Mécanique absolue et sa représentation dans l'espace-temps des configurations

(Mechanika bezwzględna i jej odwzorowanie w przestrzeni-czasie konfiguracyj)

par

Z. Horák

Introduction.

On doit à Hertz l'idée très utile de représenter la dynamique de systèmes matériels dans l'espace des configurations. L'application du calcul absolu moderne a apporté beaucoup de perfectionnements à cette interprétation de sorte qu'au jourd'hui le problème est complètement résolu dans le cas de systèmes scléronomes (holonomes ou non). Quant aux systèmes rhéonomes, cette question est liée très étroitement au problème de l'interprétation de n'importe quels systèmes dans l'espace-temps des configurations. Ce dernier problème a été traité pour la première fois en 1922 par E. Cartan [1]) qui a étendu la notion d'espace-temps, introduite dans la théorie de la relativité par Minkowski, aux systèmes conservatifs et a établi le *principe de la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie*, exprimant une loi indépendante de tout mode particulier de repérage de l'espace-temps. Cela donne à penser que les équations de Lagrange, pour les systèmes conservatifs, demeurent invariables, si l'on effectue un changement de paramètres de configuration et du temps t, comme l'a démontré B. Hostinský (*1*), et que par suite les lois du mouvement de tels systèmes admettent une interprétation géométrique dans l'espace-temps des configurations.

[1]) E. Cartan *1*, Chapitre I (Voir l'index des travaux cités à la fin du présent mémoire).

En effet, L. P. Eisenhart (*1*) a abordé ce problème pour les systèmes conservatifs de deux modes différents. En cas d'un système scléronome à n degrés de liberté, il envisage un espace-temps riemannien à $n+1$ dimensions, en cas d'un système rhéonome, au contraire, une variété à $n+2$ dimensions. Eisenhart suppose la métrique de l'espace-temps sous la forme

$$d\sigma^2 = g_{\lambda\mu}\, dx^\lambda\, dx^\mu + A\, du^2$$

où $T = \frac{1}{2} g_{\lambda\mu}\, \dot{x}^\lambda \dot{x}^\mu$ désigne l'énergie cinétique du système, et définit la fonction $A(x^\lambda)$ et la variable u de telle manière que les équations des géodésiques se confondent avec celles qui expriment les lois du mouvement et de la force vive. Cela entraîne

$$(1) \qquad \frac{1}{2A} = V + b, \qquad du = \frac{dt}{A}$$

(V désigne le potentiel, b une constante arbitraire), de sorte que

$$(2) \qquad d\sigma^2 = g_{\lambda\mu}\, dx^\lambda\, dx^\mu + \frac{du^2}{2(V+b)}.$$

Cette forme est le point de départ de T. Lewis (*1*) qui arrive à une interprétation presque identique à celle d'Eisenhart, tandis que l'auteur (Horák *9*) a proposé de définir la métrique moyennant la forme

$$(3) \qquad d\sigma^2 = g_{\lambda\mu}\, dx^\lambda\, dx^\mu + 2V\, dt^2$$

ce qui donne

$$d\sigma = \sqrt{2\varepsilon}\, dt,$$

$\varepsilon = T + V$ désignant l'énergie totale, de sorte que les équations du mouvement deviennent

$$(4) \qquad \varepsilon \varkappa_\alpha = X_\alpha \qquad (\alpha = 0, 1, 2, \ldots n)$$

où $x^0 = t$, $\varkappa_\alpha$ désigne le vecteur courbure de la courbe représentant le mouvement du système dans l'espace-tepms des configurations, $X_\lambda = -\frac{\partial V}{\partial x^\lambda}$, $X_0 = -X_\lambda \dot{x}^\lambda = \frac{dV}{dt}$ étant des composantes de la „force espace-temporelle". Si l'on se sert de la relation

$$(5) \qquad du = 2(V+b)\, dt,$$

découlant de (1), la forme (2) se confond avec (3), car le potentiel V peut être toujours augmenté de la constante b et par suite la métrique

(3) est identique à celle d'Eisenhart. Cependant d'après Eisenhart le mouvement du système est représenté par une geodésique, tandis que la courbure de la ligne (4) est, en général, différente de zéro. Cette discordance s'explique par le fait qu'entre la variable u, introduite par Eisenhart, et les paramètres x^λ, t subsiste la relation (5) qui n'est pas intégrable. Donc les deux systèmes de $n+1$ paramètres espace-temporels x^λ, t et x^λ, u ne peuvent pas être envisagés simultanément comme holonomes. Lorsque c'est le premier que l'on regarde comme holonome, les géodésiques de l'espace-temps sont définies moyennant les équations

$$\varkappa_\alpha = \frac{d}{d\sigma}\left(g_{\alpha\beta}\frac{dx^\beta}{d\sigma}\right) - \left[{\alpha\beta \atop \gamma}\right]\frac{dx^\beta}{d\sigma}\frac{dx^\gamma}{d\sigma} = 0$$

lesquelles, pour les paramètres x^λ, u, prennent, à cause de non-holonomie du u, une forme plus générale (Horák *2*) de sorte que les équations des géodésiques diffèrent de celles du mouvement. En se servant, pour les composantes du vecteur courbure, des expressions généralisées pour des paramètres non holonomes, les équations du mouvement gardent, bien entendu, encore après l'introduction du paramètre u, leur forme covariante (4).

Le mouvement de systèmes généraux, non conservatifs, a été représenté dans un espace-temps à connexion *affine* par A. Wundheiler (*1*), tandis que l'auteur (Horák *8*) a interprété, dans l'espace-temps riemannien, le mouvement d'un point, supposé soumis à l'action d'une force quelconque, et en même temps signalé l'idée fondamentale de la *mécanique absolue*. Cette dénomination a été introduite par Wundheiler (*2*) pour la mécanique exprimée d'une manière invariante vis-à-vis de transformations cinématiques, laissant invariant le temps t; moi je donne à ce nom une signification plus étendue pour caractériser la mécanique formulée indépendamment du choix de paramètres espace-temporels, résultant des x^λ, t par une transformation absolument quelconque.

Dans le présent mémoire, je me propose d'édifier la mécanique absolue de systèmes matériels et d'en donner une représentation dans l'espace-temps des configurations.

Le premier chapitre est un aperçu de quelques notions du calcul différentiel absolu, indispensables pour l'intelligence de ce qui suit.

Dans le chapitre II, je m'occupe de la représentation du mouvement de systèmes dans l'espace des configurations. Ayant déduit les généralisations des deux axiomes de Newton pour les systèmes scléronomes (théorèmes *II*, *III*), que j'ai données auparavant (Horák *4*), je

icm©

montre comment on peut étendre pour des tels systèmes les équations de Gauss, connues sous le nom des équations naturelles. Cela me conduit au théorème *IV* qui exprime une relation simple entre le vecteur courbure de la trajectoire du système dans l'espace des configurations et la force transversale. Si l'on désigne la courbure due à la force de liaison comme courbure de liaison, on prouve aisément que le mouvement réel d'un système, soumis à l'action de forces quelconques, jouit de propriété que sa courbure de liaison est minimum (théorème *V*). Au cas particulier où il n'y a pas de forces données, il en résulte le principe d'Hertz (théorème *VI*).

Dans le chapitre III, traitant la mécanique absolue, je définis les déplacements virtuels dans l'espace-temps par la seule condition d'être compatibles avec les liaisons et cela encore au cas de systèmes *rhéonomes.* Ces déplacements jouent, dans la dynamique absolue, le rôle des déplacements virtuels classiques à temps constant. J'arrive ainsi à introduire le vecteur espace-temporel *force absolue*, définie moyennant la condition que le travail virtuel au sens classique d'une force soit égal à celui de la force absolue. Alors le principe de d'Alembert s'énonce en disant *„le travail virtuel de la force absolue de liaison est nul"* ce qui conduit aux équations absolues du mouvement, valables pour n'importe quels paramètres espace-temporels et pour systèmes quelconques. Leur forme ne diffère que peu des équations connues lesquelles ont lieu pour les paramètres de configuration (spatiaux).

Le dernier chapitre est consacré à l'interprétation de la mécanique absolue dans l'espace-temps des configurations. Je l'envisage comme une variété riemannienne dans laquelle je définis une telle métrique que l'élément linéaire de la ligne, représentant le mouvement du système, soit égal à l'élément du temps absolu de Newton. J'appelle *Univers du système* l'espace-temps doué de cette métrique et je désigne comme *ligne d'Univers* du système la ligne correspondant à son mouvement. Cela rend possible d'énoncer la loi suivante: *Le vecteur courbure de la ligne d'Univers est proportionnel à la force absolue* qui donne aux équations absolues du mouvement une signification intrinsèque. Quant à leur forme explicite, les équations absolues peuvent s'écrire sous trois formes différentes qui représentent des extensions espace-temporelles des équations de Lagrange, d'Hamilton, d'Appell. De la loi mentionnée plus haut, je déduis le théorème *XIII*, analogue au principe d'Hertz: *La ligne d'Univers d'un système, supposé n'être soumis à aucune force, possède la moindre courbure parmis toutes les lignes d'Univers compatibles avec les liaisons et avec l'état initial donné.* Il s'en suit que, dans ce cas particulier, la ligne d'Univers est une géo-

désique, tandis que, au cas général de forces quelconques, on arrive à une *forme absolue du principe de la moindre contrainte* de Gauss. (La dernière quantité étant remplacée par la courbure de liaison de la ligne d'Univers).

La représentation de la dynamique absolue dans l'Univers riemannien rend aussi possible de résumer les équations du mouvement dans un principe intégral

$$\int (c^2 \delta\, d\sigma + \delta P\, d\sigma) = 0 \tag{6}$$

où σ signifie l'arc de la ligne d'Univers, δP le travail virtuel de la force absolue, c^2 une constante plus grande que la force vive du système. Lorsque la force absolue s'annulle, on aura le principe stationnaire

$$\delta \int d\sigma = 0, \tag{7}$$

définissant les géodésiques dans l'Univers. Il importe de remarquer que les principes (6), (7) sont vrais pour tous les systèmes et indépendants du choix de paramètres espace-temporels. Ils sont donc valables encore pour les systèmes non holonomes et admettent aussi l'application de paramètres non holonomes.. Dans ce cas-là, bien entendu, la variation et la différentiation ordinaires ne peuvent pas être permutées ce qui tient à l'impossibilité de construire un parallélogramme (fermé) infiniment petit dans un espace non holonome. Néanmoins, si l'on remplace ces deux opérations par la variation et la différentiation absolues, correspondant à la connexion riemannienne non holonome, induite dans l'Univers, on peut les regarder comme échangeables et la déduction des équations du mouvement, en partant des principes (6) ou (7), ne diffère pas, en forme, de celle que l'on applique aux systèmes et paramètres holonomes.

En terminant le mémoire, j'ai signalé quelques analogies de ma représentation de la mécanique absolue dans l'Univers avec la dynamique relativiste de Minkowski.

Notations.

Je supprime conséquement les chiffres de sommation et je me sers des cinque espèces d'indices:

$\lambda, \mu, \nu;\ \omega$	prenant	les	valeurs:		$1, 2, \ldots n$
$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$	„	„	„		$0, 1, 2, \ldots n$
$i, j, k, l;\ r$	„	„	„		$1, 2, \ldots m$
a, b, c, d, e	„	„	„		$0, 1, 2, \ldots m$
K	„	„	„		$1, 2, \ldots n-m$

Je désigne par ∂_λ, ∂_α, ∂_t les dérivées $\frac{\partial}{\partial x^\lambda}$, $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$, $\frac{\partial}{\partial t}$; par ∂_k, ∂_a les dérivées $\frac{\partial}{\partial q^k} = B^\lambda_k \frac{\partial}{\partial x^\lambda}$, $\frac{\partial}{\partial q^a} = B^\alpha_a \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$; par $2A_{[\lambda\mu]}$ la différence $A_{\lambda\mu} - A_{\mu\lambda}$ et de même pour les autres indices.

CHAPITRE I.

APERÇU DE QUELQUES NOTIONS DU CALCUL DIFFÉRENTIEL ABSOLU.

1. Géométrie d'une variété plongée dans un espace de Riemann. — Considérons un espace de Riemann [2]) V_n à n paramètres indépendants x^ν ($\nu = 1, 2, \ldots n$) doué d'une métrique régulière

(8) $$d s^2 = g_{\lambda\mu}\, d x^\lambda\, d x^\mu$$

et d'une connexion définie par les différentielles absolues des vecteurs v^ν et w_λ:

(9) $$D v^\nu = \nabla_\mu v^\nu d x^\mu = d x^\nu + \left\{ {\lambda\mu \atop \nu} \right\} v^\lambda d x^\mu,$$
$$D w_\lambda = \nabla_\mu w_\lambda d x^\mu = d w_\lambda - \left\{ {\lambda\mu \atop \nu} \right\} w_\nu d x^\mu,$$

où ∇_μ signifie la dérivée *covariante* (absolue).

Si l'on assujettit les paramètres x^ν à $n-m$ conditions indépendantes

(10) $$\Phi^K(x^1, x^2, \ldots x^n) = 0, \quad K = 1, 2, \ldots n-m,$$

on obtient une variété à m dimensions V_m dont les points peuvent être déterminés par les m paramètres indépendants q^k ($k = 1, 2, \ldots m$).

Posons

(11) $$x^\nu = B^\nu (q^1, q^2, \ldots, q^m),$$

(12) $$\partial_i B^\nu = B^\nu_i,$$

de sorte que

(13) $$d x^\nu = B^\nu_i\, d q^i.$$

[2]) Pour les détails voir Cartan *2*.

