D'après (2) nous avons alors

$$b_{c_1} b_{c_2} \dots b_{c_{n_k}} \geqslant \frac{(1+\alpha)^{\frac{n_k}{g}+n_k\alpha}}{(g+\alpha)^{n_k}} = \frac{1}{g^{n_k}}\left[\frac{(1+\alpha)^{1+g\alpha}}{\left(1+\frac{\alpha}{g}\right)^{g}}\right]^{\frac{n_k}{g}}$$

$$> \frac{1}{g^{n_k}}\left[\frac{1+\alpha}{\left(1+\frac{\alpha}{g}\right)^{g(1-\alpha)}}\right]^{\frac{n_k}{g}} > \frac{1}{g^{n_k}}\left[\frac{1+\alpha}{e^{\alpha(1-\alpha)}}\right]^{\frac{n_k}{g}}$$

$$= \frac{1}{g^{n_k}}\left[\frac{e^{\log(1+\alpha)}}{e^{\alpha(1-\alpha)}}\right]^{\frac{n_k}{g}} > \frac{1}{g^{n_k}}\left[\frac{e^{\alpha\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}}{e^{\alpha(1-\alpha)}}\right]^{\frac{n_k}{g}} = \frac{1}{g^{n_k}} e^{\frac{\alpha^2}{2g}n_k},$$

donc

$$g^{n_k} A_{n_k} > \frac{2g-3}{4(g^2-1)} e^{\frac{\alpha^2}{2g}},$$

ce qui donne $\lim\limits_{k\to\infty} g^{n_k} A_{n_k} = \infty$ pour tout nombre x de l'ensemble E et prouve qu'il n'existe pour chaque tel nombre une dérivèe finie de la fonction $f(x)$. D'après le théorème de Lebesgue on en conclut que l'ensemble E est de mesure nulle, c. q. f. d.

Streszczenie.

E. Borel dowiódł twierdzenia, że przy rozwijaniu liczb rzeczywistych na ułamki nieskończone przy (dowolnej danej > 1) zasadzie g, prawie dla każdej liczby rzeczywistej (t. j. dla każdej z pominięciem zbioru liczb miary zero) każda z cyfr $0, 1, 2, \dots, g-1$ występuje (średnio) jednakowo często. Autor wyprowadza to twierdzenie ze znanego twierdzenia Lebesgue'a, że każda funkcja monotoniczna posiada wszędzie skończoną pochodną, z wyjątkiem pewnego zbioru miary zero.

Une équation fonctionnelle relative au problème de Dirichlet

(O pewnem równaniu funkcjonalnem dotyczącem zagadnienia Dirichleta)

par

B. Hostinský

1. Dans ses recherches sur la théorie de la diffusion Smoluchowski a montré que beaucoup de problèmes de ce genre se ramènent à la résolution de l'équation fonctionnelle

$$\Phi(x, y, u+v) = \int_a^b \Phi(x, z, u)\, \Phi(z, y, v)\, dz \tag{1}$$

que je propose d'appeller équation de Smoluchowski. Les problèmes fondamentaux sur la diffusion sont exprimés par des équations aux dérivées partielles du second ordre; pour ces problèmes l'équation de Smoluchowski semble de ne donner plus qu'une forme analytique nouvelle. Mais il y a de problèmes plus généraux qui ne se ramènent pas aux équations classiques de la diffusion; dans ces cas l'équation de Smoluchowski (1) ainsi que l'équation plus générale suivante établie par Chapman en 1928

$$\Phi(x, y, s, t) = \int_a^b \Phi(x, z, s, u)\, \Phi(z, y, u, t)\, dz \tag{2}$$

$$a < x < b, \quad a < y < b, \quad s < u < t.$$

servent de base pour une théorie très générale de la diffusion [1]).

[1]) J'ai traité quelques unes proprietés de ces équations dans mon Cours à l'Institut Poincaré (voir Annales de l'Institut H. Poincaré, vol. III., 1932, p. 1—74).

