Powierzchnia krzywolinjowa 5-go rzędu z podwójną krzywą skośną rzędu 3-go

(Fläche 5. Ordnung mit einer doppelten kubischen Raumkurve)

przez

A. Plamitzera.

W pierwszej rozprawie [1]) o ogólnej powierzchni krzywolinjowej 5-go rzędu Ψ^5 z podwójną krzywą skośną 3-go rzędu, nie posiadającej żadnych dalszych punktów wielokrotnych, — podałem następujące konstrukcje rzutowe: Skoro ustanowimy przekształcenia kwadratowe (kremonjańskie 2-go stopnia) pomiędzy płaszczyznami wiązki (W) oraz płaszczyznami każdej z dwóch kolineacyjnych wiązek (W_1) i (W_2), to powierzchnia Ψ^5 może być utworem tych trzech wiązek, albo też utworem odpowiedniości [1,1]-znacznej, zachodzącej pomiędzy: a) płaszczyznami wiązki (W) oraz prostemi kongruencji K_{12} 1-go rzędu i 3-ej klasy, powstałej z przecięcia się homologicznych płaszczyzn kolineacyjnych wiązek (W_1) i (W_2); lub b) płaszczyznami wiązki (W_1) oraz prostemi kongruencji 2-go rzędu i 4-ej klasy, powstałej z przecięcia się homologicznych płaszczyzn wiązek (W) i (W_2).

W niniejszej rozprawie, korzystając ze znanego odwzorowania (ust. 1) płaszczyzn stycznych do powierzchni 2-go stopnia Ω^2 na płaszczyzny wiązki (W'), ustalam — za pośrednictwem kolineacyjnych wiązek (W'), (W_1) i (W_2) — odwzorowania pomiędzy płaszczyznami wiązek (Ω^2) i (W_ι), dla $\iota = 1,2$. Homologiczne płaszczyzny tych wiązek (Ω^2) i (W_ι) przecinają się w prostych, które tworzą (ust. 2) kongruencję bez

[1]) A. Plamitzer, Powierzchnia krzywolinjowa 5-go rzędu z podwójną krzywą skośną rzędu 3-go. Prace Matematyczno-Fizyczne. T. 38. Warszawa 1931.

linij osobliwych K_{0l} rzędu 2-go i klasy 5-ej. Następnie wykazuję, iż badana powierzchnia Ψ^5 może być utworem trzech wiązek (Ω^2), (W_1) i (W_2), albo też utworem odpowiedniości [1,1]-znacznej zachodzącej pomiędzy: a) prostemi kongruencji np. K_{01} rzędu 2-go i klasy 5-ej oraz płaszczyznami wiązki (W_2), względ. b) prostemi kongruencji K_{12} rzędu 1-go i klasy 3-ej oraz płaszczyznami wiązki (Ω^2). Wyznaczam 11 prostych i 55 stożkowych powierzchni Ψ^5, oraz badam takie zależności pomiędzy temi stożkowemi, które pozwalają mi uzyskać 165 punktów pojedyńczych osobliwych powierzchni Ψ^5. Przez każdy z owych 165-u punktów przechodzą trzy płaszczyzny o tej własności, iż każda z nich przecina Ψ^5 w stożkowej i ogólnej krzywej rzędu 3-go. Posługując się twierdzeniem podstawowem (ust. 9), dochodzę wreszcie do wyznaczenia powierzchni Ψ^5 za pośrednictwem trzech wiązek (W_0), (W_1) i (W_2) w sposób, omówiony w mojej pierwszej rozprawie. Ponieważ tam dokładnie były przeprowadzone badania krzywych skośnych wyższych rzędów, przynależnych do powierzchni Ψ^5, przeto obecnie pominąłem całkowicie analogiczne rozważania.

1. Symbolem $\Omega^2\,(\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda, \ldots)$ lub (Ω^2) oznaczać będziemy *wiązkę 2-go stopnia*, której podstawą jest powierzchnia 2-go stopnia — niezniekształcona i nie będąca pow. rozwijalną — Ω^2, a elementami są płaszczyzny styczne $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda, \ldots$ do tej kwadryki. Dowolna płaszczyzna λ wiązki (Ω^2), uważana za element stały, niechaj przecina poszczególne płaszczyzny tej wiązki odpow. w prostych $a = \lambda\,\alpha$, $b = \lambda\,\beta, \ldots$ Skoro W' jest dowolnym punktem, nie leżącym na płaszczyźnie λ, to rzucając owe proste $a, b, \ldots$ z punktu W', otrzymamy płaszczyzny $\alpha' = W' a$, $\beta' = W' b, \ldots$, należące do wiązki środkowej (W') o wierzchołku (środku) W'. Za pośrednictwem płaszczyzny λ ustanowiliśmy tedy odpowiedniość [1,1]-znaczną pomiędzy płaszczyznami α i α', β i $\beta', \ldots$ wiązek (Ω^2) i (W'), przyczem pary homologicznych płaszczyzn przecinają się w prostych $a = \alpha\,\alpha'$, $b = \beta\,\beta', \ldots$, przynależnych do stałej płaszczyzny λ. Skonstruowane w ten sposób *odwzorowanie* [1,1]-znaczne wiązki 2-go stopnia (Ω^2) na wiązkę środkową (W') oznaczać będziemy symbolem

$$\Omega^2\,(\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda, \ldots)\ \vartheta^*\ W'\,(\alpha', \beta', \gamma', \ldots) \tag{1}$$

albo też w skróceniu

$$(\Omega^2)\ \vartheta^*\,(W')\,. \tag{1a}$$

Niechaj stała płaszczyzna λ, która jest styczną w punkcie L do kwadryki Ω^2, przecina tę powierzchnię w dwóch tworzących (rzeczywistych lub urojonych sprzężonych) m i n. Z łatwością zauważymy, iż: a) płaszczyźnie $\mu' = W' m$ wiązki (W') podporządkowany jest w wiązce (Ω^2) — w myśl relacji (1) — pęk płaszczyzn $m\,(\delta, \varepsilon, \ldots)$ o osi m; b) płaszczyźnie $\nu' = W' n$ wiązki (W') podporządkowany jest w wiązce (Ω^2) pęk płaszczyzn (n) o osi n; c) płaszczyźnie λ wiązki (Ω^2) podporządkowany jest w wiązce (W') pęk płaszczyzn (l') o osi $l' = \mu' \nu'$. Owe trzy płaszczyzny λ, μ' i ν' nazywamy [1]) *płaszczyznami głównemi* odwzorowania, wymienionego pod (1).

Dowolna tworząca t kwadryki Ω^2 niechaj przebija płaszczyznę główną λ w punkcie $T = t\,\lambda$, który leży na tworzącej np. m. Skoro pęk $t\,(\delta, \varepsilon, \ldots, t\,m, \ldots)$ płaszczyzn stycznych do Ω^2 przetniemy płaszczyzną λ, a otrzymany pęk prostych $T\,(d, e, \ldots, m, \ldots)$ rzucimy z wierzchołka W', to z łańcucha utworów perspektywicznych $(t) \wedge (T) \overline{\wedge} (t')$ wynika perspektywiczność:

$$t\,(\delta, \varepsilon, \ldots, t\,m, \ldots) \wedge t'\,(\delta', \varepsilon', \ldots, \mu', \ldots) \tag{2}$$

pomiędzy pękami płaszczyzn o osiach t i t', przyczem prosta $t' = W'\,T$ leży na płaszczyźnie głównej $\mu' = W' m$ z wiązki (W'). Płaszczyznom wiązki (Ω^2), przechodzącym przez dowolną tworzącą t kwadryki Ω^2, podporządkowane są zatem — w myśl relacji (1) — w wiązce (W') płaszczyzny, przynależne do prostej t'. I nawzajem, pękowi płaszczyzn (t'), należącemu do wiązki (W'), którego oś t' leży na płaszczyźnie głównej μ' (względ. ν') tej wiązki, podporządkowany jest w wiązce (Ω^2) perspektywiczny do niego pęk płaszczyzn (t), a osią tego pęku jest tworząca t kwadryki Ω^2, przecinająca się z tworzącą m (względ. n) w punkcie $T = t'\,\lambda$. Wnosimy stąd, iż tworząca t kwadryki Ω^2 odwzorowała się na prostą t' wiązki (W').

Z dowolnego punktu D, nie leżącego na płaszczyźnie głównej λ, opiszmy na kwadryce Ω^2 stożek Δ^2 i przetnijmy go płaszczyzną λ w stożkowej D^2. Rzucając tę stożkową D^2 z punktu W', otrzymamy stożek Δ'^2. Z relacji (1) wynika, iż poszczególnym płaszczyznom $\xi, \eta, \ldots, \delta = D\,m$, $\varepsilon = D\,n, \ldots$ wiązki (Ω^2), stycznym do stożka Δ^2, podporządkowane są w wiązce (W') odpow. płaszczyzny $\xi', \eta', \ldots, \mu', \nu', \ldots$, styczne do stożka Δ'^2. Z łańcucha otrzymanych utworów perspektywicznych $(\Delta^2) \overline{\wedge} (D^2) \overline{\overline{\wedge}} (\Delta'^2)$ wynika perspektywiczność:

$$\Delta^2\,(\xi, \eta, \ldots, D\,m, D\,n, \ldots) \wedge \Delta'^2\,(\xi', \eta', \ldots, \mu', \nu', \ldots) \tag{3}$$

pomiędzy pękami płaszczyzn stycznych do stożków Δ^2 i Δ'^2.

Skoro założymy, iż wierzchołek D stożka Δ^2 leży na płaszczyźnie głównej λ, ale nie przynależy do Ω^2, to element λ przetnie pęk $\Delta^2\,(\xi, \eta, \ldots, \lambda, \ldots)$ w pęku prostych $D\,(x, y, \ldots)$. Poszczególnym płaszczyznom $\xi, \eta, \ldots$ pęku (Δ^2), należącym do wiązki (Ω^2), podporządkowane są w wiązce (W') płaszczyzny $\xi' = W' x$, $\eta' = W' y, \ldots$, które tworzą pęk płaszczyzn $d'\,(\xi', \eta', \ldots)$ o osi $d' = W' D$. Ponieważ płaszczyźnie głównej λ podporządkowany jest pęk płaszczyzn (l'), przeto w rozważanym przypadku pęk $\Delta'^2\,(\xi', \eta', \ldots, \mu', \nu', \ldots)$ rozpadł się na dwa pęki płaszczyzn (d') i (l') o osiach $d' = W' D$ i $l' = \mu' \nu'$

[1]) p. R. Sturm, Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften (G. V.) Leipzig u. Berlin 1909, Bd. IV. Nr. 906.

Zamiast relacji (3), otrzymamy wówczas perspektywiczność:

$$\Delta^2\,(\xi,\ \eta, \ldots, \lambda, \ldots)\ \overline{\wedge}\ d'\,(\xi',\ \eta', \ldots, \tau', \ldots) \tag{4}$$

w której elementami homologicznemi są płaszczyzna główna λ i płaszczyzua $\tau' = d'\,l'$.

Pomiędzy wiązką (W') oraz wiązkami (W_1) i (W_2), których wierzchołkami są dowolne i różne od siebie punkty W', W_1 i W_2, ustanówmy ogólne *kolineacje* za pośrednictwem łańcucha ogniw

$$(W')\ \varkappa\ (W_1)\ \varkappa\ (W_2). \tag{5}$$

Podporządkowane sobie płaszczyzny w tych wiązkach oznaczać będziemy przez α', α_1, α_2; β', β_1, β_2; ..., a homologiczne proste przez c', c_1, c_2; d', d_1, d_2; ...

Z zależności geometrycznych (1) i (5) wynikają bezpośrednio *odwzorowania* [1,1]-znaczne pomiędzy płaszczyznami wiązki (Ω^2) i płaszczyznami każdej z związek (W_1) i (W_2), które oznaczać będziemy symbolami:

$$\Omega^2\,(\alpha,\ \beta,\ \gamma, \ldots, \lambda, \ldots)\ \vartheta\ W_1\,(\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1, \ldots),$$
$$\Omega^2\,(\alpha,\ \beta,\ \gamma, \ldots, \lambda, \ldots)\ \vartheta\ W_2\,(\alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2, \ldots) \tag{6}$$

lub też w formie skróconej:

$$(\Omega^2)\ \vartheta\ (W_1), \qquad (\Omega^2)\ \vartheta\ (W_2)\,. \tag{6a}$$

Płaszczyznami głównemi tych odwzorowań są elementy λ, μ_1, ν_1, oraz λ, μ_2, ν_2, przyczem płaszczyzny μ', μ_1, μ_2, oraz ν', ν_1, ν_2 są elementami homologicznemi kolineacyjnych wiązek pod (5). W szczególności: a) płaszczyźnie głównej μ_ι (wzgl. ν_ι) wiązki (W_ι), dla $\iota = 1{,}2$, podporządkowany jest wiązce (Ω^2) pęk płaszczyzn m $(\partial,\ \varepsilon, \ldots)$ o osi m (wzgl. pęk płaszczyzn (n) o osi n); b) płaszczyźnie głównej λ wiązki (Ω^2) podporządkowany jest w wiązce (W_ι) pęk płaszczyzn (l_ι) o osi $l_\iota = \mu_\iota \nu_\iota$, przyczem proste l', l_1 i l_2 są elementami homologicznemi wiązek kolineacyjnych pod (5).

