Lösung eines Tartakovskischen Problems

(Rozwiązanie uogólnionego zagadnienia Tartakowskiego)

von

S. Lubelski.

Tartakovski [1]) hat für diophantische Gleichungen der Form

$$x^4 - \rho y^4 = 1 \quad (\rho > 0)$$

bewiesen, dass sie, ausgenommen den Fall $\rho = 15$, höchstens eine (triviale) Lösung (d. h. $x = \pm 1$, $y = 0$) haben. Im Falle $\rho = 15$ kann eine andere Lösung $x = \pm 2$, $y = \pm 1$ gefunden werden. Mittels der Tartakovskischen Methoden lässt sich nicht beweisen, ob die Gleichung $x^4 - 15 y^4 = 1$ andere Lösungen hat [*]). Nun weisen wir auf einen (anderen wahrscheinlich weniger bekannten) Axel Thueschen Satz hin, mittels dessen solche Ausnahmefälle bei „reinen" binären Formen, für welche mindestens ein Paar von positiven ganzzahligen Lösungen bekannt ist, stets gelöst werden können.

Dieser Axel Thuesche Satz [2]) lautet nämlich folgendermassen:

„Supposons qu'on ait en nombres entiers positifs a, b, α, β, γ, r où „r est la puissance d'un nombre premier, $r \geqq 3$, les relations

$$a\,\alpha^r - b\,\beta^r = \gamma, \quad (4\,a\,\alpha^r)^{r-2} > \gamma^{2r-2}\, r^{\frac{r^2}{r-1}} \left(\frac{a\,\alpha^r}{b\,\beta^r}\right)^{\frac{2(r-1)^2}{r}}. \tag{1}$$

---

[1]) V. Tartakovski — Auflösung der Gleichung $x^4 - \rho y^4 = 1$ (Bull. Acad. Sc, de l' U. R. S. S. 1926 S. 301—324).

[2]) Axel Thue: Berechnung aller Lösungen gewisser Gleichungen von der Form $a x^r - b y^r = f$ (Skrifter Videnskapsselskäpet, Kristiania 1909); vgl. [3]).

[*]) a. a. o. [1]) S. 302 „Nur für die einzige Ordnung $O(\sqrt{15})$ kann ich die Gültigkeit des Theorems nicht behaupten, so dass ich gar nichts über die Lösungen der Gleichung $x^4 - 15 y^4 = 1$ und deren Anzahl aussagen kann".

„Alors si l'on a

$$K = \frac{r^{\frac{r^2-4r+1}{r-1}}\, b^{\frac{r^2-r+1}{r}}\, \beta^{(r-1)^2}}{2^{r+4}\gamma^{r-1}\alpha^{2r} a^{\frac{r+1}{r}}}, \qquad L = \frac{(4a\alpha^r)^{r-2}}{\gamma^{2r+2} r^{\frac{r^2}{r-1}} \left(\frac{a\alpha^r}{b\beta^r}\right)^{\frac{2(r-1)^2}{r}}},$$

$$|a p^r - b q^r| \leqq c, \qquad n \geqq \frac{\log c - \log K}{\log L}$$

„où p, q et n sont des nombres entiers positifs, $n \geqq 0$ et c une quantité „positive, il faut que

$$p \leqq \frac{r b \beta^{r-1}}{2\gamma}\left[\frac{4a\alpha^r}{\gamma^2 r^{\frac{r}{r-1}}\left(\frac{a\alpha^r}{b\beta^r}\right)^{\frac{2r-2}{r}}}\right]^n.$$

Nun ist für $x^4 - 15y^4 = 1$:

$$a = 1, \quad b = 15, \quad \alpha = 2, \quad \beta = 1, \quad \gamma = 1, \quad r = 4, \quad \log c = 0:$$

$$\frac{-\log K}{\log L} = \frac{+92 \lg 2 - \frac{39}{2}\lg 15}{-100\lg 2 + 27 \lg 15} = \frac{4{,}758}{1{,}651} < 3.$$

Der Zähler in L ist offenbar grösser als der entsprechende Nenner und somit besteht auch die Ungleichung (1) (zu beachten ist, dass $\gamma = 1$ ist). Wir erhalten demnach, dass $n = 3$ angenommen werden kann.