Alors l'élément linéaire de la V_m prend la forme

(14) $$d s'^2 = g'_{kl}\, d q^k\, d q^l \qquad (g'_{kl} = B^\lambda_k B^\mu_l g_{\lambda\mu}).$$

Les q^i étant indépendants, on tire de (10) les équations

(15) $$\Phi^K_\lambda B^\lambda_i = 0$$

où on a écrit

(16) $$\Phi^K_\lambda = \partial_\lambda \Phi^K.$$

La métrique dans la V_n supposée régulière, on démontre aisément que celle de la V_m l'est encore (Horák *3*, p. 10). On peut donc définir le tenseur contravariant g'^{il} au moyen de la condition

(17) $$g'_{kl} g'^{il} = B^\lambda_k B^\mu_l g_{\lambda\mu} g'^{il} = B^i_k = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{si } i \neq k \end{cases}.$$

Désignons

(18) $$B^i_\lambda = B^\mu_l g_{\lambda\mu} g'^{il},$$

de sorte que

(19) $$B^\lambda_k B^i_\lambda = B^i_k,$$

et introduisons les quantités

(20) $$B^\nu_\lambda = B^i_\lambda B^\nu_i,$$

vérifiant les relations

(21) $$B^\nu_\lambda B^\lambda_k = B^\nu_k, \quad B^\mu_\lambda B^l_\mu = B^l_\lambda.$$

(22) $$\Phi^K_\mu B^\mu_\lambda = 0.$$

Or, la projection d'un vecteur v^ν sur la V_m, que je vais appeler *composante tangentielle* du vecteur v^ν, est définie par les composantes (Schouten *1* p. 181):

(23) $$v'^\nu = B^\nu_\lambda v^\lambda$$

et, pour un vecteur covariant, on a

(24) $$w'_\lambda = B^\nu_\lambda w_\nu$$

d'où l'on voit que les vecteurs tangents à la V_m remplissent les relations

(25) $$v^\nu = B^\nu_\lambda v^\lambda, \quad w_\lambda = B^\nu_\lambda w_\nu.$$

La composante tangentielle — considérée comme vecteur de la V_m —

peut être exprimée évidemment au moyen des m composantes seulement:

(26) $$v'^{i}=B^{i}_{\nu}\,v'^{\nu}=B^{i}_{\lambda}\,v^{\lambda},\qquad w'_{j}=B^{\lambda}_{j}\,w'_{\lambda}=B^{\nu}_{j}\,w_{\nu}\,.$$

D'après ces formules, on peut aussi calculer les composantes tangentielles des différentielles absolues des vecteurs v^{ν}, w_{λ}, supposés tangents à la V_m:

(27) $$D'\,v^{i}=B^{i}_{\nu}\,D\,v^{\nu},\qquad D'\,w_{j}=B^{\lambda}_{j}\,D\,w_{\lambda}\,,$$

où l'on a posé

(28) $$v^{i}=B^{i}_{\nu}\,v^{\nu},\qquad w_{j}=B^{\lambda}_{j}\,w_{\lambda}\,.$$

En effectuant les calculs, on obtient

(29) $$D'\,v^{i}=d\,v^{i}+\left\{{}^{jk}_{\ i}\right\}'\,v^{j}\,d\,q^{k},\qquad D'\,w_{j}=d\,w_{j}-\left\{{}^{jk}_{\ i}\right\}'\,w_{i}\,d\,q^{k},$$

les $\left\{{}^{jk}_{\ i}\right\}'$ désignant les symboles de Christoffel rattachés à la forme (14). On exprime ce résultat, en disant que la connexion riemannienne, définie dans la V_n, induit dans la V_m de même une connexion riemannienne (Schouten *1* p. 182).

Les différences

(30) $$v''^{\nu}=v^{\nu}-v'^{\nu}$$

constituent un vecteur dont la composante tangentielle est nulle et je vais le désigner comme *composante normale* du vecteur v^{ν}. Si l'on pose

(31) $$C^{\nu}_{\lambda}=A^{\nu}_{\lambda}-B^{\nu}_{\lambda},\qquad A^{\nu}_{\lambda}=\begin{cases}1 & \text{pour } \lambda=\nu\\ 0 & \text{„ } \lambda\neq\nu\end{cases},$$

on a

(32) $$v''^{\nu}=C^{\nu}_{\lambda}\,v^{\lambda}$$

et l'on peut définir la composante normale d'un vecteur covariant w_{λ} comme suit

(33) $$w''_{\lambda}=C^{\nu}_{\lambda}\,w_{\nu}\,.$$

De (22), on tire les relations analogues à (26):

$$\Phi^{K}_{\mu}\,v^{\mu}=(\Phi^{K}_{\mu}\,B^{\mu}_{\lambda}+\Phi^{K}_{\mu}\,C^{\mu}_{\lambda})\,v^{\lambda}=\Phi^{K}_{\mu}\,v''^{\mu}$$

ce qui suggère de déterminer la composante normale du vecteur v^{ν} par les $n-m$ quantités (Cf. Horák *5* no 2):

(34) $$v''^{K}=\Phi^{K}_{\nu}\,v^{\nu}.$$

2. Vecteurs courbures. — Étant donnée une courbe sur laquelle les x^{ν} sont des fonctions dérivables de son arc s, les expressions

$$\frac{d\,x^{\nu}}{d\,s}=i^{\nu}$$

sont les composantes du *vecteur unitaire* tangent à la courbe. Par différentiation absolue, nous aurons le vecteur

(35) $$k^{\nu}=\frac{D\,i^{\nu}}{d\,s}=\frac{D\,d\,x^{\nu}}{d\,s^{2}}=\frac{d^{2}\,x^{\nu}}{d\,s^{2}}+\left\{{}^{\lambda\mu}_{\ \nu}\right\}\frac{d\,x^{\lambda}}{d\,s}\,\frac{d\,x^{\mu}}{d\,s}$$

que l'on appelle *vecteur courbure* de la courbe (Schouten *1* p. 176, 182). Ce vecteur est normal à la tangente, puis qu'on a

$$D\,(i_{\nu}\,i^{\nu})=2\,i_{\nu}\,D\,i^{\nu}=0\,,$$

et il est évidemment situé dans le plan osculateur de la courbe. Donc k^{ν} donne la direction de la normale principale et sa grandeur définit la courbure elle-même.

Cela étant, imaginons une courbe, située toute entière dans la V_m. Le vecteur unitaire tangent à la courbe vérifie les conditions

(36) $$i^{\nu}=B^{\nu}_{\lambda}\,i^{\lambda}$$

et peut être aussi défini par les m composantes

$$i^{l}=\frac{d\,q^{l}}{d\,s}=B^{l}_{\lambda}\,i^{\lambda}.$$

Au contraire, le vecteur courbure n'est pas tangent, en général, à la V_m et il peut s'écrire, en vertu de (30), sous la forme

(38) $$k^{\nu}=k'^{\nu}+k''^{\nu}.$$

La composante tangentielle k'^{ν} peut être appelée *vecteur courbure géodésique* (ou *relative*), car sa grandeur donne la courbure de la courbe considérée comme tracée dans la V_m. Il est bien déterminé aussi par les m composantes

(39) $$k'^{l}=B^{l}_{\lambda}\,k^{\lambda}=B^{l}_{\lambda}\,\frac{D\,i^{\lambda}}{d\,s}$$

lesquelles deviennet, en raison de (27),

(40) $$k'^{l}=\frac{D'\,i^{l}}{d\,s}\,.$$

Pour le vecteur k''^{ν}, on adopte le nom de ***vecteur courbure forcée***, en appelant ***vecteur courbure absolue*** le vecteur k^{ν} qui d'après (38) est la somme des vecteurs courbures géodésique et forcée (S c h o u t e n *1* p. 182). Pour obtenir une expression de k''^{ν} différentions l'équation (36).

$$D\,i^{\nu} = B^{\nu}_{\lambda}\,D\,i^{\lambda} + i^{\lambda} D\,B^{\nu}_{\lambda}$$

ce qui donne par égard de (38) et (39)

$$k''^{\nu} = i^{\lambda}\frac{D\,B^{\nu}_{\lambda}}{d\,s}. \tag{41}$$

3. Variété non holonome [3]). — Remplaçons les équations (10) par un système de P f a f f

$$\Phi^{K}_{\lambda}\,d\,x^{\lambda} = 0, \quad K = 1,\,2,\,\ldots\,n-m, \tag{42}$$

supposé non intégrable et n'admettant pas de combinaisons intégrables. Alors les fonctions Φ^K, remplissant les équations (16), n'existent pas et les valeurs des paramètres x^{λ} sont arbitraires, tandis que leurs différentielles sont soumises aux conditions linéaires homogènes (42). Nous disons que ces équations définissent, dans notre espace de R i e m a n n, une *variété non holonome* V^m_n. Chaque point de l'espace V_n peut être considéré comme élément de la V^m_n, au contraire les déplacements tangents à la V^m_n doivent satisfaire aux conditions (42).

Dans ce cas, on ne peut plus trouver des paramètres indépendants q^i liés à *tous* les paramètres x^{ν} par des relations holonomes. Cependant, en vertu de (42), on peut exprimer les n différentielles $d\,x^{\nu}$ au moyen de celles de m paramètres non holonomes ce qui nous écrivons sous la forme

$$d\,x^{\nu} = B^{\nu}_{i}\,d\,q^{i}, \tag{43}$$

les fonctions B^{ν} qui interviennent dans (11) et (12) n'existant pas.

On s'assure aisément que les résultats obtenus au no **1**, en cas de conditions holonomes, peuvent être étendus encore pour une variété non holonome. Pour cela il faut seulement observer que cette fois

$$\partial_j B^{\nu}_{i} \neq \partial_i B^{\nu}_{j}$$

[3]) Pour les détails voir: S c h o u t e n *2, 3*; V r a n c e a n u *1*, *2*, *3*, *4*; H o r á k *3*, *4*.

ce qui entraîne, pour la connexion induite dans la V^m_n, une expression plus générale que celle (29) [4]):

$$D'\,v^{i} = d\,v^{i} + \Theta^{i}_{jk}\,v^{j}\,d\,q^{k}, \qquad D'\,w_{j} = d\,w_{j} - \Theta^{i}_{jk}\,w_{i}\,d\,q^{k}, \tag{44}$$

où

$$\Theta^{i}_{jk} = \left\{ {jk \atop i} \right\}' + {}^{1}\!/_{2}\,\Pi^{i}_{(kj} + g'_{jr}\,g'^{is}\,\Pi^{r}_{sk} + g'_{rk}\,g'^{is}\,\Pi^{r}_{sj)} \tag{45}$$

$$\Pi^{i}_{kj} = B^{i}_{\lambda}\,(\partial_k B^{\lambda}_{j} - \partial_j B^{\lambda}_{k}) = 2\,B^{i}_{\lambda}\,\partial_{[k}\,B^{\lambda}_{j]}. \tag{46}$$

J'appelle ***variété non holonome de Riemann*** une telle variété V^m_n douée de la connexion définie par les équations (44), (45), (46).

On peut reprendre les raisonnements du no **2** pour une courbe dont tous les éléments sont tangents à la V^m_n et définir les vecteurs courbures géodésique et forcée ce qu'il serait inutile de reproduire de nouveau.

C H A P I T R E II.

MOUVEMENT DE SYSTÈMES SCLÉRONOMES DANS L'ESPACE DES CONFIGURATIONS.

4. Généralisation des lois du mouvement de Newton. — Considérons un système scléronome et holonome à n paramètres indépendants x^{ν} dont la force vive est une forme définie positive de dérivées par rapport au temps $\dot{x}^{\nu}$:

$$2\,T = a_{\lambda\mu}\,\dot{x}^{\lambda}\,\dot{x}^{\mu}. \tag{47}$$

Si l'on envisage l'ensemble des configurations du système comme une variété à n dimensions, en l'appelant *espace des configurations*, on peut faire correspondre à chaque configuration un point représentatif, de sorte que le mouvement du système soit représenté par une courbe que nous appellerons *trajectoire du système*. Le long de la trajectoire, les x^{ν} sont des fonctions du temps t; on peut donc regarder les $\dot{x}^{\nu}$ comme composantes du vecteur *vitesse du système* et les $a_{\lambda\mu}$ comme celles d'un tenseur que j'appellerai *tenseur d'énergie*. En le choisissant comme tenseur fondamental $g_{\lambda\mu}$ qui définit la métrique, les composantes covariantes de la vitesse s'écrivent

$$a_{\lambda\mu}\,\dot{x}^{\mu} = \frac{\partial\,T}{\partial\,\dot{x}^{\lambda}}$$

[4]) H o r á k *3* §§ 6, 7; *4* p. 4.

Elles se confondent donc avec les composantes du vecteur

$$I_\lambda = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^\lambda}$$

que nous appellerons *quantité de mouvement du système*. Si l'on suppose de plus que la variété des configurations soit un *espace de Riemann*, on trouve en vertu de (9) que les composantes covariantes de l'accélération peuvent être mises à la forme

$$\frac{D I_\lambda}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^\lambda}\right) - \frac{\partial T}{\partial x^\lambda}\text{ [5]}$$

de sorte que les équations de Lagrange deviennent

$$(48) \qquad \frac{D I_\lambda}{dt} = X_\lambda\,,$$

(es X_λ désignant les forces généralisées de Lagrange. Nous les regarderons comme composantes du vecteur *force* (*donnée*) appliquée au système.

Supposons maintenant que le système soit assujetti à des liaisons *non holonomes*, de la forme (42), réalisées par une force de liaison aux composantes $\bar{X}_\lambda$. Nous ferons l'hypothèse habituelle que ces liaisons soient *parfaites*, c'est-à-dire que le travail élémentaire de la force de liaison soit nul pour tout déplacement virtuel compatible avec les liaisons:

$$(49) \qquad \Phi^k_\lambda\, \delta x^\lambda = 0\,.$$

Les équations (42) définissent dans l'espace des configurations une variété non holonome de Riemann V^m_n à laquelle tous les déplacements virtuels sont tangents. Je vais la désigner brièvement comme *espace virtuel du système.* Cet espace devient holonome, si les liaisons le sont aussi, dans le cas contraire, il est non holonome. Les liaisons étant parfaites, la composante tangentielle $\bar{X}'_\lambda = 0$, autrement dit:

(I) La force de liaison est normale à l'espace virtuel du système.

Les équations du mouvement pour le système soumis aux liaisons (42) s'obtiennent, en ajoutant dans (48) à la force donnée celle de liaison

$$(50) \qquad \frac{D I_\lambda}{dt} = X_\lambda + \bar{X}_\lambda\,.$$

[5] Cartan *2* p. 42.

D'après ce qui précède, on a

$$\frac{D' I_\lambda}{dt} = X'_\lambda$$

et si l'on introduit les paramètres non holonomes au moyen des équations (43), il s'en suit

$$(51) \qquad \frac{D' p_j}{dt} = Q_j$$

où

$$p_j = B^\lambda_j\, I_\lambda\,, \qquad Q_j = B^\lambda_j\, X_\lambda = X'_j\,.$$

Tenant compte des équations (44), (45), (46) et de la suivante

$$(52) \qquad 2\,T' = g'_{kl}\, \dot{q}^k\, \dot{q}^l,$$

exprimant l'énergie cinétique du système en fonction des x^ν et $\dot{q}^k = \frac{d q^k}{dt}$, les équations (51) se traduisent par le système [6]

$$(53) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T'}{\partial \dot{q}^k}\right) - \partial_k T' + 2\,\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^\lambda}\,\partial_{[k} B^\lambda_{j]}\, \dot{q}^j = Q_k\,.$$

Les équations (48) et (51) expriment une loi générale de la Mécanique, valable pour n'importe quel système scléronome:

(II) Le changement de la quantité de mouvement d'un système est égal à la force donnée.