2. Le sens de l'équation (1) peut être expliqué d'après Hadamard de la façon suivante: Considérons la transformation fonctionnelle linéaire

$$f_1(x) = \int_a^b \Phi(x, y, u) f(y)\, dy$$

qui fait correspondre à toute fonction donnée $f(x)$ une autre fonction $f_1(x)$. Le noyau $\Phi(x, y, u)$ de cette transformation dépend d'un paramètre u de sorte qu'à chaque valeur de u correspond une transformation bien déterminée. Opérons successivement deux transformations de ce type dont la première correspond à la valeur u du paramètre et la seconde à la valeur v. La transformation composée sera encore linéaire et elle aura la forme écrite plus haut; pour que son noyau soit égal à $\Phi(x, y, u+x)$, il faut que (1) ait lieu. L'équation (1) exprime donc ce qu'on pourrait appeler propriété de groupe de nos transformations linéaires [1]).

3. Les équations du type (1) ou (2) se présentent partout en Physique mathématique. Je me propose de montrer comment la recherche de la fonction de Green se ramène à une équation de ce genre.

Construisons une famille de surfaces fermées et convexes qui enveloppent le point O que nous regardons comme pôle des coordonnées polaires généralisées. Supposons que chaque surface de la famille soit caractérisée par une valeur d'un paramètre t; t est une variable continue et elle varie de telle sorte que la surface t_0 est toute entière contenue à l'intérieur de la surface t, si $t_0 < t$. Dans un certain domaine à trois dimensions D qui comprend O à son intérieur, une seule surface t passe par un point donné; la position d'un point dans D sera donc déterminée par la valeur de t (correpondant à la surface S qui passe par ce point) et par deux autres variables u, v coordonnées curvilignes sur S. Soit Σ une sphère auxiliaire de rayon un et définissons la position d'un point sur Σ par deux angles sphériques u et v (distance zénithale et azimut). Ce point sera l'image sphérique d'un seul point M sur S, car S est convexe; nous considérons u et v comme des coordonnées curvilignes de M sur S. Les trois quantités t, u, v (coordonnées polaires généralisées) déterminent la position d'un point dans D.

4. Soit S' la surface qui correspond à la valeur t' du paramètre, A et B deux points intérieurs à S' et $G(A, B)$ la fonction de Green qui correspond à S'. Elle est une fonction harmonique du point B, égale à zéro quand B vient sur S' et elle devient infinie comme $\frac{1}{4\pi r}$, quand la distance $r = AB$ devient infiniment petite. Une fonction harmonique $u(A)$, finie et continue avec ses dérivées partielles du premier ordre en tout point A situé à l'intérieur de S', est déterminée si l'on donne ses valeurs $u(M)$ sur S' et elle s'exprime par la formule classique

$$u(A) = \iint_{S'} \frac{\partial G(A, M)}{\partial n_M} u(M) d\sigma_M$$

où n_M est la normale intérieure de S' en M et $d\sigma_M$ l'élément de surface. Si $d\omega = \sin u\, du\, dv$ est l'élément de surface sur Σ, le rapport $\frac{d\sigma_M}{d\omega}$ est une quantité positive (qui dépend en général de t') et des coordonnées u, v de M sur S', et la formule précédente peut s'écrire

$$u(A) = \iint_{\Sigma} F(A, M)\, d\omega\,.$$

avec

$$F(A, M) = \frac{\partial G(A, M)}{\partial n_M} \cdot \frac{d\sigma_M}{d\omega}\,.$$

F est une fonction uniforme des points A, M; si t est la valeur du paramètre t qui correspond à A, il faut que $t < t'$. n_M est la normale de la surface S' qui passe par M.

Soient maintenant données trois surfaces de la famille qui correspondent respectivement aux valeurs t_0, t_1, t_2 du paramètre t et supposons que $t_0 < t_1 < t_2$ (la première surface est à l'intérieur de la seconde et celle ci à l'intérieur de la troisième). Choisissons sur t_0 un point M_0. La fonction harmonique $u(M_0)$ qui prend sur t_2 les valeurs données $u(M_2)$ peut être calculée de deux manières différentes: ou bien on calcule directement à partir des valeurs données sur t_2 ce qui donne

$$u(M_0) = \iint_{\Sigma} F(M_0, M_2)\, u(M_2)\, d\omega$$

ou bien on emploie cette formule pour calculer d'abord u sur t_1 (M_1 désigne un point sur t_1).

$$u(M_1) = \iint_{\Sigma} F(M_1, M_2)\, u(M_2)\, d\omega$$

[1]) L'équation (2) admet une interprétation analogue; le noyau de la transformation dépend ici de deux paramètres s et t.