Uwzględniając zależności (5) i (6), otrzymamy obecnie dla $\iota = 1{,}2$, — zamiast relacyj (2), (3) i (4) — następujące rzutowości:

$$t\,(\partial,\ \varepsilon, \ldots, t\,m, \ldots)\ \overline{\wedge}\ t_\iota\,(\partial_\iota,\ \varepsilon_\iota, \ldots, \mu_\iota, \ldots) \tag{2a}$$
$$\Delta^2\,(\xi,\ \eta, \ldots, D\,m,\ D\,n, \ldots)\ \overline{\wedge}\ \Delta^2_\iota\,(\xi_\iota,\ \eta_\iota, \ldots, \mu_\iota,\ \nu_\iota, \ldots) \tag{3a}$$
$$\Delta^2\,(\xi,\ \eta, \ldots, \lambda, \ldots)\ \overline{\wedge}\ d_\iota\,(\xi_\iota,\ \eta_\iota, \ldots, \tau_\iota = d_\iota\, l_\iota, \ldots)\,. \tag{4a}$$

2. Niechaj pomiędzy wiązką 2-go stopnia (Ω^2) i wiązką środkową (W_ι), dla $\iota = 1{,}2$, zachodzi zależność geometryczna, wymieniona pod (6). Dowiedziemy [1]) prawdziwości następującego twierdzenia:

[1]) p. R. Sturm, l. c. G. V. Bd. IV. Nr. 844.

Ogół prostych $a_{0\iota} = \alpha\,\alpha_\iota$, $b_{0\iota} = \beta\,\beta_\iota, \ldots$, *przecięcia się homologicznych płaszczyzn* α i α_ι, β i $\beta_\iota, \ldots$ *danych wiązek* $(\Omega^2)\ \vartheta\ (W_\iota)$ *utworzy kongruencję* $K_{0\iota}$ *rzędu 2-go i klasy 5-ej.*

Celem wyznaczenia *rzędu* tej kongruencji, uważajmy dowolny punkt D za wierzchołek stożka Δ^2 opisanego na kwadryce Ω^2. Pękowi płaszczyzn Δ^2 $(\xi,\ \eta, \ldots)$ należącemu do wiązki (Ω^2), podporządkowany jest— w myśl relacji (3a) — w wiązce (W_ι) rzutowy do niego pęk płaszczyzn Δ^2_ι $(\xi_\iota,\ \eta_\iota, \ldots)$ stycznych do stożka Δ^2_ι o wierzchołku W_ι. Ponieważ przez wierzchołek D przechodzą dwie płaszczyzny styczne ε_ι i φ_ι do stożka Δ^2_ι, więc przez dowolnie przyjęty punkt D przechodzą dwie proste $e_{0\iota} = \varepsilon\,\varepsilon_\iota$ i $f_{0\iota} = \varphi\,\varphi_\iota$ kongruencji $K_{0\iota}$, która jest zatem 2-go rzędu. — Rząd tej kongruencji możemy też wyznaczyć przy pomocy pęku płaszczyzn (d_ι) o osi $d_\iota = D\,W_\iota$ i podporządkowanego mu w myśl relacji (4a) pęku płaszczyzn (Δ^2). Przez punkt D przechodzą dwie płaszczyzny ε i φ styczne do stożka Δ^2, a zarazem dwie proste $e_{0\iota} = \varepsilon\,\varepsilon_\iota$ i $f_{0\iota} = \varphi\,\varphi_\iota$ kongruencji $K_{0\iota}$, c. b. d. w.

Celem wyznaczenia *klasy* kongruencji $K_{0\iota}$, przetnijmy wiązki $(\Omega^2)\ \vartheta\ (W_\iota)$ dowolną płaszczyzną ω, która nie jest elementem tych wiązek. Przez dowolną prostą a_ι układu płaskiego (ω) przechodzi jedna płaszczyzna $\alpha_\iota = W_\iota\, a_\iota$ wiązki (W_ι); homologiczna płaszczyzna α wiązki (Ω^2) wyznacza prostą $a = \alpha\,\omega$, którą podporządkujemy prostej a_ι. Ponieważ przez prostą a przechodzą dwie płaszczyzny α i β wiązki (Ω^2), przeto prostej a podporządkowane są dwie proste $a_\iota = \alpha_\iota\,\omega$ i $b_\iota = \beta_\iota\,\omega$. Skoro utwory rzutowe, spełniające relację (4a), przetniemy płaszczyzną ω, to pękowi prostych D $(x_\iota\ y_\iota, \ldots)$ podporządkowany jest pęk prostych D^2 $(x,\ y, \ldots)$ stycznych do stożkowej D^2. Skonstruowana w ten sposób odpowiedniość pomiędzy prostemi a i a_ι płaszczyzny ω jest [1]) odpowiednością [1, 2]-znaczną stopnia 2-go, która posiada $1+2+2=5$ prostych zjednoczonych. Ponieważ przez każdą prostą zjednoczoną np. $a = a_\iota$ przechodzą dwie homologiczne płaszczyzny α i α_ι wiązek $(\Omega^2)\,\vartheta\,(W_\iota)$, przeto owa prosta $a = a_\iota = \alpha\,\alpha_\iota = a_{0\iota}$ jest elementem kongruencji $K_{0\iota}$. Na dowolnej płaszczyźnie ω leży 5 prostych kongruencji $K_{0\iota}$, jest więc ona kongruencją klasy 5-ej, c. b. d. w.

Dla kongruencji $K_{0\iota}$ podaje Caporali (Napoli Acc. Rend. 1879, Mem. di Geom. Napoli 1888) [2]) następującą konstukcję:

Pomiędzy *stożkami* Δ_ι^2, które (relacja (3a)) należą do wiązki (W_ι) i są styczne do płaszczyzn głównych μ_ι, ν_ι tej wiązki, a *punktami* D przestrzeni

[1]) R. Sturm, l. c. G. V. Bd. IV. Nr. 839.

[2]) R. Sturm, Die Gebilde ersten u. zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung (L. G.) Leipzig 1892 — 1896, Bd. II. Nr. 453, Nr. 456.

(Σ) niechaj zachodzi rzutowość, w której każdemu pękowi (wzgl. wiązce) stożków Δ_ι^2 podporządkowane punkty D w przestrzeni (Σ) tworzą szereg punktów (wzgl. układ płaski). Skoro α_ι jest dowolną płaszczyzną wiązki (W_ι), to stożkom Δ_ι^2 stycznym do α_ι podporządkowane punkty D należą do układu płaskiego (α). Wykazać można [1], że dla poszczególnych płaszczyzn $\alpha_\iota, \ldots$ wiązki (W_ι) otrzymane w ten sposób płaszczyzny $\alpha, \ldots$ przestrzeni (Σ) utworzą wiązkę 2-go stopnia (Ω^2). Wówczas proste $a_{0\iota} = \alpha\,\alpha_\iota, \ldots$ należą do kongruencji $K_{0\iota}$ rzędu 2-go i klasy 5-ej.

Zauważyć należy, iż C a p o r a l i przeprowadził właściwie konstrukcję — (która w myśl zasady dwoistości odpowiada podanej powyżej konstrukcji) — dla kongruencji klasy 2-ej i rzędu 5-go, przyczem posługiwał się [1]) krzywemi płaskiemi rzędu n-go. Inną konstrukcję kongruencji klasy 2-ej i rzędu 5-go podaje [2]) R e y e:

Dla dowolnie przyjętego punktu P wyznaczamy płaszczyzny biegunowe $\gamma_1, \delta_1, \ldots$ ze względu na poszczególne kwadryki $\Gamma^2, \Delta^2, \ldots$ danego układu linjowego 3-go gatunku (Σ). Skoro poszczególnym kwadrykom $\Gamma^2, \Delta^2, \ldots$ układu (Σ) podporządkujemy odpow. płaszczyzny $\gamma_1, \delta_1, \ldots$ przestrzeni (Σ_1), to otrzymamy rzutowość, wtórej każdemu pękowi kwadryk (wzgl. jego podstawowej krzywej skośnej 4-go rzędu) układu (Σ) odpowiada w przestrzeni (Σ_1) pęk płaszczyzn (wzgl. oś tego pęku), oraz każdej wiązce kwadryk (wzgl. jego 8-u punktom podstawowym) układu (Σ) odpowiada w przestrzeni (Σ_1) wiązka płaszczyzn (wzgl. wierzchołek tej wiązki). — Oznaczmy przez g_1 taką każdą prostą przestrzeni (Σ_1), dla której podporządkowana w układzie (Σ) krzywa skośna 4-go rzędu rozpada się na krzywą skośną rzędu 3-go i na prostą g. Element g nazywamy wówczas p r o s t ą g ł ó w n ą układu (Σ). Skoro weźmiemy pod uwagę taki *szczególny* układ (Σ), że wszystkie jego kwadryki przechodzą przez trzy stałe punkty A, B i C (nie przynależne do jednej prostej), to wówczas: wszystkie proste wiązki np. (A) są prostemi głównemi g, a odpowiadające im proste g_1 przestrzeni (Σ_1) utworzą kongruencję 2-ej klasy i 5-go rzędu.

Kongruencja $K_{0\iota}$ rzędu 2 i klasy 5 posiada [3]) jeden punkt osobliwy 4-go stopnia, trzy punkty osobliwe 3-go stopnia, sześć punktów osobliwych 2-go stopnia, trzy punkty osobliwe 1-go stopnia i trzy proste podwójne. Owe elementy osobliwe wyznaczyć możemy w sposób następujący:

Skoro z wierzchołka W_ι wiązki (W_ι) opiszemy stożek Δ^2 na kwadryce Ω^2, to utworem pęków rzutowych $(\Delta^2) \barwedge (\Delta^2_\iota)$, spełniających relację (3a), jest stożek Δ^4 rzędu 4-go, z trzema prostemi podwójnemi q. Tworzące $x_{0\iota} = \xi\,\xi_\iota$, $y_{0\iota} = \eta\,\eta_\iota, \ldots$ stożka Δ^4 są prostemi kongruencji $K_{0\iota}$, tworzące podwójne $q = \pi\,\pi_\iota = \rho\,\rho_\iota$ tego stożka są prostemi podwójnemi

[1]) R. S t u r m, l. c, L. G. Bd. II. Nr. 453.

[2]) Th. R e y e, Ueber Strahlensysteme zweiter Klasse u. die Kummersche Fläche vierter Ordnung mit sechzehn Knotenpunkten. (Crelles Journal für Mathematik Bd. 86. 1879. — Die Geometrie der Lage. Bd. 3 (1910). Vortrag 19 u 20.

[3]) R. S t u r m, L. G. Bd. II. Nr. 444.

kongruencji $K_{0\iota}$, a jego wierzchołek W_ι jest punktem osobliwym 4-go stopnia. Skoro prostą $q = d_\iota$ uważać będziemy za oś pęku (d_ι), a z punktu $Q = q\lambda$ opiszemy na kwadryce Ω^2 stożek Δ^2, to utworem pęków rzutowych $(\Delta^2) \barwedge (d_\iota)$, spełniających relację (4a), jest stożek Δ^3 rzędu 3-go, z jedną prostą podwójną q. Wnosimy stąd, iż wierzchołek Q stożka Δ^3, t. j. punkt $Q = q\lambda$ przebicia się prostej podwójnej q z płaszczyzną główną λ, jest punktem osobliwym 3-go stopnia kongruencji $K_{0\iota}$.