Cette loi, dans toute sa généralité, a été énoncée pour la première fois par l'auteur (Horák *1* p. 36, 40; *4* p. 7). Si la force donnée est nulle, l'intégrale première des équations (48) resp. (51) s'écrit

$$T = \text{const. resp. } T' = \text{const.}$$

et les équations du mouvement deviennent

$$(54) \qquad \frac{D\, d x^\lambda}{d s^2} = 0\,, \qquad \frac{D'\, d q^k}{d s^2} = 0$$

de sorte qu'on parvient à la *loi d'inertie:*

(III) Un système, supposé n'être soumis à aucune force donnée, se meut dans l'espace virtuel uniformément sur une géodésique. [7]

[6] Horák *1* p. 36; *4* p. 8. Les équations (53), sous une forme légèrement plus spéciale, on été déduites déjà par L. Boltzmann (Wiss. Abh., III, p. 692).

[7] Horák *1* p. 36; *4* p. 8, Vrănceau *1*, Schouten *3* p. 171.

icm©

Du théorème *II*, on peut tirer aussi le changement fini du vecteur quantité de mouvement; il suffit pour cela de multiplier l'équation (48) par dt et de prendre *l'intégrale absolue* (Voir Horák *6*) des deux membres entre deux instants t_0 et t_1:

$$\int_{t_0}^{t_1} D I_\lambda = \int_{t_0}^{t_1} X_\lambda \, dt$$

ce qui donne

$$I_\lambda(t_1) - [I_\lambda(t_0)]_1 = \int_{t_0}^{t_1} X_\lambda \, dt,$$

où $[I_\lambda(t_0)]_1$ désigne le vecteur quantité de mouvement à l'instant t_0, transporté par équipollence le long de la trajectoire du système au point correspondant à l'instant t_1. Le dit vecteur est égal à la quantité de mouvement laquelle le système possèderait à l'instant t_1, si, à partir du moment t_0, le système n'était plus soumis à l'action de forces données.

En somme, on voit que le mouvement du point représentatif dans l'espace riemannien des configurations est régi par les lois tout à fait analogues à celles de Newton, valables pour un seul point matériel se mouvant dans l'espace ordinaire.

5. Équations naturelles. — Il est bien connu que les équations du mouvement d'un point matériel peuvent être mises à la forme due à Euler:

$$m \frac{dv}{dt} = X_t, \quad \frac{m v^2}{\rho} = X_n, \quad 0 = X_b, \tag{55}$$

où m et v désignent la masse et la vittesse du point, ρ le rayon de courbure de sa trajectoire, X_t, X_n, X_b, les composantes de la force dans les directions de la tangente, de la normale principale, de la binormale de la trajectoire. R. Grammel (*1* p. 306) a donné aux équations (55), dites *naturelles*, la forme suivante

$$\frac{dT}{ds} = X_t, \quad \frac{2T}{\rho} = X_n, \quad 0 = X_b \tag{55bis}$$

et je vais montrer, comment elles peuvent être généralisées pour un système.

De (50), on tire

$$D I_\lambda \frac{dx^\lambda}{dt} = X_\lambda \, dx^\lambda + \bar{X} \, dx^\lambda$$

et comme

$$\dot{x}^\lambda D a_{\lambda\mu} \dot{x}^\mu = D \frac{1}{2} a_{\lambda\mu} \dot{x}^\lambda \dot{x}^\mu = dT, \quad \bar{X}_\lambda \, dx^\lambda = 0,$$

il vient

$$dT = X_\lambda \, dx^\lambda. \tag{56}$$

Si l'on désigne par i^ν le vecteur unitaire tangent à la trajectoire, on a évidemment

$$\frac{dT}{ds} = X_\lambda \frac{dx^\lambda}{ds} = X_\lambda i^\lambda = L \tag{57}$$

où L signifie la grandeur de la projection de la force sur la tangente; donc nous désignerons par le nom de *force longitudinale* le vecteur aux composantes $L_\lambda = L i_\lambda$.

D'autre part

$$D I_\lambda = D(v i_\lambda) = v D i_\lambda + i_\lambda dv,$$

où

$$v = \frac{ds}{dt},$$

et d'après (35) et (48)

$$\frac{D I_\lambda}{dt} = v^2 k_\lambda + v \frac{dv}{ds} i_\lambda = X_\lambda.$$

Puisque $2T = v^2$, il vient, en vertu de (57),

$$2 T k_\lambda = X_\lambda - L i_\lambda.$$

Le second membre, étant égal à la différence géométrique de la force totale et de celle longitudinale, donne la composante, normale à la trajectoire, de la force que nous appellerons *force transversale* et désignerons par

$$T_\lambda = X_\lambda - X_\nu i^\nu i_\lambda = (A_\lambda^\nu - i^\nu i_\lambda) X_\nu, \tag{58}$$

de sorte que

$$X_\lambda = L_\lambda + T_\lambda.$$

On a donc les n équations

$$2 T k_\lambda = T_\lambda \tag{59}$$

qui, en vertu des relations évidentes

$$2 T k_\lambda i^\lambda = 0, \quad T_\lambda i^\lambda = 0,$$

sont équivalentes à $n-1$ équations indépendantes. En raison de (59), on établit le théorème:

(*IV*) *Le vecteur courbure de la trajectoire d'un système dans l'espace des configurations multiplié par sa force vive est égal à la force transversale.*

Si l'on représente la force par un vecteur issu du point représentatif, le théorème *IV* montre que la force est située dans le plan osculateur de la trajectoire. Les équations (57) et (59) sont donc complètement analogues aux équations (55bis) et peuvent être désignées comme *équations naturelles* du système.

Pour un système soumis à des liaisons holonomes ou non, le vecteur courbure absolue est donné par

$$2\,T k_\lambda = T_\lambda + \bar{T}_\lambda, \tag{60}$$

où $\bar{T}_\lambda$ désigne la force transversale de liaison. Si nous considérons la trajectoire comme une courb tracée dans l'espace virtuel, les vecteurs courbures géodésique et forcée s'expriment comme il suit:

$$2\,T k_\lambda' = T_\lambda' + \bar{T}_\lambda', \tag{61}$$

$$2\,T k_\lambda'' = T_\lambda'' + \bar{T}_\lambda''.$$

Mais en raison de (58)

$$T_\lambda'' = X_\lambda'', \qquad \bar{T}_\lambda'' = \bar{X}_\lambda''. \tag{62}$$

ce qui donne

$$2\,T k_\lambda'' = X_\lambda'' + \bar{X}_\lambda''. \tag{63}$$

Si de plus les liaisons sont parfaites, il vient

$$\bar{X}_\lambda'' = \bar{X}_\lambda, \qquad \bar{T}_\lambda' = 0$$

et par suite

$$2\,T k_\lambda' = T_\lambda', \quad 2\,T k_\lambda'' = X_\lambda'' + \bar{X}_\lambda. \tag{64}$$

Donc *le vecteur courbure géodésique multiplié par $2\,T$ égale la composante tangentielle de la force transversale donnée. S'il n'y a pas de force donnée, le vecteur courbure forcée est égal, à un facteur constant près, à la force de liaison.* Comme l'existence de liaisons ne perturbe pas les équations (57), ces dernières représentent avec (64) les équations naturelles pour les systèmes non holonomes [8]).

[8]) B e r w a l d et F r a n k (*1*) ont déduit, en partant des équations de L a g r a n g e, les équations (57) et (59) pour les systèmes holonomes.

6. Trajectoire à courbure minimum. — Rejetons, pour le moment, la supposition faite que les liaisons soient parfaites et posons

$$2\,T \bar{k}_\lambda = \bar{T}_\lambda. \tag{65}$$

Le vecteur $\bar{k}_\lambda$ signifie le vecteur courbure que possèderait la trajectoire du système, s'l n'y avait pas de force donnée; il est dû seulement à l'existence des liaisons et je l'appelle donc *vecteur courbure de liaison.* Pour sa composante normale, on tire de (62), (63) l'expression

$$\bar{k}_\lambda'' = k_\lambda'' - \frac{X_\lambda''}{2\,T}.$$

Or, le vecteur k_λ' se calcule d'après la formule (41) et en vertu de (33)

$$X_\lambda'' = C_\lambda^\nu X_\nu,$$

de sorte que le vecteur $\bar{k}_\lambda''$, en un point donné, est complètément déterminé par les conditions de liaison (42), la force donnée et par la direction de la tangente à la trajectoire. Au contraire, pour la composante tangentielle $\bar{k}_\lambda'$, on obtient, en raison de (61) et (65) l'équation

$$\bar{k}_\lambda' = k_\lambda' - \frac{T_\lambda'}{2\,T},$$

contenant le vecteur inconnu k_λ'. Par suite $\bar{k}_\lambda'$ est tout à fait arbitraire, tant qu'on ne fait pas d'hypothèses sur la force de liaison bien entendu.

Considérons alors toutes les trajectoires d'un système soumis à une force donnée, compatibles avec les liaisons, issues du même point et y ayant la même tangente, et cherchons parmi ces trajectoires, en existe-t-il une, telle que sa courbure de liaison soit minimum. La courbure de liaison, c'est-à-dire la grandeur du vecteur $\bar{k}_\lambda$:

$$\bar{k} = \sqrt{\bar{k}_\lambda \bar{k}^\lambda}$$

peut s'écrire d'après (38) sous la forme

$$\bar{k} = \sqrt{\bar{k}'_\lambda \bar{k}'^\lambda + \bar{k}''_\lambda \bar{k}''^\lambda + 2\,\bar{k}'_\lambda \bar{k}''^\lambda}$$

et comme les vecteurs $\bar{k}'_\lambda, \bar{k}''^\lambda$ sont normaux entre eux, on aura

$$\bar{k} = \sqrt{(\bar{k}')^2 + (\bar{k}'')^2}.$$

icm©

D'après ce qui précède, la quantité $\overline{k}''$ a pour toutes les trajectoires envisagées la même valeur réelle. Donc $\overline{k}$ devient une fonction d'une seule variable indépendante $\overline{k}'$ et la condition pour le minimum s'écrit

$$\overline{k}' = 0 \quad \text{ou bien } g^{\lambda\mu}\,\overline{k}'_{\lambda}\,\overline{k}'_{\mu} = 0 .$$

La métrique dans l'espace des configurations étant regulière (T est une forme définie positive), cette condition entraîne comme conséquence les n équations

$$\overline{k}'_{\lambda} = 0, \quad \lambda = 1, 2, \ldots n, \tag{66}$$

ou en vertu de (65)

$$\overline{T}'_{\lambda} = 0 .$$

Cela veut dire que la force transversale de liaison est normale à l'espace virtuel ce qui est évidemment rempli au cas de liaisons parfaites, satisfaisant au principe de d'Alembert. Naturellement nos conditions (67) ne disent rien sur la force longitudinale de liaison laquelle n'influe pas la forme de la trajectoire.

Comme la connaissance des conditions initiales du mouvement entraîne celle de la tangente à la trajectoire, on a le théorème:

(V) La trajectoire réelle d'un système soumis à l'action de forces possède la moindre courbure de liaison parmi toutes les trajectoires compatibles avec les liaisons et les conditions initiales données.

En l'absence de forces données, la courbure absolue est égale à celle de liaison, d'où le théorème:

(VI) La trajectoire réelle d'un système, supposé n'être soumis à aucune force donnée, est caractérisée, parmi toutes les trajectoires compatibles avec les liaisons et les conditions initiales, par la propriété que sa courbure est minimum.

Ceci traduit le théorème bien connu de H. Hertz, tandis que le théorème plus général V présente une étroite analogie avec le principe de la moindre contrainte de Gauss. Cependant nos théorèmes sont purement géométriques et ne déterminent donc pas la grandeur de la vitesse (la force vive) du système laquelle est donnée par l'équation scalaire (57). En revanche, ils admettent des forces de liaisons plus générales que celles satisfaisant au principe de d'Alembert, car ils n'excluent pas l'existence d'une force de liaison longitudinale. Par exemple, les théorèmes V, VI sont satisfaits encore pour un point se mouvant sur une surface rugueuse, tandis que le principe de Gauss n'est vrai que si la surface est parfaitement polie.

CHAPITRE III.

MÉCANIQUE ABSOLUE.

7. Notion de mécanique absolue. Dans la dynamique de systèmes, on peut distinguer les groupes suivants de transformations de paramètres:

1⁰ Transformations *holonomes* du type

$$x^{\omega} = x^{\omega}(x^{\lambda}) .$$

2⁰ Transformations *non holonomes* du types d'équations différentielles, supposées non intégrables:

$$d\,q^{r} = P^{r}_{i}\,d\,q^{i} . \tag{68}$$

Ces deux groupes, ne contenant pas le temps, peuvent être désignés comme *spatiaux* ou *scléronomes*, tandis que j'appellerai *cinématiques* ou *rhéonomes* les transformations (holonomes ou non) lesquelles contiennent le temps t, mais étant du type particulier

$$x^{\omega} = x^{\omega}(x^{\lambda}, t); \qquad d\,q^{r} = P^{r}_{i}\,d\,q^{i} + P^{r}_{t}\,d\,t \tag{69}$$

qui laisse le temps invariant. On voit que par une transformation rhéonome (69) l'énergie cinétique devient une fonction non homogène de dérivées $\dot{x}^{\omega}$ ou $\dot{q}^{r}$. J'appelle *rhéonomes* les paramètres x^{ω} et q^{r} pour les distinguer des x^{λ} et q^{k} que je désigne comme *scléronomes* et qui peuvent être caractérisés par l'homogénéité de la force vive.

D'une manière plus générale, on peut introduire les $n+1$ paramètres *espace-temporels* (holonomes ou non) x^{α}, en posant

$$d\,x^{\lambda} = A^{\lambda}_{\alpha}\,d\,x^{\alpha}, \quad d\,t = A^{t}_{\alpha}\,d\,x^{\alpha}, \tag{70}$$

les A^{λ}_{α}, A^{t}_{α} étant des fonctions des x^{λ}, t. Les passages d'un système de paramètres espace-temporels à l'autre forment un groupe que j'appelle *groupe de transformations espace-temporelles.* Par analogie, on arrive aux $m+1$ paramètres espace-temporels q^{a}, en général non holonomes, en partant des paramètres q^{k} et posant

$$d\,q^{k} = B^{k}_{a}d\,q^{a}, \qquad d\,t = B^{t}_{a}d\,q^{a} . \tag{71}$$

Je vais donc définir la mécanique absolue mécanique formulée d'une manière invariante vis-à-vis du groupe de transformations espace-temporelles

icm©

et non holonomes. Cette définition — la plus générale que l'on puisse imaginer — contient comme cas particulier celle de Wundheiler qui ne considère que les transformations cinématiques (rhéonomes).

Quant aux équations du mouvement, j'ai donnée déjà leur forme espace-temporelle (Horák *11*), mais il s'agit aussi de définir les notions fondamentales de la mécanique d'une manière invariante et d'exprimer les principes dynamiques sous une forme absolue. C'est ce que je me propose de faire dans la suite.