Nun ist hier

$$p \leqq \frac{r b \beta^{r-1}}{2\gamma}\left[\frac{4a\alpha^r}{\gamma^2 r^{\frac{r}{r-1}}\left(\frac{a\alpha^r}{b\beta^r}\right)^{\frac{2r-2}{r}}}\right]^n = \frac{4.15}{2}\left[\frac{4.2^4}{4^{\frac{4}{3}}\left(\frac{2^4}{15}\right)^{\frac{3}{2}}}\right]^3$$

$$= 30\,\frac{15^{\frac{9}{2}}}{2^8} < 30\,\frac{2^2\, 15^4}{2^8} = \frac{15^5}{2^5} < 24.000.$$

Die Anzahl der Proben kann aber sehr vermindert werden. Es folgt nämlich aus $x^4 - 15y^4 = 1$, dass für gewisse ganzzahlige u, v nur die folgenden Fälle sind möglich:

[3]) T. Nagell: L'analyse indeterminée de degré superieur (Mémorial des sc. math. fasc. XXXIX) S. 32—3, 54—5.

1)	$x^2 + 1 = u^4$,	$x^2 - 1 = 15 v^4$,	$y = uv$;
2)	$x^2 + 1 = 2u^4$,	$x^2 - 1 = 15.2^3.v^4$,	$y = 2uv$;
3)	$x^2 + 1 = 5u^4$,	$x^2 - 1 = 3v^4$,	$y = uv$;
4)	$x^2 + 1 = 2.5u^4$,	$x^2 - 1 = 2^3.3v^4$,	$y = 2uv$.

Es ist einleuchtend, dass der Fall 1) unmöglich ist. (Die Gleichung $p^2 - q^2 = 1$ ist nämlich in ganzen positiven Zahlen unmöglich). In allen anderen Fällen ergibt sich für z. B. $g = 3, 6, 12$, dass entweder

$$x + 1 = g v_1^4 < 24.10^3 \quad \text{oder} \quad x - 1 = g v_1^4 < 24.10^3,$$

wo v_1 eine gewisse ganze Zahl ist. Aus $v_1^4 < 8.10^3$ ergibt sich, dass $v_1 \leqq 9$. Es genügt also nur neun Proben durchzuführen, welche auch dadurch erleichtert werden, dass $x+1$ und $x-1$ gleichzeitig durch entsprechende Biquadrate teilbar sind.

Es leuchtet ein, dass auch für die Form

$$x^n - (a^n - 1) y^n = b,$$

mit nicht zu grossen konstanten a und b, einen ähnlichen Satz beweisen kann.

Streszczenie.

W pracy swej [1]) dowiódł Tartakowski, że wszystkie równania nieoznaczone formy $x^4 - \rho y^4 = 1$, gdzie ρ jest liczbą całkowitą dodatnią, nie będącą kwadratem żadnej liczby całkowitej, posiadają, prócz w przypadku $\rho = 15$, conajwyżej jedno nietrywialne rozwiązanie (t. zn. $y \neq 0$). W przypadku $x^4 - 15y^4 = 1$ istnieje rozwiązanie $x = \pm 2$, $y = \pm 1$. Tartakowski nie zdołał jednak dowieść, że równanie to nie posiada więcej rozwiązań. W nocie niniejszej dowodzimy właśnie tego twierdzenia, przyczem metoda nasza daje się rozciągnąć również na przypadek ogólniejszy np. na równania kształtu $x^n - (a^n - 1) y^n = b$, gdzie a i b są względnie nieduże liczby.