Wiadomo nam [1]) z relacji (2a), iż dowolnej tworzącej t kwadryki Ω^2, która niechaj przecina tworzącą m, podporządkowana jest w wiązce (W_ι) prosta t_ι leżąca na płaszczyźnie głównej μ_ι. Otrzymane w ten sposób proste homologiczne t i $t_\iota, \ldots$ należą do utworów rzutowych Ω^2 $(t, \ldots) \barwedge W_\iota$ $(t_\iota, \ldots)$. Jeżeli płaszczyzna μ_ι przetnie kwadrykę Ω^2 w stożkowej S^2, a tworzące $t, \ldots$ w punktach $T_0, \ldots$, to otrzymany szereg punktów S^2 $(T_0, \ldots)$ jest rzutowy do pęku prostych W_ι $(t_\iota, \ldots)$, przyczem istnieją w tej rzutowości takie trzy punkty U_0, z których każdy leży na podporządkowanej mu prostej u_ι. Otrzymaliśmy zatem takie trzy pary homologicznych prostych u i u_ι, z których każda para przecina się w punkcie $U_0 = u\,u_\iota$. Utworem pęków płaszczyzn $(u) \barwedge (u_\iota)$, spełniających relację (2a), jest stożek 2-go stopnia o wierzchołku U, którego tworzącemi są proste $d_{0\iota} = \delta\,\delta_\iota, \ldots$ kongruencji $K_{0\iota}$. Wnosimy stąd, iż na płaszczyźnie głównej μ_ι leżące trzy punkty U_0 są punktami osobliwemi 2-go stopnia kongruencji $K_{0\iota}$. — W analogiczny sposób, uwzględniając tworzące kwadryki Ω^2, które przecinają tworzącą n, wykazać możemy, iż na płaszczyźnie głównej ν_ι leżą trzy punkty osobliwe 2-go stopnia V_0 kongruencji $K_{0\iota}$.

Z uwagi na to, iż płaszczyźnie głównej λ podporządkowany jest pęk płaszczyzn (l_ι) o osi $l_\iota = \mu_\iota\,\nu_\iota$, przeto punkt $L_\iota = \lambda\, l_\iota$ jest punktem osobliwym 1-go stopnia kongruencji $K_{0\iota}$. Z tych samych względów punkty $M_\iota = m\,\mu_\iota$ i $N_\iota = n\,\nu_\iota$ są również punktami osobliwemi 1-go stopnia badanej kongruencji $K_{0\iota}$.

3. Pomiędzy p ł a s z c z y z n a m i wiązek (Ω^2), (W_1) i (W_2) niechaj zachodzą zależności geometryczne

$$(W_1) \varkappa (W_2), \quad (\Omega^2) \vartheta (W_1), \quad (\Omega^2) \vartheta (W_2) \tag{7}$$

wymienione w ust. 1-ym pod (5) i (6a).

Ogół prostych $a_{12} = \alpha_1\,\alpha_2$, $b_{12} = \beta_1\,\beta_2, \ldots$, przecięcia się homologicznych płaszczyzn α_1 i α_2, β_1 i $\beta_2, \ldots$, kolineacyjnych wiązek (W_1) i (W_2) tworzy kongruencję K_{12} rzędu pierwszego i klasy 3-ej. Proste tej kongruencji są dwusiecznemi krzywej skośnej 3-go rzędu S^3_{12}, która jest

[1]) R. S t u r m, L. G. Bd. II. Nr. 456.

miejscem geometrycznem punktów przecięcia się homologicznych prostych owych wiązek $(W_1) \varkappa (W_2)$. Każdy punkt krzywej S^3_{12}, która przechodzi przez wierzchołki W_1 i W_2, jest punktem osobliwym 2-go stopnia dla kongruencji K_{12}.

Ogół prostych $a_{01} = \alpha\alpha_1$, $b_{01} = \beta\beta_1, \ldots$, przecięcia się homologicznych płaszczyzn α i α_1, β i $\beta_1, \ldots$ danych wiązek $(\Omega^2) \vartheta (W_1)$, utworzy (ust. 2) kongruencję K_{01} rzędu 2-go i klasy 5-ej.

Ogół prostych $a_{02} = \alpha\alpha_2$, $b_{02} = \beta\beta_2, \ldots$, przecięcia się homologicznych płaszczyzn α i α_2, β i $\beta_2, \ldots$ wiązek $(\Omega^2) \vartheta (W_2)$, utworzy kongruencję K_{02} rzędu 2-go i klasy 5-ej.

Skoro weźmiemy pod uwagę trójkę homologicznych płaszczyzn α, α_1 i α_2 wiązek, spełniających relację (7), to wówczas przez punkt $A = \alpha\alpha_1\alpha_2$ przechodzą: prosta $a_{12} = \alpha_1\alpha_2$ kongruencji K_{12}, prosta $a_{01} = \alpha\alpha_1$ kongruencji K_{01} i prosta $a_{02} = \alpha\alpha_2$ kongruencji K_{02}. Wiadomo, iż przez dowolny punkt D krzywej skośnej S^3_{12} przechodzą dwie homologiczne proste d_1 i d_2 kolineacyjnych wiązek $(W_1) \varkappa (W_2)$. Rzutowym pękom płaszczyzn d_1 $(\xi_1, \eta_1, \ldots, d_1 l_1, \ldots) \overline{\wedge}\, d_2$ $(\xi_2, \eta_2, \ldots, d_2 l_2, \ldots)$, których elementami są homologiczne płaszczyzny wiązek $(W_1) \varkappa (W_2)$, podporządkowany jest w wiązce (Ω^2) — w myśl relacji (4a) — pęk płaszczyzn Δ^2 $(\xi, \eta, \ldots, \lambda, \ldots)$ stycznych do stożka 2-go stopnia Δ^2. Ponieważ przez punkt $D = d_1 d_2$ przechodzą dwie płaszczyzny ε i φ styczne do stożka Δ^2 przeto przez D przechodzą dwie trójki płaszczyzn ε, ε_1, ε_2, oraz φ, φ_1, φ_2. A zatem:

Przez każdy punkt krzywej skośnej 3-go rzędu S^3_{12} — która jest miejscem geometrycznem punktów przecięcia się homologicznych prostych wiązek kolineacyjnych $(W_1) \varkappa (W_2)$ — *przechodzą dwie trójki homologicznych płaszczyzn badanych wiązek* (Ω^2), (W_1) *i* (W_2).

Zajmiemy się teraz wyznaczeniem liczby takich prostych, które równocześnie należą do trzech kongruencyj K_{12}, K_{01} i K_{02}. W tym celu ustanówmy — korzystając z relacji (7) — pomocniczą odpowiedniość pomiędzy płaszczyznami wiązki np. (W_1). Na dowolnej płaszczyźnie α_1 tej wiązki leży prosta $a_{12} = \alpha_1\alpha_2$, przez którą przechodzą dwie płaszczyzny ε i φ styczne do kwadryki Ω^2. Homologiczne płaszczyzny ε_1 i φ_1 wiązki (W_1) podporządkujmy elementowi α_1. Natomiast płaszczyźnie ε_1 odpowiadająca płaszczyzna ε wiązki (Ω^2) niechaj przetnie krzywą skośną S^3_{12} w trzech dwusiecznych a_{12}, b_{12}, i c_{12}, t. zn. prostych $a_{12} = \alpha_1\alpha_2$, $b_{12} = \beta_1\beta_2$ i $c_{12} = \gamma_1\gamma_2$. Rzucając owe dwusieczne z wierzchołka W_1 otrzymamy trzy płaszczyzny α_1, β_1 i γ_1, które podporządkujmy płaszczyźnie ε_1. W skonstruowanej w ten sposób odpowiedniości [3, 2]-znacznej pomiędzy płaszczyznami α_1 i ε_1 wiązki (W_1), każdy element zjednoczony $\alpha_1 = \varepsilon_1$ przechodzi przez prostą $e_{12} = \varepsilon_1\varepsilon_2$, która przynależy też

do płaszczyzny ε. Owa prosta spełnia zatem warunki $e_{12} = \varepsilon_1\varepsilon_2 = e_{01} = \varepsilon\varepsilon_1 = e_{02} = \varepsilon\varepsilon_2$ i jest wspólną prostą dla trzech kongruencyj K_{12}, K_{01} i K_{02}. Pękowi płaszczyzn d_1 $(\alpha_1, \ldots)$, którego osią jest dowolna prosta d_1 wiązki (W_1), podporządkowany jest w wiązce (W_2) rzutowy do niego pęk płaszczyz d_2 $(\alpha_2, \ldots)$. Przez proste $a_{12} = \alpha_1\alpha_2, \ldots$, które są zatem tworzącemi kwadryki skośnej Δ^2, poprowadzone płaszczyzny ε i $\varphi, \ldots$, styczne do kwadryki Ω^2 utworzą (jako pł. styczne do Δ^2) powierzchnię rozwijalną 4-ej klasy Φ^4. Wykażemy, iż homologiczne płaszczyzny ε_1 i $\varphi_1, \ldots$ wiązki (W_1) utworzą stożek 4-ej klasy $\Phi_1{}^4$. Przez dowolny punkt Q, leżący na płaszczyźnie głównej λ wiązki (Ω^2), przechodzą cztery płaszczyzny ξ, η, ζ, i τ styczne do Φ^4. Z rozważań ust. 1. wiadomo nam, iż w wiązce (W') podporządkowane są im płaszczyzny $\xi' = W'x$, $\eta' = W'y$, $\zeta' = W'z$ i $\tau' = W't$, przechodzące przez prostą $q' = W'Q$ i odpow. przez proste $x = \lambda\xi$, $y = \lambda\eta$, $z = \lambda\zeta$ i $t = \lambda\tau$. Z relacji (5) wynika jednak, iż w wiązce (W_1) przez homologiczną prostą q_1 przechodzą cztery płaszczyzny ξ_1, η_1, ζ_1 i τ_1, styczne do stożka $\Phi_1{}^4$. Wnosimy stąd, że ten stożek jest 4-ej klasy, c. b. d. o. — Skonstruowana odpowiedniość [3, 2] — znaczna w wiązce (W_1) pomiędzy płaszczyznami α_1 i ε_1 jest zatem stopnia 4-go. Ponieważ odpowiedniość ta posiada[1] $3 + 2 + 4 = 9$ elementów zjednoczonych, przeto dowiedliśmy prawdziwości twierdzenia:

Badane kongruencje K_{12}, K_{01} i K_{02} *posiadają dziewięć wspólnych prostych* $s^{\iota}{}_{012} = \sigma^{\iota}\sigma_1{}^{\iota}\sigma_2{}^{\iota}$, $(\iota = 1, 2, \ldots, 9)$.

Powyższy związek wypisać też możemy w następującej formie:

Skoro pomiędzy płaszczyznami wiązki 2-go stopnia (Ω^2) oraz *płaszczyznami każdej z dwóch kolineacyjnych wiązek* (W_1) *i* (W_2) *ustanowimy* wymienione od (7) *odwzorowanie* [1, 1]*-znaczne, to istnieje dziewięć takich trójek homologicznych płaszczyzn* σ^{ι}, $\sigma_1{}^{\iota}$ i $\sigma_2{}^{\iota}$ $(\iota = 1, 2, \ldots, 9)$ *tych wiązek, że każda trójka przecina się w jednej prostej* $s^{\iota}{}_{012} = \sigma^{\iota}\sigma_1{}^{\iota}\sigma_2{}^{\iota}$.

4. Dowiedziemy teraz prawdziwości następującego twierdzenia:

Skoro dane są wiązki (Ω^2), (W_1) i (W_2), które spełniają relację (7), *to wówczas na dowolnej prostej* p_0 *leży pięć takich punktów, że przez każdy z nich przechodzą trzy homologiczne płaszczyzny tych wiązek.*

Na prostej p_0 obierzmy dowolny punkt A i uważajmy go za wierzchołek stożka Δ^2 opisanego na kwadryce Ω^2. Pękowi płaszczyzn (Δ^2) podporządkowane są — w myśl relacji (3a) ust. 1-go — w wiązkach $(W_1) \varkappa (W_2)$ dwa rzutowe pęki $(\Delta_1{}^2) \overline{\wedge} (\Delta_2{}^2)$ płaszczyzn stycznych do stożków 2-go stopnia $\Delta_1{}^2$ i $\Delta_2{}^2$. Owe pęki utworzą powierzchnię skośną 4-go stopnia Δ^4, a cztery punkty A' przebicia się prostej p_0 z tą powierzchnią podporządkujmy punktowi A. — Przez każdy otrzymany punkt A'

[1] R. Sturm, G. V. Bd. IV. Nr. 839.

przechodzi tworząca $c_{12}=\gamma_1\gamma_2$ powierzchni Δ^4, przyczem c_{12} jest (ust. 3), prostą kongruencji K_{12} rzędu 1-go i klasy 3-ej. Ponieważ przez punkt A' przechodzi tylko jedna prosta $c_{12}=\gamma_1\gamma_2$ tej kongruencji, przeto elementom γ_1 i γ_2 wiązek (W_1) $\varkappa$ (W_2) podporządkowana jest tylko jedna płaszczyzna γ w wiązce (Ω^2), a temsamem punktowi A' podporządkowany jest na prostej p_0 tylko jeden punkt $A=\gamma p_0$. Ze skonstruowanej w ten sposób odpowiedniości $[1,4]$-znacznej pomiędzy punktami A i A' prostej p_0 wynika, iż przez każdy z *pięciu* punktów zjednoczonych $A=A'$ tej odpowiedniości przechodzi trójka homologicznych płaszczyzn γ, γ_1 i γ_2 badanych wiązek (Ω^2), (W_1) i (W_2), c. b. d. o.

