theta - \bar{\omega}) = \xi\cos\bar{\omega} + \eta\sin\bar{\omega}$$

otrzymujemy równanie elipsy postaci (e), którego spółczynniki A, B, C, F, G są wyrażone przez przyjęte elementy orbity widomej. Z wyrażeń tych wyprowadzamy następujące związki między elementami i spółczynnikami

$$\operatorname{tg} 2\bar{\omega} = \frac{2C}{A - B}, \quad \cos 2\bar{\omega} \text{ ma znak } -(A - B), \quad \bar{\omega} < 180^0$$

$$\frac{e^2}{1 - e^2} = \frac{AG^2 + BF^2 - 2CFG}{AB - C^2}$$

$$b'^2(1 - e^2) = \frac{2}{A + B + \sqrt{(A-B)^2 + 4C^2}};$$

$$a'^2(1 - e^2) = \frac{2}{A + B - \sqrt{(A-B)^2 + 4C^2}};$$

$$\operatorname{tg}\theta_\beta = -\frac{F}{G}; \qquad \operatorname{tg} E'_\alpha = -\frac{b'}{a'}\operatorname{ctg}(\theta_\beta - \bar{\omega})$$

E'_α należy do ćwiercianu poprzedzającego ćwiercian $(\theta_\alpha - \bar{\omega})$

icm©

Z równań (1′) i (2′), kładąc w nich $E' = E + E'_\alpha$ i przekształcając, otrzymujemy:

$$a' r \sin v = b \rho \cos E'_\alpha \cos(\theta - \omega) \left[\frac{a'}{b'} \operatorname{tg}(\theta - \omega) - \operatorname{tg} E'_\alpha\right] \qquad (1'')$$

$$a' r \cos v = a \rho \cos E'_\alpha \cos(\theta - \omega) \left[\frac{a'}{b'} \operatorname{tg}(\theta - \omega) \operatorname{tg} E'_\alpha + 1\right] \qquad (2'')$$

Skąd, kładąc

$$\frac{a'}{b'} \operatorname{tg}(\theta - \omega) = \operatorname{tg} \varphi$$

i dzieląc (1″) przez (2″), mamy

$$\operatorname{tg} v = \operatorname{tg}(\varphi - E'_\alpha) \sqrt{1 - e^2}$$

Obliczywszy zapomocą dwu ostatnich wzorów anomalję prawdziwą v dwu położeń towarzysza na torze rzeczywistym, możemy znanym sposobem wyznaczyć elementy mechaniczne n i T orbity.

Przykład liczbowy (obliczenie toru widomego i rzeczywistego towarzysza Syrjusza) wykazuje całkowitą zgodność wyników, otrzymanych przy zastosowaniu wzorów klasycznych i nowych.

Delta Cephei

von

St. Lipiński.

Die vorliegende Mitteilung enthält die Bearbeitung meiner 136 Beobachtungen des Lichtwechsels von δ Cephei, angestellt mit blossem Auge vermittels der Argelanderschen Methode, in der Ortschaft Szadek ($\varphi = +51^0 40'$, $\lambda = 1^h 16^m E$), im Zeitraume: 1928 Juli 12 bis 1932 September 29.

In der Tafel I sind die Helligkeiten der Vergleichsterne angegeben. M bezeichnet die Harvards, M' die nach Einführung der Stufenskala korrigierten Helligkeiten. Bei Berechnung der Helligkeit von δ wurde der Stern ι Cephei nicht in Betracht gezogen, da er nach meinen Beobachtungen Lichtänderungen bis zu $0^m{\cdot}75$ Amplitude aufweist.

Tafel I.

Vergleichsterne.

Bez.	Stern	M	M'
		m	m
a	γ Cep.	3·42	3·49
b	ζ Cep	3·62	3·56
c	ι Cep	3·68	—
d	7 Lac	3·85	3·93
f	ε Cep	4·23	4·27
g	ξ Cep	4·40	4·32

Die Beobachtungen sind in der Tafel II zusammengestellt. Die Helligkeiten der Vergleichsterne wurden nicht auf Extinktion korrigiert, da sie alle in der Nähe des Variablen liegen und sich während der Beobachtungen in kleinen Zenithdistanzen befanden.