pour en déduire $u(M_0)$ par la formule suivante où $d\omega'$ désigne l'aire de l'image sphérique d'un élément de surface pris sur t_1:

$$u(M_0)=\int\int_{\Sigma} F(M_0,\ M_1)\,u(M_1)\,d\omega'$$

$$=\int\int_{\Sigma}\int\int_{\Sigma} F(M_0,\ M_1)\,F(M_1,\ M_2)\,u(M_1)\,d\omega' d\omega\,.$$

Rapprochons les deux formules pour $u(M_0)$. $u(M_1)$ étant une fonction arbitraire il faut que

$$F(M_0,\ M_2)=\int\int_{\Sigma} F(M_0,\ M_1)\,F(M_1,\ M_2)\,d\omega'.$$

Pour mettre cette équation sous une forme voisine de (2) désignons par $(t_i,\ u_i,\ v_i)$ les coordonnées du point M_i pris sur t_i $(i=0,1,2)$ et posons

$$\frac{\partial G(M_0,\ M_1)}{\partial n_{M_1}}\frac{d\sigma_{M_1}}{d\omega'}=F(M_0,\ M_1)=f(t_0,\ u_0,\ v_0,\ t_1,\ u_1,\ v_1),$$

$$d\omega'=\sin u_2\,du_1\,dv_1\,.$$

L'équation prend alors la forme

$$f(t_0,\ u_0,\ v_0,\ t_2,\ u_2,\ v_2)$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(t_0,\ u_0,\ v_0,\ t_1,\ u_1,\ v_1)\,f(t_1,\ u_1,\ v_1,\ t_2,\ u_2,\ v_2)\sin u_1\,du_1\,dv_1 \tag{3}$$

Voilà l'équation fonctionnelle à laquelle satisfait la dérivée normale de la fonction de Green.

5. Pour résoudre l'équation (3) on peut employer la méthode que j'ai appliquée dans un travail antérieur [1]) aux équations (1) et (2). La propriété de groupe (voir n⁰ 2) montre que, pour obtenir une solution de (1) ou de (2) il suffit d'intégrer une transformation fonctionnelle linéaire [2]). Soit T_u une transformation infinitésimale (c'est à dire qu'elle fait correspondre à une fonction $f(x)$ une autre fonction $f_1(x)$ qui en diffère infiniment peu); nous supposons que T_u dépend d'un paramètre u qui varie entre les limites s et t $(s<t)$. Divisons cet intervalle en n parties égales de longueur h; une transformation infinitésimale est attachée ainsi à chaque point de division. Opérons successivement les transformations qui correspondent aux points

$$s,\ s+h,\ s+2h,\ .\ .\ .\ s+(n-1)h$$

et faisons ensuite croître n indéfiniment. La transformation composée tend vers une transformation composée bien déterminée, son noyau dépend de quatre variables x, y, s, t et il donne une solution de (1) ou de (2).

L'application de cette méthode à l'équation (3) conduit au résultat suivant: Une fonction $\varphi(t_0,\ u_0,\ v_0,\ u_1,\ v_1)$ de cinq variables étant donnée on peut construire une fonction $f(t_0,\ u_0,\ v_0,\ t_1,\ u_1,\ v_1)$ qui satisfait à l'équation (3) et telle que (pour $t_0<t_1$)

$$\lim_{t_1=t_0}\frac{\partial f(t_0,\ u_0,\ v_0,\ t_1,\ u_1,\ v_1)}{\partial t_1}=\varphi(t_0,\ u_0,\ v_0,\ u_1,\ v_1)$$

6. Nons avons rappelé (voir n⁰ 1) que, dans des cas particuliers, les fonctions qui satisfont à (1) ou à (2) vérifient en même temps une équation aux dérivées partielles. Il serait intéressant de rechercher si la dérivée normale de la fonction de Green qui satisfait à l'équation (3), satisfait en même temps (du moins pour des surfaces t de forme particulière) à une équation aux dérivées partielles.

---

[1]) B. Hostinský: Sur une équation fonctionnelle de la théorie des probabilités. (Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Masaryk n⁰ 156; Brno, 1932

[2]) J'ai proposé d'introduire cette notion d'intégrale d'une transformation fonctionnelle linéaire en étendant la notion de l'intégrale d'une substitution linéaire introduite par Volterra en 1887.