Prawdziwość wypisanego powyżej twierdzenia możemy też dowieść, ustanawiając odpowiedniość $[2,3]$ — znaczną pomiędzy punktami prostej p_0. Przez dowolny punkt A prostej p_0 poprowadźmy pęk płaszczyzn (d_1), którego osią jest prosta $d_1=A\,W_1$ wiązki (W_1). Z relacyj (4a) i (5) ust. 1-go wynika, iż pękowi (d_1) podporządkowane są w wiązkach (Ω^2) i (W_2) dwa rzutowe pęki płaszczyzn (Δ^2) $\overline{\wedge}$ (d_2), których podstawami są stożek 2-go stopnia Δ^2 i prosta d_2. Owe pęki utworzą powierzchnię skośną Δ^3 stopnia 3-go, a t r z y punkty A' przebicia się prostej p_0 z Δ^3, podporządkujemy punktowi A. — Przez każdy punkt A przechodzi tworząca $c_{02}=\gamma\gamma_2$ powierzchni Δ^3. Ponieważ ogół prostych $b_{02}=\beta\beta_2,\ldots$ tworzy (ust. 2) kongruencję K_{02} rzędu 2-go i klasy 5-ej, przeto przez punkt A' przechodzą d w i e proste $c_{02}=\gamma\gamma_2$ i $e_{02}=\varepsilon\varepsilon_2$ tej kongruencji. Płaszczyznom γ i ε wiązki (Ω^2), wzgl. γ_2 i ε_2 wiązki (W_2), podporządkowane są w wiązce (W_1) płaszczyzny γ_1 i ε_1, które niechaj przecinają prostą p_0 w d w ó c h punktach $A=\gamma_1 p_0$, $A^*=\varepsilon_1 p_0$, odpowiadających punktowi A'. Ze skonstruowanej odpowiedniości $[2,3]$-znacznej wynika prawdziwość twierdzenia, wypisanego na początku tego ustępu.

Załóżmy teraz, iż prosta p_0 przecina krzywą skośną $S^3{}_{12}$ w punkcie A. Wówczas prostej $d_1=A\,W_1$ wiązki (W_1) podporządkowana jest w wiązce (W_2) prosta $d_2=A\,W_2$, która dla powierzchni skośnej Δ^3 jest prostą (kierownicą) podwójną. Punktowi A podporządkowane są zatem trzy punkty A' przebicia się p_0 z Δ^3, przyczem dwa z nich zjednoczyły się z punktem A. Poza tem dowód o odpowiedniości $[2,3]$ — znacznej nie ulega żadnej zmianie. Na prostej p_0 występuje również i w tym przypadku 5 punktów, z których każdy zawiera po trzy homologiczne płaszczyzny wiązek (Ω^2), (W_1) i (W_2), — ale *dwa* z tych pięciu punktów zjednoczy się z punktem A, gdyż przez ów punkt A leżący na krzywej $S^3{}_{12}$ przechodzą (ust. 3) dwie trójki homologicznych płaszczyzn ε, ε_1, ε_2 i φ, φ_1, φ_2.

W analogiczny sposób wykazać możemy, iż dla prostej p_0, przeci-

nającej się z krzywą skośną $S^3{}_{12}$ w dwóch punktach A i B, z omawianych *pięciu* punktów dwa zjednoczą się z punktem A, a dwa dalsze zjednoczą się z punktem B.

5. Skoro dla danych (ust. 3) wiązek

$$(W_1)\ \varkappa\ (W_2),\qquad (\Omega^2)\ \vartheta\ (W_1),\qquad (\Omega^2)\ \vartheta\ (W_2),\tag{7}$$

które spełniają relacje (5) i (6a) ust. 1-go, weźmiemy pod uwagę poszczególne trójki homologicznych płaszczyzn: α, $\alpha_1{}'$ α_2; β, β_1, β_2; ..., to ogół punktów $A=\alpha\,\alpha_1\,\alpha_2$, $B=\beta\,\beta_1\,\beta_2,\ldots$, przecięcia się owych poszczególnych trójek płaszczyzn, utworzy pewną powierzchnię krzywolinjową Ψ.

Powierzchnia ta jest rzędu 5-go Ψ^5, gdyż na dowolnej prostej p_0 leży (ust. 4) pięć takich punktów, z których każdy jest przecięciem się trzech homologicznych płaszczyzn danych wiązek, a temsamem jest punktem powierzchni Ψ^5. Jeżeli prosta p_0 przechodzi przez dowolny punkt $A=d_1\,d_2$ krzywej skośnej $S^3{}_{12}$, w którym przecinają się (ust. 3) dwie homologiczne proste d_1 i d_2 kolineacyjnych wiązek (W_1) i (W_2), — to z owych pięciu punktów przebicia się prostej p_0 z powierzchnią Ψ^5 *dwa* punkty zjednoczyły się (ust. 4) z punktem A. Ponieważ tę własność posiada k a ż d a prosta p_0, przechodząca przez punkt A, przeto: dowolny punkt A krzywej $S^3{}_{12}$ jest punktem *podwójnym powierzchni* Ψ^5.

Z rozważań ust. 3-go wynika bezpośrednio, iż *dziewięć* prostych $s^\iota{}_{012}=\sigma^\iota\sigma^\iota{}_1\sigma^\iota{}_2$, $\iota=1,2,\ldots,9$, l e ż y na badanej powierzchni Ψ^5. Wiadomo nam jednak (ust. 1), że płaszczyznom głównym μ_1 i μ_2 wiązek (W_1) i (W_2) podporządkowany jest w wiązce (Ω^2) pęk płaszczyzn m $(\delta,\varepsilon,\ldots)$, którego osią jest tworząca m kwadryki Ω^2. Ponieważ na prostej $m_{12}=\mu_1\mu_2$ leżące punkty $D=\delta\,m_{12}$, $E=\varepsilon\,m_{12},\ldots$ są punktami powierzchni Ψ^5, przeto prosta $m_{12}=\mu_1\mu_2$ leży na tej powierzchni. Z tych samych powodów prosta $n_{12}=\nu_1\nu_2$, przecięcia się płaszczyzn głównych ν_1 i ν_2, przynależy do powierzchni Ψ^5. Powierzchnia ta posiada zatem $9+2=11$ prostych, a każda z nich — jako krawędź homologicznych płaszczyzn wiązek kolineacyjnych (W_1) i (W_2) — jest (ust. 3) d w u s i e c z n ą krzywej skośnej $S^3{}_{12}$. A zatem:

Skoro pomiędzy płaszczyznami wiązki 2-go stopnia (Ω^2) oraz *płaszczyznami każdej z dwóch kolineacyjnych wiązek* (W_1) *i* (W_2) *ustanowimy* wymienione pod (7) *odwzorowanie [1,1]-znaczne,* to wówczas: *ogół punktów, z których każdy jest punktem przecięcia się trzech homologicznych płaszczyzn tych wiązek, utworzy powierzchnię krzywolinjową 5-go rzędu. Krzywa skośna 3-go rzędu* $S^3{}_{12}$ — będąca miejscem geometrycznem punktów przecięcia się homologicznych prostych kolineacyjnych wiązek (W_1) i (W_2) — *jest krzywą podwójną tej powierzchni.*

Powierzchnia ta posiada 11 prostych, które są dwusiecznemi krzywej podwójnej S^3_{12}. Dwie z pośród nich $m_{12} = \mu_1 \mu_2$ i $n_{12} = \nu_1 \nu_2$ są krawędziami przecięcia się płaszczyzn głównych wiązek (W_1) i (W_2), dalsze zaś są prostemi $s^\iota_{012} = \sigma^\iota \sigma^\iota_1 \sigma^\iota_2$ $(\iota = 1,2,\dots,9)$, z których każda leży na trzech homologicznych płaszczyznach σ^ι σ^ι_1 i σ^ι_2 danych wiązek.

6. Trzy homologiczne płaszczyzny np. α, α_1 i α_2 danych wiązek:

$$(W_1)\ \varkappa\ (W_2), \qquad (\Omega^2)\ \vartheta\ (W_1), \qquad (\Omega^2)\ \vartheta\ (W_2), \tag{7}$$

które spełniają relacje (5) i (6a) ust. 1-go, wyznaczają punkt $A = \alpha \alpha_1 \alpha_2$ badanej powierzchni Ψ^5. Przez punkt A przechodzą: prosta $a_{12} = \alpha_1 \alpha_2$ kongruencji K_{12} (ust. 3), prosta $a_{01} = \alpha \alpha_1$ kongruencji K_{01} i prosta $a_{02} = \alpha \alpha_2$ kongruencji K_{02}. Punkt $A = \alpha \alpha_1 \alpha_2$ powierzchni Ψ^5 uważać możemy tedy: za punkt $A = a_{12} \alpha$ przebicia się prostej a_{12} z płaszczyzną α, wzgl. za punkt $A = a_{01} \alpha_2$ przebicia się prostej a_{01} z płaszczyzną α_2 lub też za punkt $A = a_{02} \alpha_1$ przebicia się prostej a_{02} z płaszczyzną α_1.

Za pośrednictwem relacji (7) ustanowić możemy np. pomiędzy płaszczyznami α_1, $\beta_1,\dots$ wiązki (W_1) i prostemi $a_{02} = \alpha \alpha_2$, $b_{02} = \beta \beta_2,\dots$ kongruencji K_{02} rzędu 2-go i klasy 5-ej odpowiedniość [1,1]-znaczną. Jeżeli płaszczyzny α_1, $\beta_1,\dots$ należą do pęku (d_1) o dowolnej osi d_1, to zgodnie z relacją (4a) ust. 1-go podporządkowane im płaszczyzny w wiązkach $(\Omega^2)\ \vartheta\ (W_2)$ utworzą rzutowe pęki Δ^2 $(\alpha, \beta,\dots) \overline{\wedge}\ d_2$ $(\alpha_2, \beta_2,\dots)$, które wyznaczają jednobieżną powierzchnię skośną Δ^3_{02} stopnia 3-go i porządku 4-go z podwójną kierownicą d_2. Płaszczyznom α_1, $\beta_1,\dots$, pęku (d_1) podporządkowane są zatem w kongruencji K_{02} proste a_{02}, $b_{02},\dots$, które są tworzącemi jednobieżnej powierzchni skośnej Δ^3_{02}. Jeżeli osi $d_1 = t_1$ wiązki (W_1) podporządkowana jest (ust. 1) tworząca t kwadryki Ω^2, to zgodnie z relacją (2a) pęki płaszczyzn t $(\alpha, \beta,\dots) \overline{\wedge}$ t_2 $(\alpha_2, \beta_2,\dots)$ utworzą kwadrykę skośną Δ^2_{02}. Wówczas płaszczyznom α_1, $\beta_1,\dots$ pęku (t_1) podporządkowane proste a_{02}, $b_{02},\dots$ kongruencji K_{02} są tworzącemi kwadryki Δ^2_{02}. —Natomiast płaszczyznom α_1, $\beta_1,\dots$ wiązki (W_1) stycznym do dowolnego stożka 2-go stopnia Δ^2_1 odpowiadające im płaszczyzny w wiązkach $(\Omega^2)\ \vartheta\ (W_2)$ utworzą zgodnie z relacją (3a) ust. 1-go rzutowe pęki Δ^2 $(\alpha, \beta,\dots) \overline{\wedge}\ \Delta^2_2$ $(\alpha_2, \beta_2,\dots)$, które wyznaczają jednobieżną powierzchnię skośną Δ^4_{02} stopnia 4-go i porządku 6-go z podwójną krzywą skośną 3-go rzędu. Płaszczyznom α_1, $\beta_1,\dots$ stycznym do stożka Δ^2_1 podporządkowane są zatem w kongruencji K_{02} proste a_{02}, $b_{02}\dots$, będące tworzącemi jednobieżnej powierzchni skośnej Δ^4_{02}.

W podobny sposób ustanowić możemy analogiczną odpowiedniość [1,1]-znaczną pomiędzy płaszczyznami α_2, $\beta_2,\dots$ danej wiązki (W_2)

a prostemi $a_{01} = \alpha \alpha_1$, $b_{01} = \beta \beta_1,\dots$ kongruencji K_{01} rzędu 2-go i klasy 5-ej. A zatem:

Skoro pomiędzy płaszczyznami α_i i $\beta_i,\dots$ danej wiązki (W_i), $i = 1,2$ a prostemi $a_{0\iota} = \alpha \alpha_\iota$, $b_{0\iota} = \beta \beta_\iota,\dots$ $(\iota = 2,1)$ kongruencji $K_{0\iota}$ rzędu 2-go i klasy 5-ej — będącej utworem danych wiązek $(\Omega^2)\ \vartheta\ (W_\iota)$ ustanowimy powyższą odpowiedniość [1,1]-znaczną, to wówczas: ogół punktów $A = \alpha_i a_{0\iota}$, $B = \beta_i b_{0\iota},\dots$, przecięcia się homologicznych elementów tej odpowiedniości, utworzy powierzchnię krzywolinjową 5-go rzędu Ψ^5 z podwójną krzywą skośną 3-go rzędu S^3_{12}.

