wo

$$f^{(1)}=t^{\frac{p-1}{2}}-1,\quad f^{(2)}=t^{\frac{p-1}{2}}+1;\quad f_1^{(1)}=(t+1)^{\frac{p-1}{2}}-1;\quad f_1^{(2)}=(t+1)^{\frac{p-1}{2}}+1.$$

und $R(f^{(i)}, f^{(j)})$ die entsprechende Resultante bezeichnet. Da für $p \geqq 7$ für mindestens zwei quadratische Reste, resp. Nichtreste, ein Rest oder Nichtrest nachfolgt [17]), so haben die Polynome

$$(f^{(i)}(t),\quad f_1^{(j)}(t)\qquad i=1,2;\quad j=1,2,$$

(mod p) mindestens zwei gemeinsame Wurzeln. Dem Hilfssatze 11 gemäss ist demnach, jeder Faktor der rechten Seite von (2), durch p^2 teilbar.

Anmerkung: Bachmann [18]) S. 57—9 hat bewiesen, dass im Falle, wenn $x^p+y^p+z^p=0$ in ganzen, durch die Primzahl p nicht teilbaren Zahlen lösbar ist, die zyklische Determinante (1) durch p^3 teilbar sein muss.

Streszczenie.

W niniejszej pracy staramy się teorję wielkiego zagadnienia Fermata, stworzoną przez Furtwänglera, Kummera, Mirimanoffa i Kapferera, zastosować do ogólnego równania $x^n+y^n=cz^n$. W ten sposób teorja zagadnienia Fermata wychodzi z ram teorji odosobnionego zagadnienia i staje się podstawą teorji wyższych stopni.

W końcu I-ej części dowodzimy, że równanie $x^p+y^p+z^p=0$ dla $p=6857$ jest niemożliwe w liczbach całkowitych niepodzielnych przez p, z czego wynika, że pierwsza część wielkiego zagadnienia Fermata jest udowodniona dla wszystkich wykładników <7000.

W II-ej części między innemi tak dalece uproszczamy teorję Wendta, że skomplikowane uzupełnienia do niej podane przez L. Dicksona stają się zbyteczne i jest ona bezpośrednio w praktyce stosowalna.

W końcu obalamy kryterjum Bachmanna rozwiązalności pierwszej części wielkiego zagadnienia Fermata.

17) s. z. B. E. Cahen: Theorie des nombres II (1924) S. 102—4.

18) a. a. O.

Sur une démonstration du théorème de M. Borel concernant les probabilités dénombrables

(O pewnym dowodzie twierdzenia Borela, dotyczącego prawdopodobieństw przeliczalnych.)

Par

Stanisław Ruziewicz

M. Emile Borel a démontré le théorème suivant concernant les probabilités dénombrables [1]):

$n(\gamma)$ désignant le nombre de chiffres égaux à γ parmi les n premiers chiffres du développement du nombre x à base g, on a pour tous les x réels sauf pour les nombres x formant un ensemble de mesure lebesguienne nulle, l'égalité

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(\gamma)}{n}=\frac{1}{g}.$$

Le but de la présente Note est démontrer comment on peut déduire ce théorème du théorème connu de M. H. Lebesgue d'après lequel toute fonction monotone a une dérivée finie partout, sauf peut être aux points formant un ensemble de mesure lebesguienne nulle.

Il suffit évidemment de prouver que pour tout nombre positif $\alpha<\frac{1}{2}$ l'ensemble E de tous les nombres de l'intervalle (0,1) pour lesquels on a pour un chiffre γ de la base g $(g \geqslant 2)$

1) *Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques.* Rend. Circ. Mat. Palermo XXVII, 1⁰ sem. 1909, pp. 247—271.

(1) $$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\frac{n(\gamma)}{n}-\frac{1}{g}\right)\geqslant 2\alpha$$

est de mesure nulle.