8. **Déplacement virtuel dans l'espace-temps.** Dans le chapitre précédent, je n'ai considéré que les systèmes scléronomes dont les liaisons ne contiennent pas le temps explicitement et dont l'energie cinétique est une fonction quadratique homogène de dérivées des paramètres. Dans le présent chapitre, je vais m'occuper aussi des systèmes rhéonomes, soumis à des liaisons contenant le temps explicitement. Il y a une différence essentielle entre ces deux catégories de systèmes. Les déplacements virtuels de systèmes scléronomes remplissent les liaisons préscrites au mouvement réel, de sorte que chaque déplacement réel, correspondant à n'importe quelles conditions initiales, peut être considéré comme déplacement virtuel. Il n'en est plus ainsi pour un système rhéonome. Car les déplacements virtuels, dont il est question dans le principe de d'Alembert, supposent que le temps reste constant et par suite ils ne sont pas, en général, compatibles avec les liaisons. Ce fait tient à la définition classique des déplacements virtuels et pour le faire disparaître, il faudra la modifier, comme je vais le montrer dans la suite.

Représentons une configuration aux paramètres x^ν, prise par le système à l'instant t, par un point de coordonnées x^ν, t dans une variété à $n+1$ dimensions U_{n+1} que j'appelle *espace-temps des configurations.* Admettons de plus que notre système soit assujetti aux liaisons rhéonomes:

(72) $$\Phi^K(x^\lambda, t) = 0 \qquad K = 1, 2, \ldots n - m$$

et désignons, par égard à (16),

(73) $$\partial_t \Phi^K = \Phi^K_t,$$

de la manière que les déplacements réels obéissent aux conditions

(74) $$\Phi^K_\lambda \, d x^\lambda + \Phi^K_t \, d t = 0\,.$$

Or, nous définissons comme déplacement virtuel dans l'espace-temps le vecteur infiniment petit de composantes ∂x^ν, ∂t, vérifiant les conditions

(75) $$\Phi^K_\lambda \, \partial x^\lambda + \Phi^K_t \, \partial t = 0\,.$$

Alors les déplacements virtuels sont assujettis aux mêmes conditions comme les déplacements réels. L'ensemble de déplacements virtuels définit, en chaque point de l'espace-temps U_{n+1}, une $(m+1)$ — direction tangente à la variété U_{m+1}, définie dans U_{n+1} moyennant les relations (72), que je vais donc désigner par le nom *d'espace-temps virtuel* du système. Cela étant, *les déplacements virtuels sont soumis à la seule condition d'être tangents à l'espace-temps virtuel* qui contient tous les mouvements du système admis par les liaisons.

Si les liaisons (72) sont scléronomes, c'est-à-dire si tous les $\Phi^K_t = 0$, la variation ∂t est arbitraire. Dans ce cas particulier, elle peut donc être choisie égale à zéro ce qui correspond à la définition classique des déplacements virtuels.

On voit que les raisonnements que nous venons de faire s'appliquent également aux liaisons non holonomes. Ces liaisons peuvent s'écrire encore sous la forme (74), mais il faut se rendre compte que les fonctions Φ^K, vérifiant (16) et (73), n'existent plus et que par suite l'espace-temps virtuel, dans ce cas-là, est une variété non holonome.

9. **Principe de d'Alembert.** — Il nous faut tout d'abord exprimer sous une forme absolue le travail virtuel qui est une notion de l'importance fondamentale pour toute la dynamique. Par comparaison des équations (74) et (75), on obtient

$$\Phi^K_\lambda (\partial x^\lambda - \dot{x}^\lambda \partial t) = 0\,.$$

Si l'on introduit donc l'opérateur

$$\bar{\partial} = \partial - \partial t \frac{d}{dt}\,,$$

les variations

(76) $$\bar{\partial} x^\lambda = \partial x^\lambda - \dot{x} \partial t\,, \qquad \bar{\partial} t = \partial t - \partial t = 0$$

remplissent les conditions classiques

(77) $$\Phi^K_\lambda \bar{\partial} x^\lambda = 0\,, \qquad \bar{\partial} t = 0.$$

On voit qu'à chaque déplacement virtuel ∂x^λ, ∂t dans l'espace-temps correspond un déplacement virtuel classique $\bar{\partial} x^\lambda$, $\bar{\partial} t = 0$. Alors pour obtenir la forme espace-temporelle du travail virtuel, nous allons définir la composante temporelle X_t d'une force X_λ par l'exigeance que le travail élémentaire

$$\partial P = X_\lambda \partial x^\lambda + X_t \partial t$$

soit égal au travail virtuel classique

$$\overline{\delta} P = X_\lambda \overline{\delta} x^\lambda = X_\lambda (\delta x^\lambda - \dot{x}^\lambda \delta t)$$

ce qui entraîne

$$(X_t + X_\lambda \dot{x}^\lambda) \delta t = 0$$

et comme δt n'est pas nul, en général, on a

$$X_t = - X_\lambda \dot{x}^\lambda. \tag{78}$$

Le vecteur espace-temporel de composantes X_λ, X_t remplacera dans la méqanique absolue la force donnée de la mécanique ordinnaire et je vais l'appeler *force absolue.* Ce vecteur présente une étroite analogie avec la quadri-force de Minkowski; en outre, il existe une relation simple entre la force longitudinale L définie par (57) et la composante X_t, c'est-à-dire

$$X_t = - L \dot{s}.$$

De (78), on tire

$$X_\lambda d x^\lambda + X_t d t = 0$$

ce qui veut dire:

(*VII*) *Le travail réel de la force absolue est nul.*

Le travail virtuel étant défini, nous pouvons aborder le principe de d'Alembert, s'exprimant par la relation

$$\overline{X}_\lambda \overline{\delta} x^\lambda = 0$$

avec les conditions supplémentaires (77). Il s'en suit, comme on sait,

$$\overline{X}_\lambda = \Lambda_K \Phi^K_\lambda$$

ce qui donne, en raison de (74) et (78)

$$\overline{X}_t = - \overline{X}_\lambda \dot{x}^\lambda = - \Lambda_K \Phi^K_\lambda \dot{x}^\lambda = \Lambda_K \Phi^K_t$$

de sorte que

$$\overline{X}_\lambda \delta x^\lambda + \overline{X}_t \delta t = 0 \tag{79}$$

pour tous les δx^λ, δt qui vérifient les relations (75). L'équation (79) exprime donc le principe de d'Alembert sous sa forme *absolue*, s'énonçant comme suit:

(*VIII*) *Le travail élémentaire de la force absolue de liaison est nul pour tout déplacement virtuel dans l'espace-temps des configurations* ou bien *la force absolue de liaison est normale à l'espace-temps virtuel.*

10. Paramètres espace-temporels. — Nous n'avons défini les déplacements virtuels et la force absolue que pour un système de coordonnées spéciales c'est-à-dire pour les paramètres x^λ, t. Comme les notions de la mécanique absolue ont une signification indépendante du choix du système de paramètres, il faut généraliser les résultats obtenus pour les paramètres généraux x^α, définis moyennant la transformation espace-temporelle (70). En appliquant ces paramètres, les liaisons (74) s'expriment évidemment sous la forme

$$\Phi^K_\alpha d x^\alpha = 0 \qquad (\Phi^K_\alpha = \Phi^K_\lambda A^\lambda_\alpha + \Phi^K_t A^t_\alpha) \tag{80}$$

et les déplacements virtuels satisfont aux conditions

$$\Phi^K_\alpha \delta x^\alpha = 0. \tag{81}$$

La force absolue est définie par les composantes générales:

$$X_\alpha = X_\lambda A^\lambda_\alpha + X_t A^t_\alpha = X_\lambda (A^\lambda_\alpha - \dot{x}^\lambda A^t_\alpha)$$

ce qui entraîne pour les composantes de la force absolue de liaison les expressions

$$\overline{X}_\alpha = \Lambda_K \Phi^K_\alpha \tag{82}$$

de sorte que

$$\overline{X}_\alpha \delta x^\alpha = 0 \tag{83}$$

pour tous les δx^α vérifiant (81). La dernière équation traduit le principe de d'Alembert, tandis que la suivante

$$X_\alpha d x^\alpha = 0 \tag{84}$$

a lieu pour n'importe quelle force.

En somme, par l'introduction de paramètres espace-temporels généraux, on a réussi à donner aux équations ci-dessus une forme parfaitement symétrique. Les paramètres espace-temporels jouent, dans le cas de systèmes rhéonomes, le même rôle comme les paramètres spatiaux en cas de systèmes scléronomes. Alors les équations (80) définissent, dans l'espace-temps des configurations, un espace-temps virtuel, en général non holonome, et l'on y peut appliquer tous les raisonnements valables pour les variétés riemanniennes non holonomes. On peut donc aussi introduire les paramètres espace-temporels indépendants q^a (en général non holonomes), en posant

(85) $$d x^\alpha = B^\alpha_a \, d q^a ,$$

les coefficients B^α_a vérifiant les conditions

(86) $$\Phi^K_\alpha B^\alpha_a = 0 .$$

La composante tangentielle de la force absolue s'écrit

(87) $$Q'_a = B^\alpha_a \, X_\alpha$$

et celle de la force de liaison s'annulle en vertu de (86):

(88) $$\overline{Q}'_a = B^\alpha_a \overline{X}_\alpha = 0 .$$

Remarque. Si l'on applique aux coordonnées x^λ, t au lieu de la transformation générale (70), la transformation particulière (cinématique) (69), on arrive aux paramètres rhéonomes, le temps t jouant toujours un rôle privilégié. Ces paramètres s'obtiennent de ceux généraux x^α, q^a, en prenant

$$A_0{}^t = 1, \; A^t_\lambda = 0 \quad \text{ou} \quad B^t{}_0 = 1, \; B^t_k = 0 ,$$

de la manière que

$$x^0 = t , \quad q^0 = t .$$

11. Équations du mouvement. Je vais montrer, comment la méthode absolue que je viens d'expliquer, se prête pour déduire les équations du mouvement les plus générales. Considérons un système de points matériels, $\frac{n}{3}$ en nombre, et désignons par x^λ leurs coordonnées cartésiennes et par $p_\lambda = (m \dot{x})_\lambda$ leurs quantités de mouvement. On aura

(89) $$T = \frac{1}{2} p_\lambda \dot{x}^\lambda , \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^\lambda} = p_\lambda , \quad \frac{d T}{d t} = \dot{p}_\lambda \dot{x}^\lambda ,$$

(90) $$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^\lambda} B^\lambda_a = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^\lambda} \frac{\partial \dot{x}^\lambda}{\partial \dot{q}^a} = \frac{\partial T'}{\partial \dot{q}^a} .$$

Le principe de d'Alembert s'écrit

$$(X_\lambda - \dot{p}_\lambda) \, \overline{\delta} x^\lambda = 0 .$$

ou en raison de (76)

$$(X_\lambda - \dot{p}_\lambda) \, \delta x^\lambda + (- X_\lambda \dot{x}^\lambda + \dot{p}_\lambda \dot{x}^\lambda) \, \delta t = 0 .$$

En tenant compte de (78) et (89), on arrive à la forme absolue du principe de d'Alembert

(91) $$(X_\lambda - \dot{p}_\lambda) \, \delta x^\lambda + \left(X_t + \frac{d T}{d t} \right) \delta t = 0,$$

les δx^λ, δt vérifiant les conditions de liaisons (75), rhéonomes et non holonomes. Introduisons les paramètres espace-temporels en général non holonomes

(92) $$d x^\lambda = B^\lambda_a \, d q^a , \quad d t = B^t_a \, d q^a$$

et choisissons les coefficients $B(x^\lambda, t)$ de la manière, que les $d q^a$ soient indépendants ce qui donne

$$\Phi^K_\lambda B^\lambda_a + \Phi^K_t B^t_a = 0 .$$

En raison de (75), on peut écrire

$$\delta x^\lambda = B^\lambda_a \, \delta q^a , \quad \delta t = B^t_a \, \delta q^a$$

et l'équation (91) devient

$$\left[(X_\lambda - \dot{p}_\lambda) B^\lambda_a + \left(X_t + \frac{d T}{d t} \right) B^t_a \right] \delta q^a = 0 .$$

Comme les δq^a sont indépendants, nous arrivons aux $m + 1$ équations:

$$\dot{p}_\lambda B^\lambda_a - \frac{d T}{d t} B^t_a = X_\lambda B^\lambda_a + X_t B^t_a .$$

Le second membre n'est que la composante tangentielle de la force absolue Q'_a, définie moyennant (87), et de plus

$$\dot{p}_\lambda B^\lambda_a = \frac{d}{d t} (p_\lambda B^\lambda_a) - p_\lambda \partial_b B^\lambda_a \dot{q}^b$$

$$= \frac{d}{d t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^\lambda} B^\lambda_a \right) - \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^\lambda} \partial_a B^\lambda_b \dot{q}^b + \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^\lambda} (\partial_a B^\lambda_b \dot{q}^b - \partial_b B^\lambda_a \dot{q}^b) .$$

Tenant compte de (92), on peut poser

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^\lambda}\, \partial_a B^\lambda_b\, \dot{q}^b = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^\lambda}\, \partial_a \dot{x}^\lambda = \partial_a T'$$

où T' signifie l'énergie du système exprimée en fonction des x^λ, t, $\dot{q}^a$. En somme, on arrive en vertu de (90) aux équations

(93) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T'}{\partial \dot{q}^a}\right) - \partial_a T' - \frac{dT}{dt}\, B^t_a + 2\,\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^\lambda}\, \partial_{[a} B^\lambda_{b]} \dot{q}^b = Q'_a .$$

La dérivée ∂_a est définie au moyen de l'équation

$$\partial_a = B^\alpha_a \partial_\alpha = B^\lambda_a \partial_\lambda + B^t_a \partial_t ,$$

mais nous pouvons simplifier les équations (93) en introduisant, pour les paramètres espace-temporels, le symbole

$$\partial'_a = \partial_a + B^t_a \frac{d}{dt} = B^\lambda_a \partial_\lambda + B^t_a \left(\partial_t + \frac{d}{dt}\right).$$

Alors

$$\partial'_a T' = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^\lambda}\, \partial_a \dot{x}^\lambda + \frac{dT}{dt}\, \partial_a t$$

et les équations du mouvement prennent la forme

(93 bis) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T'}{\partial \dot{q}^a}\right) - \partial'_a T' + 2\,\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^\lambda}\, \partial_{[a} B^\lambda_{b]}\, \dot{q}^b = Q'_a$$

analogue à celle des équations de Lagrange-Euler, valables pour les paramètres scléronomes.