Za pośrednictwem relacji (7) ustanowić możemy odpowiedniość [1,1]-znaczną pomiędzy płaszczyznami α, $\beta,\dots$ wiązki (Ω^2) a prostemi $a_{12} = \alpha_1 \alpha_2$, $b_{12} = \beta_1 \beta_2,\dots$ kongruencji K_{12}. Skoro płaszczyzny α, $\beta,\dots$ należą do pęku (t), którego osią jest tworząca kwadryki Ω^2, to w myśl relacji (2a) ust. 1-go podporządkowane płaszczyzny w wiązkach $(W_1)\ \varkappa\ (W_2)$ utworzą dwa rzutowe pęki t_1 $(\alpha_1, \beta_1,\dots)$ i t_2 $(\alpha_2, \beta_2,\dots)$. Owe pęki wyznaczają kwadrykę Δ^2_{12}, a jej tworzące $a_{12} = \alpha_1 \alpha_2$, $b_{12} = \beta_1 \beta_2,\dots$ są prostemi kongruencji K_{12}, odpowiadającemi płaszczyznom pęku (t). Stożkowi Δ^2, opisanemu z dowolnego punktu płaszczyzny głównej λ na kwadryce Ω^2, podporządkowane są (relacja (4a)) dwa rzutowe pęki płaszczyzn $(d_1) \overline{\wedge} (d_2)$, których utworem jest kwadryka skośna Δ^2_{12}. Płaszczyznom α, $\beta,\dots$ stycznym do stożka Δ^2 podporządkowane są zatem w kongruencji K_{12} proste a_{12}, $b_{12},\dots$, będące tworzącemi kwadryki Δ^2_{12}. Jeżeli wierzchołek D stożka Δ^2 nie leży na płaszczyźnie λ, to z relacji (3a) wynika, iż podporządkowane pęki $(\Delta^2_1) \overline{\wedge} (\Delta^2_2)$ utworzą jednobieżną powierzchnię skośną Δ^4_{12} stopnia 4-go i porządku 6-go z podwójną krzywą skośną 3-go rzędu S^3_{12}. Wówczas płaszczyznom α, $\beta,\dots$ stycznym do stożka Δ^2 odpowiadają w kongruencji K_{12} proste a_{12}, $b_{12},\dots$, będące tworzącemi powierzchni Δ^4_{12}. — A zatem:

Skoro pomiędzy płaszczyznami α, $\beta,\dots$ danej wiązki (Ω^2) a prostemi $a_{12} = \alpha_1 \alpha_2$, $b_{12} = \beta_1 \beta_2,\dots$ kongruencji K_{12} rzędu 1-go i klasy 3-ej — będącej utworem danych wiązek kolineacyjnych (W_1) i (W_2) — ustanowimy powyższą odpowiedniość [1,1]-znaczną, to wówczas: ogół punktów $A = \alpha a_{12}$, $B = \beta b_{12},\dots$, przecięcia się homologicznych elementów tej odpowiedniości, utworzy powierzchnię krzywolinjową 5-go rzędu Ψ^5 z podwójną krzywą skośną 3-go rzędu S^3_{12}.

Skoro poszczególne proste a_{12}, $b_{12},\dots$ kongruencji K_{12} rzucimy odpow. z dowolnych punktów W^*_1 i W^*_2 krzywej skośnej S^3_{12}, to otrzymamy — jak wiadomo — homologiczne płaszczyzny $\alpha^*_1 = W^*_1 a_{12}$ i $\alpha^*_2 = W^*_2 a_{12}$, $\beta^*_1 = W^*_1 b_{12}$ i $\beta^*_2 = W^*_2 b_{12},\dots$ kolineacyjnych wiązek (W^*_1) i (W^*_2). Ogół wiązek kolineacyjnych, których wierzchołki W_1,

W_2, W^*_1, $W^*_2, \ldots$ leżą na dowolnej krzywej skośnej 3-go rzędu S^3_{12}, a płaszczyzny homologiczne α_1, α_2, α^*_1, $\alpha^*_2, \ldots$ przecinają się w jednej i tej samej dwusiecznej a_{12} krzywej S^3_{12}, t. zn. ogół wiązek kolineacyjnych, wyznaczających wspólną kongruencję K_{12} rzędu 1-go i klasy 3-ej prostych dwusiecznych krzywej S^3_{12}, nazywa [1]) Th. Reye *„szeregiem* kolineacyjnych wiązek". Z relacji (7) i przyjęcia szeregu kolineacyjnych wiązek:

$$(W_1)\ \varkappa\ (W_2)\ \varkappa\ (W^*_1)\ \varkappa\ (W^*_2) \tag{8}$$

wynikają bezpośrednio (ust. 1) odwzorowania [1,1]-znaczne

$$(\Omega^2)\ \vartheta\ (W_1{}^*),\qquad (\Omega^2)\ \vartheta\ (W^*_2) \tag{9}$$

pomiędzy płaszczyznami wypisanych wiązek. Płaszczyzny $\mu^*_1 = m_{12} W^*_1$, $\mu^*_2 = m_{12} W^*_2$, $\nu^*_1 = n_{12} W^*_1$ i $\nu^*_2 = n_{12} W^*_2$ są *płaszczyznami głównemi* wiązek (W^*_1) i (W^*_2).

Ponieważ dowolny punkt A powierzchni Ψ^5 uważać możemy za punkt $A = \alpha a_{12}$, a prosta a_{12} kongruencji K_{12} jest elementem $a_{12} = \alpha_1 \alpha_2 = \alpha^*_1 \alpha^*_2$, przeto trzy homologiczne płaszczyzny α, α^*_1 i α^*_2 wiązek (Ω^2), (W^*_1) i (W^*_2) przecinają się w punkcie $A = \alpha\alpha^*_1 \alpha^*_2$ powierzchni Ψ^5. Z rozważań tych i ust. 5 wynika prawdziwość następującego twierdzenia *podstawowego:*

Skoro pomiędzy płaszczyznami wiązki drugiego stopnia (Ω^2) *oraz płaszczyznami każdej z dwóch kolineacyjnych wiązek* (W^*_1) i (W^*_2) — *należących do szeregu* wiązek kolineacyjnych i posiadających wspólną kongruencję prostych dwusiecznych krzywej skośnej 3-go rzędu S^3_{12} — *ustanowimy* wymienione pod (9) *odwzorowanie [1,1]-znaczne,* to wówczas: *ogół punktów przecięcia się poszczególnych trójek homologicznych płaszczyzn owych trzech wiązek utworzy powierzchnię krzywolinjową 5-go rzędu* Ψ^5 *z krzywą podwójną* S^3_{12}.

Przyjęcie relacyj (8) i (9) powoduje wystąpienie, obok kongruencyj K_{01} i K_{02} (ust. 2), jeszcze dalszych kongruencyj 2-go rzędu i 5-ej klasy K^*_{01}, $K^*_{02}, \ldots$, których elementami są proste $a^*_{01} = \alpha\alpha^*_1$, $a^*_{02} = \alpha\alpha^*_2, \ldots$; $b^*_{01} = \beta\beta^*_1$, $b^*_{02} = \beta\beta^*_2, \ldots$ Kongruencje K_{01}, K_{02}, K^*_{01}, $K^*_{02}, \ldots$ posiadają tę charakterystyczną własność, że proste np. a_{01}, a_{02}, a^*_{01}, $a^*_{02}, \ldots$ leżą na płaszczyźnie α wiązki (Ω^2) i przecinają się w punkcie $A = \alpha a_{12}$ badanej powierzchni Ψ^5.

7. Zajmiemy się teraz konstukcją 55-u stożkowych, przynależnych do badanej powierzchni Ψ^5. Płaszczyźnie głównej λ wiązki (Ω^2) podporządkowane są (ust. 1) w wiązkach (W_1) $\varkappa$ (W_2) dwa rzutowe pęki

[1]) Journal für Mathematik, 1847, Bd. 10., S. 207.

płaszczyzn

$$l_1\ (\alpha_1, \beta_1, \ldots, \mu_1, \nu_1, \ldots)\ \overline{\wedge}\ l_2\ (\alpha_2, \beta_2, \ldots, \mu_2, \nu_2, \ldots) \tag{10}$$

których utworem jest kwadryka skośna Λ^2 o tworzących $a_{12} = \alpha_1 \alpha_2$, $b_{12} = \beta_1 \beta, \ldots$, $m_{12} = \mu_1 \mu_2$, $n_{12} = \nu_{1\,2}, \ldots$ Ponieważ owe tworzące należą do kongruencji K_{12} i są dwusiecznemi krzywej S^3_{12}, przeto owa krzywa S^3_{12} *leży* na kwadryce Λ^2. Płaszczyzna główna λ przecina tę kwadrykę w stożkowej L^2, która przynależy do powierzchni Ψ^5, gdyż każdy punkt $A = \lambda a_{12}$, $B = \lambda b_{12}, \ldots$, $M_0 = \lambda m_{12}$, $N_0 = \lambda n_{12}, \ldots$ owej stożkowej L^2 jest przecięciem trzech homologicznych płaszczyzn danych wiązek (Ω^2), (W_1) i (W_2). Skonstruowana w ten sposób stożkowa L^2 powierzchni Ψ^5 przecina się zatem w punktach M_0 i N_0 odpow. z prostemi m_{12} i n_{12} powierzchni Ψ^5, oraz przechodzi przez trzy punkty przecięcia się płaszczyzny głównej λ z krzywą skośną S^3_{12}.

W rozważanym przez nas przypadku ogólnym powierzchni Ψ^5 — płaszczyzny σ^ι_1 wiązki (W_1) nie należą do pęku (l_1), a temsamem proste $s^\iota_{012} = \sigma^\iota_1 \sigma^\iota_2$ $(\iota = 1, 2, \ldots 9)$ powierzchni Ψ^5 nie są tworzącemi kwadryki Λ^2. Wnosimy stąd, iż punkty $S^\iota_0 = \lambda s^\iota_{012}$ nie leżą w ogólności na stożkowej L^2. — Gdybyśmy przypuścili, iż punkt S^ι_0 zjednoczył się z punktem np. $A = \lambda a_{12}$ stożkowej L^2, to ów punkt, przez który przechodzą dwie proste s^ι_{012} i a_{12} kongruencji 1-go rzędu K_{12}, musiałby przynależeć (ust. 3) do krzywej S^3_{12}. Płaszczyzna główna λ miałaby wówczas szczególne położenie, gdyż przecinałaby się z prostą s^ι_{012} w punkcie, leżącym na krzywej skośnej S^3_{12}.

Celem wyznaczenia dalszych 18-u stożkowych powierzchni Ψ^5, weźmy pod uwagę płaszczyzny σ^ι $(\iota = 1, 2, \ldots 9)$ wiązki (Ω^2), z których każda przechodzi (ust. 3 i 5) odpow. przez prostą s^ι_{012} powierzchni Ψ^5. Płaszczyzna σ^ι jest styczną w punkcie S^ι do kwadryki Ω^2 i przecina ją w dwóch tworzących t^ι, v^ι, z których pierwsza niechaj przecina tworzącą m, druga zaś tworzącą n. (Owe proste m i n, leżą na płaszczyźnie λ). Proste t^ι i v^ι uważajmy za osie pęków płaszczyzn (t^ι) i (ν^ι). W myśl relacyj (2a) i (5) ust. 1 otrzymamy wówczas rzutowe pęki płaszczyzn:

$$t^\iota\ (\delta, \varepsilon, t^\iota m, \sigma^\iota, \ldots)\ \overline{\wedge}\ t^\iota_1\ (\delta_1, \varepsilon_1, \mu_1, \sigma^\iota_1, \ldots)\ \overline{\wedge}\ t^\iota_2\ (\delta_2, \varepsilon_2, \mu_2, \sigma^\iota_2, \ldots) \tag{11}$$

$$v^\iota\ (\xi, \eta, v^\iota n, \sigma^\iota, \ldots)\ \overline{\wedge}\ v^\iota_1\ (\xi_1, \eta_1, \nu_1, \sigma^\iota_1, \ldots)\ \overline{\wedge}\ v^\iota_2\ (\xi_2, \eta_2, \nu_2, \sigma^\iota_2, \ldots) \tag{12}$$

Utworem pęków (11) jest krzywa skośna 3-go rzędu $T^3{}_\iota$, która rozpada się na prostą $s^\iota_{012} = \sigma^\iota \sigma^\iota_1 \sigma^\iota_2$ i na *stożkową* $T^2{}_\iota$ o punktach $D = \delta\delta_1 \delta_2$, $E = \varepsilon\varepsilon_1 \varepsilon_2$, $M^\iota_0 = t^\iota m \,.\, \mu_1 \mu_2 \ldots$ Pęki (t^ι_1) $\overline{\wedge}$ (t^ι_2) utworzą kwadrykę skośną Γ^2 o tworzących $d_{12} = \delta_1 \delta_2$, $e_{12} = \varepsilon_1 \varepsilon_2$, $m_{12} = \mu_1 \mu_2$, $s^\iota_{012} = \sigma^\iota_1 \sigma^\iota_2, \ldots$, na której oczywiście (podobnie jak na kwadryce Λ^2) leży krzywa skośna S^3_{12}. Ponieważ poszczególne punkty D, E, $M^\iota_0, \ldots$ stożkowej T^2_ι, której płaszczyzną podstawową niechaj będzie τ_ι, uważać możemy za punkty: $D = \delta\,\delta_1\,\delta_2 = \delta\,d_{12} = d_{12}\,\tau_\iota$, $E = \varepsilon\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2 = \varepsilon\,e_{12} = e_{12}\,\tau_\iota$, $M^\iota_0 = t^\iota m \,.\, \mu_1\,\mu_2 = m_{12}\,\tau_\iota$, $S^\iota_0 = s^\iota_{012}\,\tau_\iota, \ldots$ przebicia się poszczególnych tworzących kwadryki Γ^2 z płaszczyzną τ_ι, przeto:

Stożkowa T^2_ι przecina w trzech punktach krzywą skośną S^3_{12} oraz przecina odpow. w punktach M^ι_0 i S^ι_0 proste m_{12} i s^ι_{012} powierzchni Ψ^5.

Korzystając z relacji (12), analogicznie wykazać możemy, iż utworem tych pęków jest krzywa skośna 3-go rzędu V^3_ι, która rozpada się na prostą $s^\iota_{012} = \sigma^\iota\sigma^\iota_1\,\sigma^\iota_2$ i na *stożkową* V^2_ι. Stożkowa ta, leżąca na płaszczyźnie ω_ι, przecina w trzech punktach krzywą skośną S^3_{12}, w punkcie $N^\iota_0 = n_{12} \,.\, v_\iota n = n_{12}\,\omega_\iota$ prostą n_{12} i w punkcie $S^\iota_* = s^\iota_{012}\,\omega_\iota$ prostą s^ι_{012} powierzchni Ψ^5.

Skoro jedna z 9-u płaszczyzn σ^ι należy równocześnie do pęków (t^ι) i (v^ι), spełniających relacje (11) i (12), to żadna z 8-u dalszych płaszczyzn σ^ι nie może należeć ani do pęku (t_ι), ani do pęku (v_ι). Wnosimy stąd, iż żadna ze stożkowych T^2_ι wzgl. V^2_ι nie przecina się wcale z żadną z owych ośmiu dalszych prostych s^ι_{012} powierzchni Ψ^5. Z uwagi na to, iż płaszczyzna główna ν_1 wiązki (W_1) nie może należeć do pęku (t^ι), a płaszczyzna μ_1 nie może należeć do pęku (v^ι), przeto: stożkowa T^2_ι nie przecina wcale prostej $n_{12} = \nu_1\,\nu_2$, a stożkowa V^2_ι nie przecina prostej $m_{12} = \mu_1\,\mu_2$.

Wykażemy teraz, iż powierzchnia Ψ^5 posiada jeszcze 36 dalszych stożkowych. Z pośród 9-u płaszczyzn σ^ι wiązki (Ω^2) weźmy pod uwagę dwie dowolne płaszczyzny np. σ^1 i σ^2, a następnie z punktu $D = \lambda\,\sigma^1\,\sigma^2$ płaszczyzny głównej λ opiszmy stożek Δ^2 na kwadryce Ω^2. W myśl relacyj (4a) i (5) ust. 1-go otrzymamy rzutowe pęki:

$$\begin{aligned}\Delta^2\ (\gamma, \ldots, \sigma^1, \sigma^2, \lambda, \ldots) &\;\overline{\wedge}\; d_1\ (\gamma_1, \ldots, \sigma^1{}_1, \sigma^2{}_1, d_1\,l_1, \ldots) \\ &\;\overline{\wedge}\; d_2(\gamma_2, \ldots, \sigma^1{}_2, \sigma^2{}_2, d_2\,l_2, \ldots) \qquad (13)\end{aligned}$$

których utworem jest krzywa skośna 4-go rzędu D^4, rozpadająca się na proste $s^1_{012} = \sigma^1\,\sigma^1{}_1\,\sigma^1{}_2$ i $s^2_{012} = \sigma^2\,\sigma^2{}_1\,\sigma^2{}_2$, oraz na *stożkową* D^2_{12}. Pęki $(d_1) \;\overline{\wedge}\; (d_2)$ utworzą kwadrykę skośną Δ^2_{12} o tworzących $c_{12} = \gamma_1\,\gamma_2, \ldots$, $s^1_{012} = \sigma^1{}_1\,\sigma^1{}_2$, $s^2_{012} = \sigma^2{}_1\,\sigma^2{}_2, \ldots$ Na Δ^2_{12} (podobnie jak na kwadrykach Λ^2 i Γ^2) leży krzywa skośna S^3_{12}. Ponieważ poszczególne punkty $C = \gamma\,\gamma_1\,\gamma_2, \ldots$ stożkowej D^2_{12}, przynależnej do płaszczyzny δ_0, uważać możemy za punkty: $C = \gamma\,\gamma_1\,\gamma_2 = \gamma\,c_{12} = c_{12}\,\delta_0, \ldots$, $S^1_{12} = \sigma^1\,\sigma^1{}_1\,\sigma^1{}_2 = s^1_{012}\,\delta_0$, $S^2_{12} = s^2_{012}\,\delta_0, \ldots$ przebicia się poszczególnych tworzących kwadryki Δ^2_{12} z płaszczyzną δ_0, przeto:

Stożkowa D^2_{12} przecina w trzech punktach krzywą skośną S^3_{12}, oraz przecina odpow. w punktach S^1_{12} i S^2_{12} proste s^1_{012} i s^2_{012} powierzchni Ψ^5.

Ponieważ żadna z 7-u dalszych płaszczyzn $\sigma^3, \ldots, \sigma^9$ wiązki (Ω^2) nie może należeć do pęku (Δ^2), a płaszczyzny główne μ_1 i ν_1 wiązki (W_1) nie mogą należeć do pęku (d_1), przeto: stożkowa D^2_{12} nie przecina się wcale z prostemi $s^3_{012}, \ldots s^9_{012}$, $m_{12} = \mu_1\,\mu_2$ i $n_{12} = \nu_1\,\nu_2$ powierzchni Ψ^5.

Takich stożkowych $D^2_{\iota\varkappa}$, dla których każde dwie proste s^ι_{012} i $s^\varkappa_{012}$ $(\iota = 1,2, \ldots, 9$, $\varkappa = 1,2, \ldots, 9$, $\iota \neq \varkappa)$ są siecznemi pojedyńczemi, mamy tedy $\binom{9}{2} = \frac{9\,.\,8}{1\,.\,2} = 36$.

Z rozważań tego ustępu wynika prawdziwość twierdzeń:

Na powierzchni krzywolinjowej Ψ^5 *leży 55 stożkowych, przyczem każda z tych stożkowych przecina się w trzech punktach z podwójną krzywą skośną* S^3_{12} *tej powierzchni. Każde dwie proste — z pośród 11-u* prostych powierzchni Ψ^5 — *są siecznemi pojedyńczemi jednej stożkowej* powierzchni Ψ^5, przyczem *owa stożkowa nie przecina wcale 9-u dalszych prostych* tej powierzchni.

8. Dowolna prosta powierzchni Ψ^5, oraz każda z 10-u dalszych prostych tej powierzchni wyznacza 10 par prostych. Ponieważ proste każdej pary (ust. 7) są siecznemi pojedyńczemi tylko jednej stożkowej powierzchni Ψ^5, przeto:

Każda prosta powierzchni Ψ^5 *przecina 10 stożkowych tej powierzchni, a nie przecina wcale 45-u dalszych stożkowych powierzchni* Ψ^5.

W szczególności prosta $m_{12} = \mu_1\,\mu_2$ powierzchni Ψ^5 — p. relacje (10), (11) i (12) ust. 7. — przecina stożkowe L^2 i T^2_ι, $(\iota = 1,2, \ldots, 9)$ odpow. w punkach: $M_0 = m_{12}\,\lambda$ i $M^\iota_0 = m_{12} \,.\, t^\iota m$, natomiast prosta $n_{12} = \nu_1\,\nu_2$ przecina stożkowe L^2 i V^2_ι odpow. w punktach $N_0 = n_{12}\,\lambda$ i $N^\iota_0 = n_{12} \,.\, v^\iota n$. Ponieważ proste m i n płaszczyzny głównej $\lambda = mn$, oraz proste m_{12} i n_{12} (ust. 1) są w ogólności prostemi s k o ś n e m i, przeto prosta m_{12} przebija płaszczyzny λ, $t^1 m$, $t^2 m, \ldots$, $t^9 m$ pęku (m) w dziesięciu różnych od siebie punktach M_0, $M^1_0, \ldots$, M^9_0, prosta zaś n_{12} przebija płaszczyzny λ, $v^1 n$, $v^2 n, \ldots$. $v^9 n$ pęku (n) w dziesięciu różnych od siebie punktach N_0, $N^1_0, \ldots$, N^9_0. — Wnosimy stąd, że w ogólnym przypadku stożkowe L^2 i V^2_ι nie mogą przecinać się na prostej n_{12}.

Z rozważań ust. 1-go wiadomo jednak, iż w szczególnym przypadku proste m i m_{12}, wzgl. n i n_{12} mogą się przecinać. Wówczas w punkcie $m \,.\, m_{12}$ zjednoczą się wszystkie punkty M_0 i $M_0{}^\iota$, wzgl. w punkcie $n \,.\, n_{12}$ zjednoczą się wszystkie punkty N_0 i $N_0{}^\iota$. W pierwszym przypadku stożkowe L^2 i T^2_ι przecinają się w punkcie $M_0 \equiv M^\iota_0$ prostej m_{12}, w drugim zaś przypadku stożkowe L^2 i V^2_ι przecinają się w punkcie $N_0 \equiv N^\iota_0$ prostej n_{12}.

Skoro weźmiemy pod uwagę jedną z prostych $s^{\iota}_{012} = \sigma^{\iota}\sigma^{\iota}_1\sigma^{\iota}_2$ ($\iota = 1,2,\ldots,9$) powierzchni Ψ^5, np. prostą s^1_{012}, to — p. relacje (11), (12) i (13) ust. 7 — owa prosta s^1_{012} przecina jedną stożkową T^2_1, jedną stożkową V^2_1, oraz ośm takich stożkowych D^2_{1i} (z pośród 36-u stożkowych $D^2_{\iota\varkappa}$), dla których siecznemi są proste s^1_{012} i s^i_{012} dla $i = 2,3,\ldots,9$. Prosta s^1_{012} przecina te stożkowe odpow. w różnych od siebie punktach: S^1_0, S^1_*, S^1_{12}, $S^1_{13}, \ldots, S^1_{19}$.

Teraz dowiedziemy prawdziwości następującego twierdzenia:

Każde dwie stożkowe powierzchni Ψ^5, *dla których żadna* z 11-u *prostych* tej powierzchni *nie jest wspólną sieczną, przecinają się w jednym punkcie.*

Z pośród 36-u stożkowych $D^2_{\iota\varkappa}$ weźmy pod uwagę np. stożkową D^2_{12}, której siecznemi są proste s^1_{012} i s^2_{012}, oraz stożkową np. D^2_{34}, której siecznemi są dwie dowolne proste s^3_{012} i s^4_{012}, z pośród siedmiu dalszych prostych s^{ε}_{012} ($\varepsilon = 3,4,\ldots,9$) powierzchni Ψ^5. Takich stożkowych D^2_{34} mamy tedy $\binom{7}{2} = \frac{7.6}{1.2} = 21$. Stożkowa D^2_{12} jest utworem pęków $(\Delta^2) \overline{\wedge} (d_1) \overline{\wedge} (d_2)$, spełniających relację (13) ust. 7-go, stożkowa zaś D^2_{34} niechaj będzie utworem pęków rzutowych:

$$\Delta'^2\,(\gamma', \ldots, \sigma^3, \sigma^4, \lambda, \ldots) \overline{\wedge}\, d'_1\,(\gamma'_1, \ldots, \sigma^3_1, \sigma^4_1, d'_1 l_1, \ldots)$$
$$\overline{\wedge}\, d'_2\,(\gamma'_2, \ldots, \sigma^3_2, \sigma^4_2, d'_2 l_2, \ldots), \tag{14}$$

które należą odpow. do badanych wiązek (Ω^2), (W_1) i (W_2). Pęki (d_1) i (d'_1) wiązki (W_1) posiadają wspólną płaszczyznę $d_1 d'_1 = \varphi_1$. W myśl relacji (7) elementowi φ_1 podporządkowana jest w wiązce (W_2) płaszczyzna $\varphi_2 = d_2 d'_2$, a w wiązce (Ω^2) płaszczyzna φ, przyczem φ_2 jest elementem wspólnym pęków (d_2) i (d'_2), a płaszczyzna φ jest wspólnym elementem pęków (Δ^2) i (Δ'^2). Z relacji (13) wynika, że punkt $F = \varphi\varphi_1\varphi_2$ jest punktem stożkowej D^2_{12}, z relacji zaś (14), iż punkt F jest punktem stożkowej D^2_{34}. Innemi słowy: stożkowe D^2_{12} i D^2_{34} przecinają się w punkcie $F = \varphi\varphi_1\varphi_2$, c. b. d. o. — Z rozważań naszych wynika, iż stożkowa D^2_{12} przecina 21 takich stożkowych D^2_{34}.