Si l'on choisit, d'une manière particulière, $q^0 = t$, les paramètres deviennent *rhéonomes* (Voir la remarque, à la fin du no 10) et les équations (93) s'écrivent:

(94) $$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T'}{\partial \dot{q}^l}\right) - \partial_l T' + 2\,\dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}^\lambda}\, \partial_{[l} B^\lambda_{k]}\, \dot{q}^k + 2\,\dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}^\lambda}\, \partial_{[l} B^\lambda_{t]} = Q'_l , \\ \dfrac{d}{dt}(b_{k0}\, \dot{q}^k + b_{00}) - \partial_t T' + 2\,\dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}^\lambda}\, \partial_{[t} B^\lambda_{k]}\, \dot{q}^k = \dfrac{dT}{dt} + Q'_0 \end{cases}$$

où l'on a posé

$$2\,T' = b_{kl}\, \dot{q}^k \dot{q}^l + 2\, b_{k0}\, \dot{q}^k + b_{00} .$$

Les équations (94) — avec une notation légèrement différente — figurent déjà dans mes travaux antérieurs (Horák *4*, *11*), tandis que les équations générales (93) sont équivalentes aux équations (31) du dernier travail lesquelles je n'y ai indiquées que sous leur forme implicite, traduisant la loi généralisée de Newton: *Le changement de la quantité de mouvement est égal à la force espace-temporelle.*

Il reste à remarquer que, dans le cas de systèmes scléronomes,

$$\frac{dT}{dt} = X_\lambda \dot{x}^\lambda$$

et les équations (93) deviennent, en vertu de (87),

(95) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T'}{\partial \dot{q}^a}\right) - \partial_a T' + 2\,\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^\lambda}\, \partial_{[a} B^\lambda_{b]} \dot{q}^b = Q_a$$

où l'on a écrit

$$Q_a = X_\lambda B^\lambda_a .$$

Donc les équations espace-temporelles — pour les systèmes scléronomes — ne diffèrent point en forme de celles valables pour les paramètres scléronomes. En cas de systèmes holonomes, en peut introduire les paramètres espace-temporels holonomes x^α et les équations (95) prennent la forme due à Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^\alpha}\right) - \partial_\alpha T = X_\alpha .$$

Si enfin le système est conservatif, on aura

$$X_\alpha = -A^\lambda_\alpha\, \partial_\lambda V = -\partial_\alpha V ,$$

V étant le potentiel. En désignant par L la différence $T - V$, il vient

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}\right) - \partial_\alpha L = 0 .$$

Donc ces équations bien connues restent valables encore pour les paramètres espace-temporels ce qui a été signalé déjà par Hostinský (*1*).

Remarque. Nous avons déduit les équations (93) en choisissant pour les x^λ les coordonnées rectangulaires des points du système. On s'assure aisément que les équations (93) restent valables encore, si les x^λ signifient les paramètres scléronomes généraux, holonomes bien entendu.

icm©

CHAPITRE IV.

LIGNE D'UNIVERS D'UN SYSTÈME MATÉRIEL.

12. Géométrie de l'Univers. Dans le chapitre précédent, nous avons jeté les bases de la mécanique absolue et de même donné les équations absolues du mouvement de systèmes matériels généraux, valables pour des paramètres espace-temporels quelconques. Les seconds membres de ces équations sont des composantes covariantes d'un vecteur espace-temporel que nous avons appelé force absolue. Il est donc évident que les dites équations sont covariantes vis-à-vis de transformations espace-temporelles (en général non holonomes) et indépendantes du choix de paramètres. D'autre part, les premiers membres de nos équations sont assez complexes et nous n'y avons donné jusqu'ici aucune signification intrinsèque. Pour l'obtenir, nous allons définir dans l'espace-temps des configurations une métrique riemannienne

$$d\sigma^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta$$

de telle manière que l'élément linéaire $d\sigma$ soit égal à celui du temps absolu t. A ce but, choisissons les paramètres scléronomes: x^λ, $x^0 = t$ et supposons $d\sigma^2$ sous une forme analogue de l'élément linéaire de l'espace des configurations

$$c^2\, d\sigma^2 = a_{\lambda\mu}\, dx^\lambda\, dx^\mu + \varphi(t)\, dt^2,$$

c étant une constante réelle. En y portant dt au lieu de $d\sigma$, on aura

$$c^2 = a_{\lambda\mu}\, \dot{x}^\lambda\, \dot{x}^\mu + \varphi(t)$$

d'où

$$\varphi(t) = c^2 - 2T = c^2 - v^2,$$

v étant la vitesse du système dans l'espace des configurations. Donc

$$d\sigma^2 = \frac{1}{c^2}\, a_{\lambda\mu}\, dx^\lambda\, dx^\mu + (1 - 2\tau)\, dt^2 \tag{96}$$

où $\tau(t)$ signifie l'énergie cinétique exprimée en fonction de la seule variable t, divisée par c^2

$$\tau(t) = \frac{T}{c^2}. \tag{97}$$

La fonction τ n'est donc pas connue *a priori*, de sorte que le tenseur

fondamental de l'espace-temps

$$g_{\alpha\beta} = \frac{1}{c^2}\, a_{\lambda\mu}\, A^\lambda_\alpha\, A^\mu_\beta + (1 - 2\tau)\, A^t_\alpha\, A^t_\beta \tag{98}$$

contient la fonction τ, inconnue à l'avance, laquelle ne peut être déterminée que si l'on connaît le mouvement du système. Je vais appeler *Univers du système* l'espace temps U_{n+1} doué de la métrique (96) qui est évidemment régulière, tant que l'on choisit

$$c^2 > 2T, \text{ c'est-à-dire } c > v \tag{99}$$

ce qui est toujours possible et ce que nous allons supposer dans la suite. Le mouvement du système s'interprète par une courbe que j'appelle *ligne d'Univers* du système. D'après ce qui précède, l'élément linéaire de la ligne d'Univers est égal à celui du *temps absolu* qui est alors défini d'une manière invariante, indépendamment du choix de paramètres espace-temporels.

L'Univers du système est une variété riemannienne dont la géométrie dépend du mouvement du système. L'Univers se déforme sous l'influence du système. Les choses se passent pareillement dans la théorie de la gravitation d'Einstein où la métrique de l'Univers est définie au moyen des „équations de champ" qui contiennent le quadri-vecteur vitesse, déterminé par les équations du mouvement dont la formation suppose la connaissance du tenseur fondamental. Par conséquent, la métrique de l'Univers einsteinien dépend du mouvement réel du point, inconnu *a priori*.

En introduisant la métrique (96), nous avons réussi à *interpréter l'élément du temps absolu d'une manière invariante comme l'élément linéaire de la ligne d'Univers.* Or, nous allons choisir $\sigma = t$ et remplacer t par l'arc σ partout où t joue le rôle de la variable indépendante, tandis que nous garderons pour le paramètre temporel les notations antécédentes: t ou x^0, q^0.

Par analogie de l'énergie cinétique, nous définissons *l'énergie (cinétique) absolue du système la forme:*

$$E\left(x^\gamma, \frac{dx^\gamma}{d\sigma}\right) = \frac{c^2}{2}\, g_{\alpha\beta}\, \frac{dx^\alpha}{d\sigma}\, \frac{dx^\beta}{d\sigma}. \tag{100}$$

Si l'on appelle de plus *vitesse absolue* du système le vecteur de grandeur constante

$$c^\alpha = c\, \frac{dx^\alpha}{d\sigma} = c\, i^\alpha, \tag{101}$$

icm©

il vient

$$E = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \cdot c^\alpha c^\beta = \frac{c^2}{2}, \tag{102}$$

c'est-à-dire *l'énergie absolue est égale au demi-carré de la vitesse absolue du système et donc constante.* D'après (99), la vitesse absolue est toujours plus grande que la vitesse réelle du système et il en est de même avec l'énergie absolue.

13. Équations naturelles de la ligne d'Univers. Pour déduire les équations de la ligne d'Univers, commençons par considérer un système holonome et scléronome à $n+1$ paramètres espace-temporels $x^\lambda, x^0 = t$. Les équations du mouvement du système s'obtiennent des équations (93) en posant

$$B^\lambda_a = \begin{cases} 1 \text{ si } a = \lambda \\ 0 \text{ si } a \neq \lambda \end{cases}, \quad B^t_a = \begin{cases} 1 \text{ si } a = 0 \\ 0 \text{ si } a \neq 0 \end{cases}$$

ce qui donne

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^\lambda}\right) - \partial_\lambda T = X_\lambda, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^0}\right) - \partial_0 T - \frac{dT}{dt} = X_0$$

ou encore

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\partial T}{\partial i^\lambda}\right) - \partial_\lambda T = X_\lambda, - \frac{dT}{dt} = X_0. \tag{103}$$

Par spécialisation de la formule (98), on tire de (100)

$$E = T + c^2 \left[\frac{1}{2} - \tau(x^0)\right] (\dot{x}^0)^2. \tag{104}$$

Alors

$$\frac{dE}{\partial i^\lambda} = \frac{\partial T}{\partial i^\lambda}, \quad \partial_\lambda E = \partial_\lambda T,$$

$$\frac{\partial E}{\partial i^0} = c^2 (1 - 2\tau), \quad \frac{\partial E}{\partial x^0} = -c^2 \frac{d\tau}{dx^0} = -\frac{dT}{dt},$$

de sorte que les équations (103) deviennent

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\partial E}{\partial i^\lambda}\right) - \partial_\lambda E = X_\lambda, \quad \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\partial E}{\partial i^0}\right) - \partial_0 E = X_0. \tag{105}$$

Or, nous savons que les équations de Lagrange sont équivalentes aux équations covariantes (48); il est donc visible que les dernières équations s'écrivent sous la forme

$$\frac{D}{d\sigma}\left(\frac{\partial E}{\partial i^\lambda}\right) = X_\lambda, \quad \frac{D}{d\sigma}\left(\frac{\partial E}{\partial i^0}\right) = X_0 \tag{106}$$

où l'opérateur D signifie la différentielle absolue correspondant à la connexion riemannienne définie dans l'Univers et le vecteur

$$\frac{\partial E}{\partial i^\lambda} = c\, c_\lambda, \quad \frac{\partial E}{\partial i^0} = c\, c_0 \tag{107}$$

joue le rôle de la *quantité absolue de mouvement.* D'après (107), les équations (106) sont indépendantes du choix particulier de paramètres que nous avons fait et par suite on aura pour n'importe quels paramètres espace-temporels

$$c^2 \frac{D\, i_\alpha}{d\sigma} = X_\alpha$$

où l'on a remplacé, en vertu de (101), la vitesse absolue par le vecteur unitaire i_α tangent à la ligne d'Univers. Or, si l'on désigne par $\varkappa_\alpha$ le vecteur courbure de la ligne d'Univers, on aboutit, en raison de la définition (35), aux équations

$$c^2 \varkappa_\alpha = X_\alpha. \tag{108}$$

Ces équations expriment la loi invariante:

(*IX*) *Le vecteur courbure de la ligne d'Univers, multiplié par le carré de la vitesse absolue* (*constante*) *est égal à la force absolue.*

Nous les appellerons *équations naturelles,* car elles expriment la courbure de la ligne d'Univers au moyen de la force donnée. Le vecteur courbure étant parallèle à la normale principale (voir no 2), les équations (108) montrent que la force absolue est normale à la ligne d'Univers (théorème *VII*).

Nous avons supposé que les paramètres x^λ, t soient indépendants et donc les x^α le sont aussi. Lorsqu'on assujettit le système aux liaisons non holonomes et rhéonomes (80), réalisées à l'aide de la force de liaison (82), les équations naturelles prennent la forme

$$c^2 \varkappa_\alpha = X_\alpha + \Lambda_K \Phi^K_\alpha \tag{109}$$

Pour en éliminer la force de liaison, calculons la projection du vecteur courbure sur *l'Univers virtuel* U_{n+1}^{m+1}. J'entends sous ce nom l'espace-temps virtuel doué de la métrique riemannienne, induite dans U_{n+1}^{m+1} par celle que nous avons définie dans l'Univers du système moyennant (96) ou (98). La projection du vecteur courbure sur U_{n+1}^{m+1} est égale à sa composante tangentielle $\varkappa'_\alpha$ que nous pouvons exprimer, d'après (26), au moyen de $m+1$ composantes $\varkappa'_a$ relatives aux paramètres q^a définis par (85); cela donne l'équation analogue à (39)

$$\varkappa'_a = B^\alpha_a \varkappa_\alpha \,. \tag{110}$$

Donc en raison de (109)

$$c^2 \varkappa'_a = B^\alpha_a X_\alpha + \Lambda_K \Phi^K_\alpha B^\alpha_a$$

et d'après (86) et (87)

$$c^2 \varkappa'_a = Q'_a \,. \tag{111}$$

Ce sont les équations naturelles de la ligne d'Univers d'un système général — non holonome et rhéonome — valables pour des paramètres espace-temporels indépendants non holonomes. La ligne d'Univers est toute entière située dans l'Univers virtuel U_{n+1}^{m+1} et peut donc être considérée comme courbe tracée dans cette variété non holonome. A ce point de vue, le vecteur (110) représente le vecteur courbure géodésique (voir no 2) et les équations (111) se traduisent par le théorème:

(X) *Le vecteur courbure géodésique de la ligne d'Univers est proportionnel à la projection de la force absolue sur l'Univers virtuel.*

Ce théorème ou bien les équations (111) donnent une signification intrinsèque aux équations absolues du mouvement (93) et donc, en partant de (111), on revient nécessairement aux équations (93). De (40), on tire pour la courbure géodésique

$$\varkappa'_a = \frac{D'}{d\sigma}\left(g'_{ab}\frac{dq^b}{d\sigma}\right) \tag{112}$$

où d'après (98)

$$g'_{ab} = g_{\alpha\beta} B^\alpha_a B^\beta_b = \frac{1}{c^2} a_{\lambda\mu} B^\lambda_b B^\mu_b + [1 - 2\tau(t)] B^t_a B^t_b \,.$$

En se servant des formules (44), (97) et si l'on songe que

$$\partial_a \tau = \frac{d\tau}{dt} B^t_a \tag{113}$$

on déduit, en effet, de (111) les équations (93).

14. Autres formes des équations de la ligne d'Univers. Je vais montrer qu'il est possible de donner aux équations absolues encore d'autres formes explicites, représentant des extensions espace-temporelles des équations de Lagrange-Euler, d'Hamilton, d'Appell.

Pour arriver à la première, il suffit d'écrire, en vertu de (112),

$$c^2 \varkappa'_a = \frac{D'}{d\sigma}\left(c^2 g'_{ab} i^b\right)$$

et en raison de (100)

$$2E = c^2 g_{\alpha\beta} B^\alpha_a B^\beta_b i^a i^b = c^2 g'_{ab} i^a i^b \,.$$

Si l'on désigne donc par $E'(x^\lambda, i^a)$ l'énergie absolue exprimée en fonction des x^λ, i^a, les équations (111) entraînent

$$\frac{D'}{d\sigma}\left(\frac{\partial E'}{\partial i^a}\right) = Q'_a$$

et, en regardant les équations (51), 53, an s'assure que l'on peut écrire

$$\frac{d'}{d\sigma}\left(\frac{\partial E'}{\partial \dot q^a}\right) - \partial_a E' + 2\frac{\partial E}{\partial \dot x^\alpha}\partial_{[a} B^\alpha_{b]} \dot q^b = Q'_a \,. \tag{114}$$

Alors on obtient les équations absolues des celles ordinaires en remplaçant l'énergie et la force par l'énergie et la force absolues.

Il reste à remarquer que dans (114) intervient la dérivée de la fonction $\tau(t)$. Mais on peut—les équations (114) déjà formées — porter dans (113) au lieu de t la variable indépendante σ, de sorte qu'il faut déterminer, outre les paramètres, encore la valeur de la dérivée $\dfrac{d\tau}{d\sigma}$ en fonction de σ. Or, il suffit de tenir compte de la dernière équation (92), en l'écrivant sous la forme

$$d\sigma = B^t_a \, dq^a$$

pour avoir avec (114) les $m+1$ équations nécessaires à déterminer les paramètres et τ en fonction de la variable indépendante σ.

Pour obtenir la forme absolue des équations canoniques, posons

$$\frac{\partial E'}{\partial i^a} = I_a = c^2 i_a \,, \qquad 2F' = \frac{1}{c^2} g'^{ab} I_a I_b \,.$$

On a évidemment

$$F' = E' = \frac{c^2}{2}$$

et de plus

$$2\,\partial_a F' = \frac{1}{c^2} I_b I_d \partial_a g'^{bd} = g'_{ed}\, i^e I_b \partial_a g'_{bd}\,.$$

Mais

$$g'_{ed}\,\partial_a g'^{bd} = -\, g'^{bd}\,\partial_a g'_{ed}\,,$$

de sorte que

$$2\,\partial_a F' = -\, c^2\, i_b\, i^e g'^{bd}\,\partial_a g'_{ed} = -\, c^2\, i^d i^e\, \partial_a g'_{ed}\,.$$

et donc

$$\partial_a F' = -\,\partial_a E'.$$

En outre

$$\frac{\partial F'}{\partial I_a} = \frac{1}{c^2} g'^{ab} I_b = g'^{ab} i_b = i^a = \frac{d q^a}{d\sigma}$$

et les équations (114) deviennent alors

$$\frac{d I_a}{d\sigma} = -\,\partial_a F' - 2\, I_\alpha\, \partial_{[a} B^\alpha_{b]}\, i^b + Q'_a\,.$$

Mais

$$I_\alpha = B^e_\alpha\, I_e$$

et en vertu de (46)

$$2\, B^c_\alpha\, \partial_{[a} B^\alpha_{b]} = \Pi^c_{ab}\,.$$

On a donc en somme les $2m+2$ *équations canoniques*

$$\frac{d q^a}{d\sigma} = \frac{\partial F'}{\partial I_a}\,,\qquad \frac{d I_a}{d\sigma} = -\frac{\partial F'}{\partial q_a} - \Pi^c_{ab}\, I_c \frac{\partial F'}{\partial I_b} + Q'_a\,,$$

valables pour n'importe quels paramètres espace-temporels. Par application aux paramètres rhéonomes, on en tire les équations canoniques données par l'auteur antérieurement (Horák *4*, p. 18). Pour les systèmes scléronomes, on obtient les équations déduites par Pöschl (*1*) et si le système est aussi holonome, nos équations prennent la forme de celles d'Hamilton.

En terminant, je vais montrer que même les équations d'Appell peuvent s'étendre à des paramètres espace-temporels. En raison de (44), le vecteur courbure géodésique a pour expression

$$\varkappa'^a = \ddot{q}^a + \Theta^a_{bc}\, \dot{q}^b \dot{q}^c\,.$$

Si l'on pose

$$S = \frac{c^2}{2} g'_{bc}\, \varkappa'^b \varkappa'^c,$$

il vient

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}^a} = c^2 g'_{bc}\, \varkappa'^b \frac{\partial \varkappa'^c}{\partial \ddot{q}^a} = c^2 g'_{ab}\, \varkappa'^b = c^2 \varkappa'_a$$

et les équations naturelles (111) prennent la forme

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}^a} = Q'_a\,,$$

la fonction d'Appell généralisée S s'interprétant comme demi-carré de la courbure géodésique de la ligne d'Univers, multiplié par c^2.

15. Ligne d'Univers à la moindre courbure. — Les équations (111) déterminent la courbure géodésique de la ligne d'Univers. Pour obtenir la courbure forcée, formons les composantes normales des deux membres de l'équation (109). Nous aurons, d'après (82),

$$c^2 \varkappa_\alpha'' = X_\alpha'' + \overline{X}_\alpha \tag{115}$$

où l'on a posé $\overline{X}_\alpha'' = \overline{X}_\alpha$, puisque la force de liaison $\overline{X}_\alpha$ est identique à sa composante normale. De (115) et (111), on tire le résultat suivant:

(*XI*) *Si le système n'est pas soumis à aucune force donnée, le vecteur courbure forcée de la ligne d'Univers est égal (à un facteur constant près) à la force absolue de liaison, tandis que la courbure géodésique s'annulle.* Cela veut dire: (*XI'*) *La ligne d'Univers d'un système, supposé n'être soumis à aucune force donnée, est une géodésique tracée dans l'Univers virtuel.*

La courbure géodésique ne dépend que de la composante tangentielle de la force donnée, tandis que la courbure forcée depend de sa composante normale et de la force de liaison. Or, je définis le *vecteur courbure de liaison* $\overline{\varkappa}_\alpha$ moyennant la relation

$$c^2\, \overline{\varkappa}_\alpha = \overline{X}_\alpha = c^2 \varkappa_\alpha - X_\alpha \tag{116}$$

ce qui rend possible de décomposer le vecteur courbure en deux vecteurs, l'un étant dû à la force donnée, l'autre $\overline{\varkappa}_\alpha$ à celle de liaison. Pour ce dernier vecteur, je vais démontrer le théorème suivant:

(*XII*) *Parmi tous les mouvements compatibles avec les liaisons et avec les conditions initiales données, le mouvement réel d'un système quelconque, soumis à l'action de forces, est caractérisé par la propriété, que la courbure de liaison de sa ligne d'Univers est minimum.*

On voit que les lignes d'Univers, correspondant aux mouvements considérés, sont issues du même point et y ont la même tangente. Or, la courbure forcée est donnée par la relation, analogue à (41),

$$\varkappa_\alpha'' = i_\beta \frac{D B^\beta_\alpha}{d\sigma}$$

d'où l'on tire le théorème de Meusnier, exprimant que toutes les lignes en question ont la même courbure forcée [9]). D'autre part, on tire de (116)

$$c^2 \bar{\varkappa}_\alpha'' = c^2 \varkappa_\alpha'' - X_\alpha''$$

de sorte que la composante normale du vecteur courbure de liaison est la même pour toutes les lignes admissibles, c'est-à-dire constante pour notre problème. Cette condition s'exprime, en vertu de (34), au moyen des $n-m$ relations

(117) $$\bar{\varkappa}''^{K} = \Phi^K_\alpha \bar{\varkappa}^\alpha = \text{const.}$$

et si l'on considère au lieu de la courbure de liaison son carré

$$\bar{\varkappa}^2 = g_{\alpha\beta}\, \bar{\varkappa}^\alpha\, \bar{\varkappa}^\beta\,,$$

il s'agit de déterminer les $n+1$ variables $\bar{\varkappa}^\alpha$, vérifiant les conditions (117), de telle manière, que la fonction $\bar{\varkappa}^2$ soit minimum. La solution est donnée évidemment par l'équation

$$2\, g_{\alpha\beta}\, \bar{\varkappa}^\beta - 2\, \lambda_K \Phi^K_\alpha = 0$$

ou bien

$$\bar{\varkappa}_\alpha = \lambda_K \Phi^K_\alpha$$

ce qui est, d'après (116), complètement équivalent au principe de d'Alembert sous la forme (82).

Lorsque le système n'est soumis à aucune force donnée, la courbure (absolue) se réduit à la courbure de liaison d'où le théorème:

(*XIII*) *La ligne d'Univers représentant le mouvement réel d'un système, supposé n'être soumis à aucune force, possède la moindre courbure parmi toutes les lignes d'Univers compatibles avec les liaisons et avec l'état initial donné.*

Ce théorème — équivalent à (*XI'*) — généralise le théorème d'Hertz (*VI*) pour l'Univers, tandis que le théorème (*XII*) — l'analogue espace-temporel de celui (*V*) peut être envisagé comme la *forme absolue du principe de la moindre contrainte* de Gauss. En effet, le carré de la courbure de liaison, écrit sous la forme découlant de l'équation (116)

$$\bar{\varkappa}^2 = g_{\alpha\beta}\left(\varkappa^\alpha - \frac{X^\alpha}{c^2}\right)\left(\varkappa^\beta - \frac{X^\beta}{c^2}\right)$$

[9]) Par égard de l'équation (115), il s'en suit le théorème de Wundheiler (*2*, no *30*) qui n'est donc qu'une conséquence du théorème de Meusnier appliqué à l'Univers.

correspond dans l'Univers à la contrainte de Gauss, définie pour un système de points matériels par la somme:

$$\sum m\left\{\left(\ddot{x} - \frac{X}{m}\right)^2 + \left(\ddot{y} - \frac{Y}{m}\right)^2 + \left(\ddot{z} - \frac{Z}{m}\right)^2\right\}.$$

16. Variation absolue. — C'est dans mes travaux antérieurs (Horák *4*, *5*) que j'ai montré quelles avantages présente, dans la dynamique des systèmes, l'introduction de la *variation covariante.* Il en est de même dans la dynamique absolue. Le déplacement virtuel est un vecteur, mais le changement correspondant d'un vecteur, calculé d'après les règles de la différentiation ordinaire, ne l'est plus. Pour représenter la variation d'un vecteur de l'Univers v^α de même par un vecteur, il faut considérer l'expression analogue à (9)

(118) $$\Delta v^\alpha = \nabla_\gamma v^\alpha\, \delta x^\gamma = \delta v^\alpha + \left\{{\beta\gamma \atop \alpha}\right\} v^\beta\, \delta x^\gamma$$

que j'appelle *variation absolue.* Cette définition suppose, bien entendu, que *les paramètres x^α soient holonomes* et j'adopte cette supposition conséquement dans la suite. La composante tangentielle à l'Univers virtuel du vecteur (118) s'écrit d'après (23)

(119) $$\Delta' v^\alpha = B^\alpha_\beta\, \Delta v^\beta$$

et je vais la désigner comme *variation virtuelle.* Les dites variations de vecteurs covariants sont définies d'une manière analogue.

Appliquons la définition (119) à un vecteur w^α supposé être situé dans l'Univers virtuel U^{m+1}_{n+1}. Il vient d'abord, en vertu de (25),

(120) $$w^\alpha = B^\alpha_\beta\, w^\beta$$

et l'on peut écrire

$$\Delta' w^\alpha = B^\alpha_\beta\, \Delta w^\beta = \Delta (B^\alpha_\beta\, w^\beta) - w^\beta\, \Delta B^\alpha_\beta\,.$$

Or, on définit l'affineur (Schouten *1*, *3*)

(121) $$H_{\gamma\beta}^{\cdot\cdot\alpha} = B^\varepsilon_\gamma\, B^\delta_\beta\, \nabla_\varepsilon\, B^\alpha_\delta$$

et donc

$$H_{\gamma\beta}^{\cdot\cdot\alpha}\, \delta x^\gamma = B^\delta_\beta\, \Delta\, B^\alpha_\delta\,,$$

(122) $$\Delta' w^\alpha = \Delta w^\alpha - H_{\gamma\beta}^{\cdot\cdot\alpha}\, w^\beta\, \delta x^\gamma$$

ou bien d'après (118)

$$\Delta' w^\alpha = \partial w^\alpha + \left(\left\{ {\beta\gamma \atop \alpha} \right\} - H^{\cdot\cdot\alpha}_{\gamma\beta}\right) w^\beta \, \partial x^\gamma \tag{123}$$

et il est évident que la différentielle admet l'expression analogue:

$$D' w^\alpha = d w^\alpha + \left(\left\{ {\beta\gamma \atop \alpha} \right\} - H^{\cdot\cdot\alpha}_{\gamma\beta}\right) w^\beta \, d x^\gamma \, . \tag{124}$$

Par analogie, on déduit pour les composantes covariantes

$$D' w_\beta = D w_\beta - H^{\cdot\,\alpha}_{\gamma\cdot\beta} w_\alpha \, d x^\gamma \, ,$$

$$\Delta' w_\beta = \Delta w_\beta - H^{\cdot\,\alpha}_{\gamma\cdot\beta} \, w_\alpha \, \partial x^\gamma \, .$$

Enfin, en introduisant les paramètres non holonomes q^a, on obtient en vertu de (26) et (44)

$$\Delta' w^a = B^a_\alpha \Delta w^\alpha = \partial w^a + \Theta^a_{bc} w^b \, \partial q^c . \tag{125}$$

Par application des formules (118), (119), (122), (123), (125) à l'élément linéaire de la ligne d'Univers de composantes $d x^\alpha$, on aura

$$\Delta \, d x^\alpha = \partial \, d x^\alpha + \left\{ {\beta\gamma \atop \alpha} \right\} d x^\beta \, \partial x^\gamma \, , \tag{126}$$

$$\Delta' d x^\alpha = B^\alpha_\beta \, \Delta \, d x^\beta = \Delta \, d x^\alpha - H^{\cdot\cdot\alpha}_{\gamma\beta} \, d x^\beta \, \partial x^\gamma \tag{127}$$

$$= \partial \, d x^\alpha + \left(\left\{ {\beta\gamma \atop \alpha} \right\} - H^{\cdot\cdot\alpha}_{\gamma\beta}\right) d x^\beta \, \partial x^\gamma \, ,$$

$$\Delta' \, d q^a = \partial \, d q^a + \Theta^a_{bc} \, d q^b \, \partial q^c \, . \tag{128}$$