Przypuśćmy, że dowolny punkt $C = \gamma\gamma_1\gamma_2$ stożkowej np. D^2_{12} i dowolny punkt $E = \varepsilon\varepsilon_1\varepsilon_2$ stożkowej np. D^2_{34} zjednoczyły się w punkcie $P = C = E$. Ponieważ przez punkt P przechodzą proste $c_{12} = \gamma_1\gamma_2$ i $e_{12} = \varepsilon_1\varepsilon_2$ kongruencji 1-go rzędu K_{12} (ust. 3), przeto P jest punktem osobliwym tej kongruencji i leży na krzywej skośnej S^3_{12}. Wiadomo nam jednak, że przez punkt P krzywej S^3_{12} przechodzą (ust. 3) dwie trójki homologicznych płaszczyzn np. $\xi\xi_1\xi_2$ i $\eta\eta_1\eta_2$ danych wiązek (Ω^2), (W_1) i (W_2). Tylko w tym szczególnym przypadku, gdy zjednoczą się płaszczyzny $\xi = \varepsilon$ i $\eta = \gamma$, to również zjednoczą się np. płaszczyzny $\xi_1 = \varepsilon_1$ i $\xi_2 = \varepsilon_2$, $\eta_1 = \gamma_1$ i $\eta_2 = \gamma_2$, a owe stożkowe D^2_{12} i D^2_{34} przetną się w punkcie P, przynależnym do krzywej skośnej S^3_{12}. — W rozważanym jed-

nak przez nas *ogólnym* przypadku powierzchni Ψ^5 stożkowe D^2_{12} i D^2_{34} (jak wogóle żadne dwie stożkowe) nie mogą przecinać się w punkcie P, leżącym na krzywej skośnej S^3_{12}.

Skoro weźmiemy pod uwagę stożkowe D^2_{12} i T^2_{ι} (dla $\iota = 3,4,\ldots,9$), to z relacyj (13) i (11) wynika bezpośrednio, iż pęki (d_1) i (t^{ι}_1) wiązki (W_1) posiadają wspólną płaszczyznę $d_1 t^{\iota}_1 = \varphi'_1$, a pęki (d_2) i (t^{ι}_2) wiązki (W_2) posiadają wspólną płaszczyznę $d_2 t^{\iota}_2 = \varphi'_2$. Homologiczna płaszczyzna φ' wiązki (Ω^2) musi być zatem wspólnym elementem pęków (Δ^2) i (t^{ι}). Wnosimy stąd, że stożkowe D^2_{12} i T^2_{ι} przecinają się w punkcie $F' = \varphi'\varphi'_1\varphi'_2$. — Z relacyj (13) i (12) wynika analogicznie, iż stożkowa D^2_{12} przecina każdą z siedmiu stożkowych V^2_{ι} (dla $\iota = 3,4,\ldots,9$).

Z relacyj (13) i (10) wynika, iż pęki (d_1) i (l_1) wiązki (W_1) posiadają wspólną płaszczyznę $d_1 l_1$, pęki zaś (d_2) i (l_2) wiązki (W_2) wspólną płaszczyznę $d_2 l_2$; podporządkowana im płaszczyzna główna λ w wiązce (Ω^2) należy do pęku (Δ^2). Stożkowe D^2_{12} i L^2 przecinają się zatem w punkcie, przynależnym do płaszczyzn λ, $d_1 l_1$ i $d_2 l_2$, c. b. d. o.

Z pośród 9-u stożkowych T^2_{ι} weźmy jedną np. T^2_1, oraz jedną ze stożkowych V^2_i, $i = 2,3,\ldots,9$. Z relacyj (11) i (12) wnosimy, że pęki (t^1_1) i (v^i_1) wiązki (W_1) posiadają wspólną płaszczyznę $t^1_1 v^i_1 = \zeta_1$, pęki zaś (t^1_2) i (v^i_2) wiązki (W_2) wspólną płaszczyznę $t^1_2 v^i_2 = \zeta_2$, oraz pęki (t^1) i (v^i) wiązki (Ω^2) mają wspólną płaszczyznę $t^1 v^i = \zeta$. Zatem przez punkt $Z = \zeta\zeta_1\zeta_2$ przechodzą obie stożkowe T^2_1 i V^2_i.

Z pośród 36-u stożkowych $D^2_{\iota\varkappa}$ wyeliminujmy ośm stożkowych D^2_{1i} ($i = 2,\ldots,9$), których siecznemi są proste s^1_{012} i s^i_{012}, a następnie z pośród pozostałych 28-u stożkowych $D^2_{\iota\varkappa}$ weźmy pod uwagę jedną np. stożkową D^2_{34}. Z relacyj (11) i (14) wynika, że pęki (t^1_1) i (d'_1) wiązki (W_1) posiadają wspólną płaszczyznę $t^1_1 d'_1 = \zeta'_1$, pęki zaś (t^1_2) i (d'_2) wiązki (W_2) mają wspólną płaszczyznę $t^1_2 d'_2 = \zeta'_2$. Podporządkowana im płaszczyzna ζ' wiązki (Ω^2) musi być wspólnym elementem pęków (t^1) i (Δ'^2). Stożkowe T^2_1 i D^2_{34} przecinają się zatem w punkcie $Z' = \zeta'\zeta'_1\zeta'_2$, c. b. d. o.—

Dowiedziemy teraz prawdziwości następującego twierdzenia:

Każde dwie stożkowe powierzchni Ψ^5, *dla których jedna prosta* — z pośród 11-u prostych powierzchni Ψ^5 — *jest wspólną sieczną* pojedyńczą, *nie przecinającą się wcale.*

Stożkowe np. L^2 i T^2_{ι} ($\iota = 1,2,\ldots,9$) posiadają wspólną sieczną $m_{12} = \mu_1\mu_2$, gdyż pęki (l_1) i (t^{ι}_1) posiadają — p. relacje (10) i (11) — wspólną płaszczyznę główną μ_1, a pęki (l_2) i (t^{ι}_2) wiązki (W_2) mają wspólną płaszczyznę główną μ_2. Ponieważ jednak podporządkowane im w wiązce (Ω^2) płaszczyzna główna λ i płaszczyzna $t^{\iota} m$ pęku (t^{ι}) są elementami różnemi od siebie, przeto stożkowa L^2 przechodzi przez punkt $M_0 = \lambda\mu_1\mu_2 = \lambda m_{12}$, a stożkowa T^2_{ι} przez punkt $M^{\iota}_0 = t^{\iota} m . \mu_1\mu_2$. Stożkowe L^2 i T^2_{ι}

(w ogólnym przypadku!) nie posiadają zatem żadnego punktu wspólnego. — Podobnie, korzystając z relacyj (10) i (12), wykazać możemy, iż stożkowe L^2 i V^2_ι posiadają wprawdzie wspólną sieczną $n_{12} = \nu_1 \nu_2$, ale przecinają n_{12} w dwóch różnych punktach $N_0 = \lambda n_{12}$ i $N^\iota_0 = v^\iota n . n_{12}$. Stożkowe L^2 i V^2_ι nie posiadają zatem żadnego punktu wspólnego, c. b. d. o. —

Stożkowe T^2_1 i T^2_i $(i = 2, 3, \ldots, 9)$ posiadają — p. relacja (11) — wspólną sieczną $m_{12} = \mu_1 \mu_2$, ale przecinają prostą m_{12} w różnych punktach $M^1_0 = t^1 m . m_{12}$ i $M^i_0 = t^i m . m_{12}$. Stożkowe zaś V^2_1 i V^2_i posiadają (relacja (12)) wspólną sieczną $n_{12} = \nu_1 \nu_2$, ale przecinają ją w punktach $N^1_0 = v^1 n . n_{12}$ i $N^i_0 = v^i n . n_{12}$. — Stożkowe te nie przecinają się zatem wcale, c. b. d. o.

Z relacyj (11) i (12) wynika, że stożkowe T^2_ι i V^2_ι posiadają wspólną sieczną $s^\iota_{012} = \sigma^\iota \sigma^\iota_1 \sigma^\iota_2$. Wprawdzie płaszczyzna σ^ι jest wspólnym elementem pęków (t^ι) i (v^ι), płaszczyzna σ^ι_1 jest wspólnym elementem pęków (t^ι_1) i (v^ι_1), a płaszczyzna σ^ι_2 takimże elementem pęków (t^ι_2) i (v^ι_2) — ale prosta s^ι_{012} przecina (ust. 7) stożkowe T^2_ι i V^2_ι w dwóch różnych punktach S^ι_0 i S^ι_*. — Z tych samych względów stożkowe T^2_1 i D^2_{1i}, oraz V^2_1 i D^2_{1i}, dla $i = 2, 3, \ldots, 9$, posiadają (p. relacje (11) i (13)) wspólną sieczną $s^1_{012} = \sigma^1 \sigma^1_1 \sigma^1_2$, ale przecinają się z prostą s^1_{012} odpow. w punktach S^1_0 i S^1_{12}, oraz S^1_* i S^1_{12}. Wnosimy stąd, że stożkowe: T^2_ι i V^2_ι, T^2_1 i D^2_{12}, V^2_1 i D^2_{12} nie przecinają się wcale, c. b. d. o. —

Z pośród 36-u stożkowych $D^2_{\iota\varkappa}$ powierzchni Ψ^5 weźmy pod uwagę np. stożkową D^2_{12} oraz stożkowe $D^2_{1\varepsilon}$ i $D^2_{2\varepsilon}$ $(\varepsilon = 3, 4, \ldots, 9)$. Z relacji (13) wnosimy, iż stożkowe D^2_{12} i $D^2_{1\varepsilon}$ posiadają wspólną sieczną $s^1_{012} = \sigma^1 \sigma^1_1 \sigma^1_2$, natomiast stożkowe D^2_{12} i $D^2_{2\varepsilon}$ posiadają wspólną sieczną $s^2_{012} = \sigma^2 \sigma^2_1 \sigma^2_2$. Prosta s^1_{012} przecina dwie pierwsze stożkowe odpow. w różnych od siebie punktach S^1_{12} i $S^1_{1\varepsilon}$, prosta zaś s^2_{012} przecina dwie ostatnie stożkowe odpow. w różnych od siebie punktach S^2_{12} i $S^2_{2\varepsilon}$. Owe stożkowe zatem nie przecinają się wcale, c. b. d. o. —

Z dotychczasowych rozważań tego ustępu wynika prawdziwość następującego twierdzenia:

Każda stożkowa, z pośród 55-u stożkowych, *powierzchni* Ψ^5 *przecina 36 stożkowych* tej powierzchni, oraz *nie przecina wcale 18-u pozostałych stożkowych powierzchni* Ψ^5.