D'autre part, les formules (9), (124), (44), appliquées au déplacement virtuel ∂x^α, entraînent évidemment

$$D \, \partial x^\alpha = d \, \partial x^\alpha + \left\{ {\gamma\beta \atop \alpha} \right\} d x^\beta \, \partial x^\gamma \, , \tag{129}$$

$$D' \, \partial x^\alpha = B^\alpha_\beta \, D \, \partial x^\beta = D \, \partial x^\alpha - H^{\cdot\cdot\alpha}_{\beta\gamma} \, d x^\beta \, \partial x^\gamma \tag{130}$$

$$= d \, \partial x^\alpha + \left(\left\{ {\beta\gamma \atop \alpha} \right\} - H^{\cdot\cdot\alpha}_{\beta\gamma}\right) d x^\beta \, \partial x^\gamma ,$$

$$D' \, \partial q^a = d \, \partial q^a + \Theta^a_{cb} \, a \, q^b \, \partial q^c . \tag{131}$$

En combinant les deux groupes de formules ci-dessus, il s'en suit

$$\Delta \, d x^\alpha - D \, \partial x^\alpha = \partial \, d x^\alpha - d \, \partial x^\alpha , \tag{132}$$

$$\Delta' \, d x^\alpha - D' \, \partial x^\alpha = B^\alpha_\beta (\partial \, d x^\alpha - d \, \partial x^\alpha) \tag{133}$$

$$= \partial \, d x^\alpha - d \, \partial x^\alpha + 2 \, H^{\cdot\cdot\alpha}_{[\beta\gamma]} \, d x^\beta \, \partial x^\gamma \, ,$$

$$\Delta' \, d q^a - D' \, \partial q^a = \partial \, d q^a - d \, \partial q^a + 2 \, \Theta^a_{[bc]} \, d q^b \, \partial q^c . \tag{134}$$

Tenant compte de (45), (46), on trouve

$$2 \, \Theta^a_{[bc]} = \Pi^a_{cb} = 2 \, B^a_\alpha \, \partial_{[c} \, B^\alpha_{b]} \tag{135}$$

et (134) devient

$$\Delta' \, dq^a - D' \, \partial q^a = \partial \, d q^a - d \, \partial q^a + \Pi^a_{cb} \, d q^b \, d q^c \, . \tag{136}$$

La différence $\partial \, d x^\alpha - d \, \partial x^\alpha$ est égale, comme on sait — aux quantités infiniment petites du troisième ordre près — au changement du paramètre x^α qu'il éprouve pendant un déplacement le long du parallélogramme engendré dans l'Univers par les deux vecteurs $d x^\alpha$, ∂x^α. Le dit parallélogramme n'est donc pas fermé, que si *toutes* les différences $\partial \, d x^\alpha - d \, \partial x^\alpha$ s'annullent. Comme les $\Delta \, d x^\alpha$, $D \, \partial x^\alpha$ sont des vecteurs, les relations (132) montrent que ces différences sont des composantes du vecteur joignant le point initial au point final du parallélogramme. La composante normale du dit vecteur s'écrit, en vertu de (32) et (133),

$$C^\alpha_\beta \, (\partial \, d x^\beta - d \, \partial x^\beta) = 2 \, H^{\cdot\cdot\alpha}_{[\gamma\beta]} \, d x^\beta \, d x^\gamma \text{ [10]} \tag{137}$$

Introduisant les paramètres q^a et posant

$$H^{\cdot\cdot a}_{ba} = B^\gamma_b \, B^\beta_a \, H^{\cdot\cdot\alpha}_{\gamma\beta} \, ,$$

on en tire

$$C^\alpha_\beta \, (\partial \, d x^\beta - d \, \partial x^\beta) = 2 \, H^{\cdot\cdot\alpha}_{[ba]} \, d q^a \, \partial q^b \, . \tag{137 bis}$$

Or, les équations

$$H^{\cdot\cdot\alpha}_{[ba]} = 0 \tag{138}$$

[10] Car on a $C^\varepsilon_\alpha H^{\cdot\cdot\alpha}_{\gamma\beta} = H^{\cdot\cdot\varepsilon}_{\gamma\beta}$, c'est-à-dire $B^\varepsilon_\alpha H^{\cdot\cdot\alpha}_{\gamma\beta} = 0$, comme on s'assure par exemple en multipliant (130) par B^ε_α.

expriment les conditions nécessaires et suffisantes (S c h o u t e n 2, 3) d'holonomie de la variété $U_n^{m}\ddagger$, c'est-à-dire d'holonomie du système matériel correspondant. Donc, pour un système *holonome*, la composante normale du vecteur $\partial\, d\, x^\alpha - d\, \partial\, x^\alpha$ *s'annulle nécessairement*, tandis que, dans le cas d'un système *non holonome*, il est *impossible* de construire dans l'Univers virtuel un parallélogramme *fermé* infiniment petit.

La composante normale du vecteur qui complète le parallélogramme considéré en un cycle fermé est donnée par (137), mais sa projection sur l'Univers virtuel, c'est-à-dire $\Delta'\, d\, x^\alpha - D'\, \partial\, x^\alpha$ est complètement arbitraire. Ses composantes relatives aux paramètres non holonomes q^a se calculent d'après (134) d'où l'on voit que les différences $\partial\, d\, q^a - d\, \partial\, q^a$ ne sont plus des composantes d'un vecteur [11]).

D'après ce qui précède, on peut toujours choisir la composante tangentielle égale à zéro et nous allons donc convenir une fois pour toutes que les déplacements virtuels satisfassent aux relations

(139) $$\Delta'\, d\, x^\alpha = D'\, \partial\, x^\alpha$$

ou bien

(140) $$\Delta'\, d\, q^a = D'\, \partial\, q^a\,.$$

Cela fait, on tire de (133), (136)

(141) $$\partial\, d\, x^\alpha = d\, \partial\, x^\alpha + 2\, H_{[\gamma\beta]}^{\cdot\,\cdot\,\alpha}\, d\, x^\beta\, \partial\, x^\gamma\,,$$

(142) $$\partial\, d\, q^a = d\, \partial\, q^a + \Pi_{bc}^{\ a} d\, q^b\, \partial\, q^c\,.$$

Par suite, les opérations d et ∂ *ne sont pas échangeables* ni pour les paramètres holonomes x^α ni pour ceux non holonomes q^a. Mais la signification vraie des équations (141), (142) est donnée par les relations (139), (140) qui peuvent être mises à une forme plus symétrique, si l'on considère les paramètres x^α comme des quantités scalaires, de sorte que

$$D\, x^\alpha = d\, x^\alpha\,, \quad \Delta\, x^\alpha = \partial\, x^\alpha.$$

Dans ces conditions, on peut écrire, en vertu de (120),

(143) $$D' x^\alpha = B_\beta^\alpha\, d\, x^\beta = d\, x^\alpha\,, \quad \Delta'\, x^\alpha = \partial\, x^\alpha$$

et en posant par analogie

---

[11]) Si les paramètres x^α étaient non holonomes, les relations (132) deviendraient analogues à celles (134). Donc les $\partial\, d\, x^\alpha - d\, \partial\, x^\alpha$ ne sont des composantes d'un vecteur, que si les paramètres x^α sont holonomes.

et en posant par analogie

(144) $$D'\, q^a = d\, q^a\,, \quad \Delta'\, q^a = \partial\, q^a\,,$$

il vient

(145) $$\Delta'\, D'\, x^\alpha = D'\, \Delta'\, x^\alpha\,, \quad \Delta'\, D'\, q^a = D'\, \Delta'\, q^a.$$

Donc les symboles Δ', D' sont échangeables pour n'importe quels paramètres et l'on peut dire que la variation virtuelle et la différentiation dans l'Univers virtuel le sont aussi. (Ceci n'est plus vrai, en général, pour la variation et la différentiation absolues: Δ, D). Si l'on considère alors les parallélogrammes, vérifiant les conditions (139) ou (140) comme tracés dans l'Univers virtuel, ils peuvent être regardés comme *fermés* aussi bien que l'on envisage les géodésiques d'une surface comme droites. Du reste, les dits parallélogrammes deviennent vraiment fermés, lorsque le système est holonome.

Il est à signaler que les équations (137) peuvent être modifiées, en les multipliant par Φ_α^K. En vertu de (22) et (31), il vient

$$\Phi_\alpha^K\, C_\beta^\alpha = \Phi_\alpha^K\, (A_\beta^\alpha - B_\beta^\alpha) = \Phi_\beta^K$$

et (137) se réduit, en raison de (121), à l'équation

$$\Phi_\alpha^K\, (\partial\, d\, x^\alpha - d\, \partial\, x^\alpha) = 2\, \Phi_\alpha^K\, B_{[\gamma}^{\varepsilon}\, B_{\beta]}^{\delta}\, \nabla_\varepsilon\, B_\delta^\alpha\, d\, x^\beta\, \partial\, x^\gamma$$

$$= 2\, \Phi_\alpha^K\, \nabla_{[\gamma}\, B_{\beta]}^\alpha\, d\, x^\beta\, \partial\, x^\gamma = 2\, \Phi_\alpha^K\, \partial_{[\gamma}\, B_{\beta]}^\alpha\, d\, x^\beta\, \partial\, x^\gamma.$$

Par égard de (22), le second membre devient

$$-2\, B_{[\beta}^\alpha\, \partial_{\gamma]}\, \Phi_\alpha^K\, d\, x^\beta\, \partial\, x^\gamma$$

ce qui donne la composante normale du vecteur (132) sous la forme

(146) $$\Phi_\alpha\, (\partial\, d\, x^\alpha - d\, \partial\, x^\alpha) = 2\, \partial_{[\beta}\, \Phi_{\gamma]}^K\, d\, x^\beta\, \partial\, x^\gamma.$$

En somme, les déplacements virtuels dans l'Univers sont définis moyennant les conditions

(147) $$\begin{cases} \Phi_\alpha^K\, \partial\, x^\alpha = 0\,, \\ \Delta'\, d\, x^\alpha - D'\, \partial\, x^\alpha = 0 \end{cases}$$

lesquelles entraînent les équations (137) ou bien (146). En cas particulier d'un système scléronome [12]), les résultats ci-dessus peuvent être appliqués aux paramètres spatiaux x^λ et q^k et l'on arrive aux résultats que j'avais déduits dans mes travaux antérieurs (Horák *5*, *10*). Dans le premier, on trouve les analogues des équations (140) et (142), dans le second celui de (146).

Remarque. Schouten (*2*, p. 296; *3*, p. 162) donne pour le vecteur $\delta d x^\alpha - d \delta x^\alpha$ l'expression

$$(148) \qquad 2\, d q^a \delta q^b \partial_{[b} B^\alpha_{a]} = 2\, d q^a \delta q^b \left(H_{[ba]}^{\cdot\cdot\,\alpha} + B^\alpha_\beta \partial_{[b} B^\beta_{a]}\right)$$

qui dépend du choix de paramètres. D'autre part, (137bis) entraîne l'équation

$$(149) \qquad \delta d x^\alpha - d \delta x^\alpha = 2\, d q^a \delta q^b H_{[ba]}^{\cdot\cdot\,\alpha} + B^\alpha_\beta (\delta d x^\beta - d \delta x^\beta)$$

dont le second membre est un vecteur. Pour expliquer cette contradiction, calculons le dit vecteur, en partant des relations

$$d x^\alpha = B^\alpha_a d q^a, \qquad \delta x^\alpha = B^\alpha_b \delta q^b.$$

On aura d'abord

$$(150) \qquad \delta d x^\alpha - d \delta x^\alpha = 2\, \partial_{[b} B^\alpha_{a]} d q^a \delta q^b + B^\alpha_a (\delta d q^a - d \delta q^a)$$

ce qui donne, en vertu de (134) et (135), la relation

$$\delta d x^\alpha - d \delta x^\alpha = 2\, C^\alpha_\beta \partial_{[b} B^\beta_{a]} d q^a \delta q^b + B^\alpha_a B^a_\beta (\Delta d x^\beta - D \delta x^\beta)$$

qui prouve la validité de (149). On voit que l'expression (148) découle de (150) sous la supposition $\delta d q^a - d \delta q^a = 0$ qui, bien entendu, est admissible mais qui n'a pas de sens invariant, car la différence $\delta d q^a - d \delta q^a$ n'est pas un vecteur. Dans un travail de G. K. Sousloff (*1*), traitant les systèmes non holonomes, on trouve une autre supposition non invariante, s'exprimant par les m équations:

$$\delta d x^\lambda - d \delta x^\lambda = 0, \qquad \lambda = 1, 2, \ldots m.$$

Au contraire, notre supposition invariante (139) ou aussi (140) entraîne la relation (141) ou bien (142), traduisant l'énoncé que le vecteur $\delta d x^\alpha - d \delta x^\alpha$ se réduit à sa composante normale.

17. Principe stationnaire. — Dans la suite, je me propose de résumer les équations de la ligne d'Univers d'un système matériel quelconque en un principe stationnaire. Pour ce but, multiplions les équations (109) par $\Delta' x^\alpha = \delta x^\alpha$ et faisons la somme

$$(151) \qquad c^2 \varkappa_\alpha \Delta' x^\alpha = X_\alpha \Delta' x^\alpha + \Lambda_K \Phi^K_\alpha \Delta' x^\alpha.$$

On a évidemment

$$X_\alpha \Delta' x^\alpha = X_\alpha \delta x^\alpha = \delta P, \qquad \Lambda_K \Phi^K_\alpha \Delta' x^\alpha = 0$$

et en outre

$$\begin{aligned}
\varkappa_\alpha \delta x^\alpha &= \frac{D i_\alpha}{d\sigma} \delta x^\alpha = \frac{D}{d\sigma}(i_\alpha \delta x^\alpha) - i_\alpha \frac{D \delta x^\alpha}{d\sigma} \\
&= \frac{d}{d\sigma}(i_\alpha \delta x^\alpha) - i_\beta B^\beta_\alpha \frac{D \delta x^\alpha}{d\sigma} \\
&= \frac{d}{d\sigma}(i_\alpha \delta x^\alpha) - i_\beta \frac{D' \delta x^\beta}{d\sigma} = \frac{d}{d\sigma}(i_\alpha \delta x^\alpha) - i_\beta \frac{\Delta' d x^\beta}{d\sigma} \\
&= \frac{d}{d\sigma}(i_\alpha \delta x^\alpha) - i_\beta \Delta' i^\beta - \frac{\Delta' d\sigma}{d\sigma^2} i_\beta d x^\beta \\
&= \frac{d}{d\sigma}(i_\alpha \delta x^\alpha) - \frac{1}{2} \delta (i_\beta i^\beta) - \frac{\delta d\sigma}{d\sigma}
\end{aligned}$$

où l'on a tenu compte des équations (139) et du fait que les symboles D', Δ', appliqués à des quantités scalaires, se réduisent aux d, δ. L'équation (151) entraîne donc

$$\delta E + c^2 \frac{\delta d\sigma}{d\sigma} + \delta P = \frac{d}{d\sigma}(i_\alpha \delta x^\alpha)$$

et comme

$$\delta E = \delta \left(\frac{c^2}{2} \frac{d\sigma^2}{d\sigma^2}\right) = 0$$

on aboutit au théorème:

(*XIV*) *Si l'on désigne par σ l'arc de la ligne d'Univers d'un système matériel quelconque, par δP le travail virtuel de la force absolue, par c^2 une constante plus grande que la force vive du système, la formule*

$$(152) \qquad \int (c^2 \delta d\sigma + \delta P\, d\sigma) = 0$$

a lieu pour tous les déplacements virtuels s'annulant aux limites de l'intégrale.