W istocie bowiem stożkowa np. D^2_{12} przecina 21 stożkowych D^2_{34}, 7 stożkowych T^2_ι $(\iota = 3, 4, \ldots, 9)$, 7 stożkowych V^2_ι i stożkową L^2. — Stożkowa D^2_{12} natomiast nie przecina wcale stożkowych: T^2_1, T^2_2, V^2_1, V^2_2, siedmiu $D^2_{1\varepsilon}$ i siedmiu $D^2_{2\varepsilon}$ $(\varepsilon = 3, 4, \ldots, 9)$. — Stożkowa L^2 przecina 36 stożkowych $D^2_{\iota\varkappa}$, natomiast nie przecina wcale dziewięciu stoż-

kowych T^2_ι i tyleż stożkowych V^2_ι. — Dowolna stożkowa T^2_1 przecina ośm stożkowych V^2_i $(i = 2, 3, \ldots, 9)$ oraz 28 stożkowych D^2_{34}. Natomiast T^2_1 nie przecina wcale stożkowych: L^2, V^2_1, ośmiu T^2_i i ośmiu D^2_{1i}. — Analogicznie stwierdzić możemy, iż dowolna stożkowa V^2_1 przecina ośm stożkowych T^2_i i 28 stożkowych D^2_{34}; natomiast nie przecina wcale stożkowych: L^2, T^2_1, ośmiu V^2_i i ośmiu D^2_{1i}. —

9. Z jedenastu prostych m_{12}, n_{12} i s^ι_{012} $(\iota = 1, 2, \ldots, 9)$ powierzchni Ψ^5 utworzyć możemy $\binom{11}{3} = \frac{11 . 10 . 9}{1 . 2 . 3} = 165$ trójek prostych. Z pośród owych 165-u możliwych trójek weźmy pod uwagę *jedną dowolną* trójkę prostych i oznaczmy te proste symbolami x_{12}, y_{12} i z_{12}. Ponieważ (ust. 7) każde dwie proste powierzchni Ψ^5 są siecznemi jednej i tylko jednej stożkowej, leżącej na Ψ^5, przeto niechaj: proste y_{12} i z_{12} są siecznemi stożkowej, którą oznaczymy symbolem L^2_0, proste zaś z_{12} i x_{12} są siecznemi stożkowej M^2_0, a proste x_{12}, y_{12} są siecznemi stożkowej N^2_0. Dla *dowolnej trójki prostych* x_{12}, y_{12}, z_{12} powierzchni Ψ^5 otrzymaliśmy w ten sposób — na powierzchni Ψ^5 leżącą *trójkę stożkowych* L^2_0, M^2_0 i N^2_0, przyczem żadne dwie stożkowe owej trójki, jako posiadające wspólne sieczne (ust. 8), nie mogą się wcale przecinać. Stożkowe L^2_0, M^2_0 i N^2_0 niechaj leżą odpow. na płaszczyznach λ_0, μ_0 i ν_0, przecinających się w punkcie W_0. — Na danej powierzchni Ψ^5, z podwójną krzywą skośną S^3_{12}, weźmy pod uwagę jeszcze jedną z 8-u dalszych prostych i oznaczmy ją symbolem s, oraz dwa dowolne punkty np. W_1 i W_2 krzywej S^3_{12}. Wówczas dowieść można [1]) prawdziwości następującego twierdzenia *podstawowego:*

Ustanawiając pomiędzy płaszczyznami wiązki (W_0) oraz *płaszczyznami każdej z dwóch kolineacyjnych wiązek* (W_1) i (W_2) — *wyznaczających kongruencję* K_{12} *dwusiecznych krzywej* skośnej 3-go rzędu S^3_{12} — *przekształcenia kwadradowe* (kremonjańskie 2-go stopnia) *w ten sposób, iż elementy* λ_0, μ_0, ν_0 i $\xi_\iota = W_\iota x_{12}$, $\eta_\iota = W_\iota y_{12}$, $\zeta_\iota = W_\iota z_{12}$ $(\iota = 1, 2)$ *są płaszczyznami głównemi tych wiązek, a płaszczyzny* $\sigma_0 = W_0 s$ i $\sigma_\iota = W_\iota s$ *są elementami homologicznemi* tych wiązek, *to otrzymamy jako utwór tych trzech wiązek* (W_0), (W_1) i (W_2) *daną powierzchnię krzywolinjową* Ψ^5 *z podwójną krzywą skośną 3-go rzędu* S^3_{12}.

Każda z płaszczyzn głównych λ_0, μ_0 i ν_0 wiązki (W_1) przecina [2]) ową powierzchnię Ψ^5 odpow. w stożkowej L^2_0 (wzgl. M^2_0, N^2_0) i w ogólnej krzywej 3-go rzędu. Przez wierzchołek W_0, który jest punktem pojedyńczym powierzchni Ψ^5, przechodzą owe trzy [1]) ogólne krzywe pła-

[1]) A. Plamitzer, l. c. ust. 17, str. 123.

[2]) A. Plamitzer, l. c. ust. 10.

skie 3-go rzędu. Punkt W_0 jest tedy *osobliwym punktem pojedyńczym* powierzchni Ψ^5.

Z uwagi na to, iż z pośród 11-u prostych powierzchni Ψ^5 można utworzyć 165 trójek x_{12}, y_{12}, z_{12}, przeto [2]):

Badana powierzchnia Ψ^5 posiada 165 takich osobliwych punktów pojedyńczych, przyczem żaden z nich nie leży na podwójnej krzywej skośnej $S^3{}_{12}$ tej powierzchni Ψ^5.

Zusammenfassung.

Die Tangentialebenen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda, \ldots$ einer nichtabwickelbaren Fläche 2. Grades Ω^2 bilden einen Ebenenbündel 2. Ordnung Ω^2 $(\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda, \ldots)$. Projiziert man die Schnittgeraden $a = \lambda\alpha$, $b = \lambda\beta$, $c = \lambda\gamma, \ldots$ aus einem beliebigen Punkte W', so erhält man eine bekannte [1,1]-deutige Abbildung

$$\Omega^2\ (\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda, \ldots)\ \vartheta^*\ W'\ (\alpha', \beta', \gamma', \ldots) \tag{1}$$

zwischen den Ebenen α und $\alpha' = W'a$, β u. $\beta' = W'b$, γ u. $\gamma' = W'c, \ldots$ der Bündel (Ω^2) und (W'). Sind m und n die Erzeugenden der Fläche Ω^2, welche in der Tangentialebene λ liegen, so erkennt man sofort die Ebenen λ, $\mu' = W'm$ und $\nu' = W'n$ als *Hauptebenen* dieser Abbildung.

Zwischen drei gegebenen Bündeln (W'), (W_1) und (W_2) stelle man allgemeine Kollineationen:

$$(W')\ \varkappa\ (W_1)\ \varkappa\ (W_2) \tag{5}$$

her und bezeichne mit $\alpha', \alpha_1, \alpha_2$; $\beta', \beta_1, \beta_2; \ldots$; μ', μ_1, μ_2; $\nu', \nu_1, \nu_2; \ldots$ homologe Ebenen dieser Bündel. — Aus den Relationen (1) und (5) ergeben sich unmittelbar [1,1]-deutige Abbildungen:

$$\Omega^2\ (\alpha, \beta, \gamma, \ldots)\ \vartheta\ W_1\ (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \ldots),\quad \Omega^2\ (\alpha, \beta, \gamma, \ldots)\ \vartheta\ W_2\ (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \ldots) \tag{6}$$

zwischen den Ebenenbündeln (Ω^2), (W_1) und (W_2).

Die Schnittgeraden $a_{12} = \alpha_1\alpha_2$, $b_{12} = \beta_1\beta_2$, $c_{12} = \gamma_1\gamma_2, \ldots$ homologer Ebenen der kollinearen Bündel $(W_1)\ \varkappa\ (W_2)$ bilden eine Strahlenkongruenz K_{12} von der 1. Orgnung u. 3. Klasse und ihre Geraden sind Bisekanten einer kubischen Raumkurve $S^3{}_{12}$. — Ich bestätige folgende Sätze:

[2]) A. Plamitzer, l. c. ust. 17.

Die Schnittgeraden $a_{0\iota} = \alpha\alpha_\iota$, $b_{0\iota} = \beta\beta_\iota$, $c_{0\iota} = \gamma\gamma_\iota, \ldots$ $(\iota = 1,2)$ homologer Ebenen der Bündel $(\Omega^2)\ \vartheta\ (W_\iota)$ erzeugen eine Strahlenkongruenzen ohne singuläre Linien $K_{0\iota}$ von der 2. Ordnung und 5. Klasse.

Es gibt 9 Geraden, die gleichzeitig zu den drei Strahlenkongruenzen K_{12}, K_{01} und K_{02} gehören. Durch jede von diesen Geraden $s^\iota{}_{012} = \sigma^\iota\sigma^\iota{}_1\sigma^\iota{}_2$ $(\iota = 1,2, \ldots, 9)$ gehen je drei homologe Ebenen σ^ι, $\sigma^\iota{}_1$ und $\sigma^\iota{}_2$ der betrachteten Bündel (Ω^2), (W_1), (W_2).

Es liegen auf irgend einer festen Geraden p_0 fünf Schnittpunkte je dreier homologer Ebenen der betrachteten Bündel.

Die Schnittpunkte sämtlicher Tripel entsprechender Ebenen dieser Bündel erzeugen eine allgemeine Fläche 5-er Ordnung Ψ^5 mit einer doppelten kubischen Raumkurve $S^3{}_{12}$. Die 11 Geraden dieser Fläche, nämlich die 9 Geraden $s^\iota{}_{012}$ und die zwei Geraden $m_{12} = \mu_1\mu_2$, $n_{12} = \nu_1\nu_2$, sind Bisekanten der Doppelkurve $S^3{}_{12}$.

Aus den Relationen (1), (5) und (6) ergeben sich:

a) eine [1,1]-deutige Verwandtschaft zwischen den Ebenen α_ι, $\beta_\iota, \ldots$ des Bündels (W_ι), $\iota = 1,2$, und den Geraden $a_{0\varepsilon}$, $b_{0\varepsilon}, \ldots$ der Kongruenz $K_{0\varepsilon}$, $(\varepsilon = 2,1)$.

b) eine [1,1]-deutige Verwandtschaft zwischen den Ebenen $\alpha, \beta, \ldots$ des Bündels (Ω^2) und den Geraden a_{12}, $b_{12}, \ldots$ der Kongruenz K_{12}. — Homologe Elemente dieser Verwandtschaften schneiden sich in den Punkten $A = \alpha_\iota a_{0\varepsilon}$, $B = \beta_\iota b_{0\varepsilon}, \ldots$, resp. $A = \alpha a_{12}$, $B = \beta b_{12}, \ldots$ der Fläche Ψ^5.

Sind zwischen dem Ebenenbündel (Ω^2) und jedem von den kollinearen Ebenenbündeln $(W^*{}_1)$, $(W^*{}_2)$ — die zu einer R e i h e kollinearer Bündel gehören und eine gemeinsame Bisekantenkongruenz der Raumkurve $S^3{}_{12}$ bilden — [1,1]-deutige Abbildungen festgestellt, (die analog den unter (6) angegebenen Abbildungen sind), so erzeugen die Schnittpunkte sämtlicher Tripel homologer Ebenen dieser Bündel die Fläche Ψ^5.

Jeder von den 55 Kegelschnitten der Fläche Ψ^5 begegnet 3-mal die Doppelkurve $S^3{}_{12}$ und je einmal nur zwei Geraden (seine Stützgeraden) dieser Fläche.

Jede von den 11 Geraden der Fläche Ψ^5 trifft je einmal nur 10 Kegelschitte dieser Fläche, und gar nicht die 45 übrigen Kegelschnitte.

Zwei Kegelschnitte der Fläche Ψ^5, deren Stützgeraden eine, bezw. keine Gerade gemein haben, schneiden sich gar nicht, resp. schneiden sich in einem Punkte.

Jeder von den 55 Kegelschitten der Fläche Ψ^5 trifft 18 Kegelschnitte dieser Fläche gar nicht, die 36 übrigen Kegelschitte einmal.

Die Trägerebenen solcher drei Kegelschnitte, deren Stützgeraden einen und denselben Geradentripel der Ψ^5 bilden, schneiden sich in einem *einfachen singulären* Punkte der Fläche Ψ^5. Diese Fläche besitzt 165 solche einfache singuläre Punkte.

Provisional photovisual magnitudes of 260 stars near the North Pole

(Prowizoryczne wielkości fotowizualne 260 gwiazd w sąsiedztwie bieguna północnego)

by

E. Rybka

1. Introduction.

The aim of my work, started in 1931 in the Warsaw Astronomical Observatory, was to form a standard system of photovisual magnitudes of all stars brighter than $7^{m}.50$. Such investigations were suggested to me by Profesor Hertzsprung in 1930 during my stay at the Leiden Observatory with the view mainly, of forming an independent system of photovisual magnitudes to which all existing visual and photovisual system (especially Potsdamer Durchmusterung and Harvard Photometries) might be reduced.

I intended in the first part of my work to give photovisual magnitudes of all stars brighter than $7^{m}.50$ within 10^{0} from the north pole. Observations were executed by me in 1931 and almost performed to the whole extent, being discontinued at the end of 1931 owing to my departure from the Warsaw Observatory to Lwów University in January 1932. A part of the plates only could be measured with the Schilt microphotometer in the Warsaw Observatory during 1931 and in the beginning of 1932. Continuation of measurements in the Warsaw Observatory being afterwards impossible, I decided to publish provisional results from measures on 19 plates, which form about $^{1}/_{4}$ of the whole observational material. Final magnitudes will be published as soon as the remaining plates are measured and reduced.