On arrive au même théorème par un calcul analogue mais plus simple, en partant des équations (111).

[12]) Quant aux systèmes rhéonomes, voir aussi Vrănceanu *5*.

Réciproquement, les équations naturelles de la ligne d'Univers découlent du théorème *XIV*. Je commence par déduire les équations (111). Écrivons la formule (152) sous la forme

$$\int\left(c^2 \frac{\Delta' d\sigma}{d\sigma} + Q'_a \delta q^a\right) d\sigma = 0.$$

Alors

$$\frac{\Delta' d\sigma}{d\sigma} = \frac{\Delta' \sqrt{g'_{ab}\, d q^a\, d q^b}}{d\sigma} = \frac{1}{d\sigma^2} g'_{ab}\, d q^b\, \Delta'\, d q^a$$

$$= i_a \frac{D' \delta q^a}{d\sigma} = \frac{D'}{d\sigma}(i_a \delta q^a) - \frac{D' i_a}{d\sigma} \delta q^a$$

et par suite

$$\int\left(-c^2 \frac{D' i_a}{d\sigma} + Q'_a\right) \delta q^a\, d\sigma = 0.$$

En vertu de l'indépendance des δq^a, on obtient les relations

$$c^2 \frac{D' i_a}{d\sigma} = Q'_a$$

identiques aux (111).

Pour arriver aux équations (109), il suffit de songer que

$$i_\alpha (\Delta\, d x^\alpha - D\, \delta x^\alpha) = 0$$

et de mettre l'équation (152) à la forme

$$\int\left(-c^2 \frac{D i_\alpha}{d\sigma} + X_\alpha\right) \delta x^\alpha\, d\sigma = 0$$

d'où l'on tire vraiment, en raison de (81), par le procédé habituel les $n+1$ équations

$$c^2 \varkappa_\alpha = X_\alpha + \Lambda_\alpha \Phi^K_\alpha.$$

Mais on peut aussi, au lieu de (81), tenir compte des liaisons, en les écrivant comme suit

(153) $$\Phi^K_\alpha i^\alpha = 0.$$

Le problème de trouver les $n+1$ fonctions $x^\alpha(\sigma)$, remplissant l'équation (152) et en même temps les conditions accessoires (153), se traduit, comme on sait, par l'équation

(154) $$\int\left\{c^2 \frac{\delta\, d\sigma}{d\sigma} + X_\alpha \delta x^\alpha + \delta\left(\lambda_K \Phi^K_\alpha \frac{d x^\alpha}{d\sigma}\right)\right\} d\sigma = 0.$$

Or, on déduit aisément

$$\delta\left(\lambda_K \Phi^K_\alpha \frac{d x^\alpha}{d\sigma}\right) = \lambda_K \frac{\delta}{d\sigma}(\Phi^K_\alpha\, d x^\alpha) + \Phi^K_\alpha i^\alpha \left(\delta \lambda_K - \lambda_K \frac{\delta\, d\sigma}{d\sigma}\right).$$

Le deuxième terme du second membre s'annulle d'après (153) et en outre l'équation (146) peut s'écrire

$$\Phi^K_\alpha \delta\, d x^\alpha + \delta \Phi^K_\alpha\, d x^\alpha = \Phi^K_\alpha\, d \delta x^\alpha + d \Phi^K_\alpha \delta x^\alpha$$

ou encore

$$\delta (\Phi^K_\alpha\, d x^\alpha) = d (\Phi^K_\alpha \delta x^\alpha)$$

de sorte que

$$\delta\left(\lambda_K \Phi^K_\alpha \frac{d x^\alpha}{d\sigma}\right) = \lambda_K \frac{d}{d\sigma}(\Phi^K_\alpha \delta x^\alpha) = \frac{d}{d\sigma}(\lambda_K \Phi^K_\alpha \delta x^\alpha) - \frac{d\lambda_K}{d\sigma} \Phi^K_\alpha \delta x^\alpha.$$

Alors (154) devient

$$\int\left\{-c^2 \varkappa_\alpha + X_\alpha - \frac{d\lambda_K}{d\sigma} \Phi^K_\alpha\right\} \delta x^\alpha\, d\sigma = 0$$

et en posant

$$-\frac{d\lambda_K}{d\sigma} = \Lambda_K$$

on retrouve les équations (109).

Maintenant, je vais montrer que le principe (152) prend une forme remarquable lorsqu'il existe un potentiel $U(x^\alpha, t)$, défini moyennant les relations

$$\partial_\lambda U = X_\lambda.$$

Cela étant,

$$X_t = -\partial_\lambda U \dot{x}^\lambda = \partial_t U - \frac{dU}{dt}.$$

et l'on est amené à introduire le *potentiel absolu* défini par l'équation suivante

$$W(x^\lambda, t) \equiv U(x^\lambda, t) - U(t) + \frac{c^2}{2} = \frac{c^2}{2},$$

analogue à celle (104), définissant l'énergie absolue:

$$E \equiv T - T(t) + \frac{c^2}{2} = \frac{c^2}{2}.$$

On a donc

$$X_\alpha = \partial_\alpha W, \quad \delta P = \delta W$$

icm©

et (152) devient

$$\int (2 E \delta d \sigma + \delta W d \sigma) = 0 .$$

Mais on a évidemment

$$W = E, \quad \delta E = 0,$$

de sorte que

(155) $$\delta \int (E + W) d \sigma = 0 .$$

Nous avons établi ainsi un *principe stationnaire* qui, dans le cas où il n'y a pas de forces données, se réduit au suivant

(156) $$\delta \int d \sigma = 0$$

Donc:

(*XV*) *L'arc de la ligne d'Univers d'un système, supposé n'être soumis à aucune force, est stationnaire.*

D'après ce qui précéde, il est évident que le principe ci-dessus conduit aux équations d'une géodésique dans l'Univers virtuel:

$$\varkappa'_a = 0$$

et que, par conséquent, encore les géodésiques d'une variété *non holonome* peuvent être regardées comme des lignes de longeur stationnaire, à condition d'accepter les suppositions (147), faites auparavant, qui entraînent les relations

$$\Delta' D' q^a = D' \Delta' q^a .$$

En somme, en se servant conséquement de la variation virtuelle Δ', on déduit du principe

$$\Delta' \int d \sigma = 0$$

les équations d'une géodésique exactement comme s'il agissait d'un espace holonome.

18. Analogie avec la mécanique relativiste. — On observe que notre interprétation de la mécanique absolue dans l'Univers présente une étroite analogie avec la dynamique relativiste. Pour le faire ressortir d'une manière plus nette, considérons le cas où le système se réduit à un seul point matériel de masse égale à l'unité. Les équations de la ligne d'Univers deviennent

$$c^2 \frac{d^2 x^\alpha}{d \sigma^2} = X_\alpha , \quad \alpha = 0, 1, 2, 3$$

et lorsqu'on écrit

$$x^1 = x , \quad x^2 = y , \quad x^3 = z$$

on aura d'après (96) et (97)

$$c^2 d \sigma^2 = d x^2 + d y^2 + d z^2 + c^2 (1 - 2 \tau) d t^2 .$$

Posons de plus

$$c^2 (1 - 2 \tau) d t^2 = (c^2 - 2 T) d t^2 = (c^2 - v^2) d t^2 = d u^2$$

ou bien

(157) $$d u = c \, d t \sqrt{1 - v^2 / c^2} ,$$

de sorte que

(158) $$c^2 d \sigma^2 = d x^2 + d y^2 + d z^2 + d u^2$$

ou encore

(159) $$d u^2 = c^2 d t^2 - d x^2 - d y^2 - d z^2 .$$

J'avais appelé *temps propre* la variable u (H o r á k *8*) dont l'introduction rend possible de donner la forme particulière (158) à l'élément linéaire de la ligne d'Univers. Ce fait montre que l'Univers d'un point libre est euclidien. Si le point considéré n'est soumis à l'action d'aucune force, sa vittesse v est constante et le temps propre devient proportionnel au temps absolu de N e w t o n. Le temps propre défini au moyen de l'équation (157) ou (159) est analogue au temps propre que l'on définit dans la théorie de la relativité, puisque notre constante c, vérifiant la relation (99): $c > v$, joue, dans nos considérations, un rôle semblable à celui de la vitesse de la lumière dans la mécanique relativiste.

De même la force absolue X_α, de composantes

$$X, \; Y, \; Z, \; -(X \dot{x} + Y \dot{y} + Z \dot{z}),$$

ne diffère de la quadri-force de M i n k o w s k i que par le facteur $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ qui n'intervient pas dans nos équations. Il y a, à cela, la raison suivante. La mécanique absolue, interprétée dans le présent chapitre, est indépendante, bien entendu, du repérage de l'espace-temps, cependant elle exprime nécessairement les lois classiques de la mécanique newtonienne. C'est pour quoi nous avions choisi l'arc de la ligne d'Univers égal au temps absolu de N e w t o n lequel est ainsi défini d'une manière invariante pour n'importe quels paramètres espace-temporels.

Par contre, dans la théorie de la relativité, le rôle du temps absolu est joué par le temps propre dont la différentielle est définie moyennant l'expression (157) [13]).

Le temps propre peut être défini, encore dans le cas d'un système général, au moyen de la même relation (157) ce qui donne

$$d u^2 = c^2 d t^2 - a_{\lambda\mu} d x^\lambda d x^\mu.$$

Cela fait, la métrique de l'Univers prend la forme simple

$$c^2 d \sigma^2 = a_{\lambda\mu} d x^\lambda d x^\mu + d u^2.$$

INDEX DES TRAVAUX CITÉS.

Berwald, L. — Ph. Frank:

1 — Über eine kovariante Gestalt der Differentialgleichungen der Bahnkurven allgemeiner mechanischer Systeme, Math. Zeitschr., **21** (1924) p. 154 — 159.

Cartan, E.:

1 — Leçons sur les invariants intégraux, A. Hermann, Paris (1922)

2 — Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann, Cahiers Scientifiques, Gauthier-Villars, Paris (1928).

Eisenhart, L. P.:

1 — Dynamical Trajectories and Geodesics, Ann. of Math., **30** (1929) p. 591—606.

Grammel, R.:

1 — Kinetik der Massenpunkte, Handbuch der Physik, Bd. V, J. Springer, Berlin (1927) p. 305 — 372.

Halpern, O.:

1 — Relativitätsmechanik, Hanbuch der Physik, Bd. V, J. Springer, Berlin (1927) 578 — 616.

Horák, Z.:

1 — Le principe de la conservation de l'énergie et les équations de la Physique (en tchèque), Publ. Fac. Sc. Univ. Charles, No **25**, Prague (1924) p. 1—40.

2 — Die Formeln für allgemeine lineare Übertragung bei Benutzung von nichtholonomen Parametern, Nieuw Archief v. wisk., Groningen, **15** (1927) p. 193 — 201.

3 — Sur une généralisation de la notion de variété (en tchèque), Publ. Fac. Sc. Univ. Masaryk, Brno, No **86** (1927) p. 1 — 20.

4 — Sur les systèmes non holonomes, Bull. Int. Acad. Tchèque Sc. Prague (1928) p. 1 — 18.

5 — Sur les conditions de validité du principe d'Hamilton, C. R. Acad. Sc. Paris, **188** (1929) p. 614 — 616.

6 — Sur le problème fondamental du calcul intégral absolu, C. R. Acad. Sc. Paris **189** (1929) p. 19 — 21.

7 — Théorie générale du choc dans les systèmes matériels, Journ. Éc. Polytechnique, Paris, 2^e^ s., **28** (1931) p. 15 — 64.

[13]) Voir, par exemple, O. Halpern *1*.

8 — Sur la ligne d'Univers d'un point matériel en mécanique classique, C. R. Acad. Sc. Paris, **192** (1931) p. 1203 — 1205.

9 — Sur la ligne d'Univers des systèmes conservatifs, Verhandl. d. Int. Mathem.-Kongresses Zürich 1932, II. Bd., p. 292 — 293.

10 — Sur le principe d'Hamilton dans le cas des liaisons non holonomes, Verh. d. Int. Mathem.-Kongresses Zürich 1932, II Bd., p. 325 — 326.

11 — Sur la dynamique absolue des systèmes rhéonomes, Prace Matem.-Fiz., Warszawa, **XLI** (1933) p. 25 — 37.

Hostinský, B.:

1 — Sur les transformations des équations de la Mécanique, Bull. des Sc. Mathém., 2^e^ s., **48** (1924) p. 1 — 16.

Lewis, T.:

1 — On the reduction of dynamics to geometry, Phil. Mag., VII s., **11** (1931) p. 753 — 760.

Pöschl, T.:

1 — Sur les équations canoniques des systèmes non holonomes, C. R. Acad. Sc. Paris, **156** (1913) p. 1829 — 1831.

Schouten, J. A.:

1 — Der Ricci-Kalkül, J. Springer, Berlin (1924).

2 — On non-holonomic connexions, Proc. Kon. Acad. v. Wetenschappen, Amsterdam, **31**, No 3 (1928) p. 291 — 299.

3 — Über nichtholonome Übertragungen in einer L_n, Math. Zeitschr., **30** (1929) p. 149 — 172.

Sousloff, G. K.:

1 — Sur une modification du principe de d'Alembert, Matematitcheskij Sbornik, Moscou, **XXII** (1901) p. 687 — 691.

Vranceanu, G.:

1 — Sur les espaces non holonomes, C. R. Acad. Sc. Paris, **183** (1926) p. 852 — 854.

2 — Sur le calcul différentiel absolu pour les variétés non holonomes, C. R. Acad. Sc. Paris, **183** (1926) p. 1083 — 1085.

3 — Sopra le equazioni del moto di un sistema anolonomo, Rend. Lincei, **IV** (1926).

4 — Studio geometrico dei sistemi anolonomi, Annali di Mat., **6** (1929) p. 9—43.

5 — Sur le principe d'Hamilton appliqué aux systèmes non holonomes, Verh. d. Int. Mathem.-Kongresses Zürich 1932, II. Bd., p. 181 — 183.

Wundheiler, A.:

1 — Über die Variationsgleichungen für affine geodätische Linien und nichtholonome, nichtkonservative dynamische Systeme, Prace Matem.-Fiz., Warszawa, **XXXVIII** (1931) p. 129 — 147.

2 — Rheonome Geometrie. Absoluete Mechanik, Prace Matem.-Fiz., Warszawa, **XL** (1932) p. 97 — 142.