En effet, on a
$$n(0)+n(1)+\ldots+n(g-1)=n,$$
donc
$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{n(0)+n(1)+\ldots+n(g-1)}{n}=1,$$
ce qui donne
$$1\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{n(0)}{n}+\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{n(1)}{n}+\ldots+\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{n(g-1)}{n}.$$

Donc, si l'on a, pour un i, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,\frac{n(i)}{n}<\frac{1}{g}$ on a, pour un j, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,\frac{n(j)}{n}>\frac{1}{g}$, c'est-à-dire on a pour un nombre positif $\alpha<{}^1/_2$ la formule (1).

Pour démontrer le théorème, definissons pour $0\leqslant x\leqslant 1$ la fonction $f(x)$ comme il suit.

Soit α un nombre >0 et $<{}^1/_2$ pour lequel on a la formule (1). Si
$$x=\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{c_\mu}{g^\mu},$$
nous poserons
$$f(x)=a_{c_1}+b_{c_1}a_{c_2}+b_{c_1}b_{c_2}a_{c_3}+\ldots\ldots,$$
oú, pour $0\leqslant c\leqslant g-1$:

(2) $$b_c=\frac{1}{g+\alpha}\text{ pour } c\neq\gamma,\quad b_\gamma=\frac{1+\alpha}{g+\alpha},$$

(3) $$a_c=\sum_{i=0}^{c-1}b_i.$$

Comme un vérifie sans peine, la $f(x)$ est définie d'une façon univoque pour tout nombre x de l'intervalle (0,1) (indèpendamment du choix de l'un on l'autre de deux développements du nombre x, s'il y en a deux), continue et croissante.

Si $c_{n+1}<g-1$, nous avons
$$f\left(x+\frac{1}{2^{n+1}}\right)-f(x)=b_{c_1}b_{c_2}\ldots.b_{c_n}\left[(a_{c_n+1}-a_{c_n})+(b_{c_n+1}-b_{c_n})\,a_{c_{n+1}}\right.$$
$$\left.+(b_{c_n+1}-b_{c_n})\,b_{c_{n+1}}a_{c_{n+2}}+\ldots\right]$$

et si $c_{n+1}=g-1$, nous avons
$$f(x)-f\left(x-\frac{1}{2^{n+1}}\right)=b_{c_1}b_{c_2}\ldots b_{c_n}\left[(a_{c_n}-a_{c_n-1})+(b_{c_n}-b_{c_n-1})\,a_{c_{n+1}}\right.$$
$$\left.+(b_{c_n}-b_{c_n+1})\,b_{c_{n+1}}a_{c_{n+2}}+\ldots\right]$$

Or, d'aprés (2) et (3) on a
$$0\leqslant a_{c_\mu}\leqslant\frac{g-1+\alpha}{g+\alpha},\quad\frac{1}{g+\alpha}\leqslant b_{c_\mu}\leqslant\frac{1+\alpha}{g+\alpha},$$
$$a_{c_\mu+1}-a_{c_\mu}\geqq\frac{1}{g+\alpha},\quad b_{c_\mu+1}-b_{c_\mu}\geqslant-\frac{\alpha}{g+\alpha},$$
donc, en désignant par A_n la différence
$$f\left(x+\frac{1}{2^{n+1}}\right)-f(x),\quad\text{si } c_{n+1}<g-1,$$
respectivement
$$f(x)-f\left(x-\frac{1}{2^{n+1}}\right),\quad\text{si } c_{n+1}=g-1,$$
nous avons
$$A_n\geqslant b_{c_1}b_{c_2}\ldots b_{c_n}\left[\frac{1}{g+\alpha}-\frac{\alpha}{g+\alpha}\,\frac{g-1+\alpha}{g+\alpha}-\frac{\alpha}{g+\alpha}\,\frac{1+\alpha}{g+\alpha}\,\frac{g-1+\alpha}{g+\alpha}\right.$$
$$\left.-\frac{\alpha}{g+\alpha}\left(\frac{1+\alpha}{g+\alpha}\right)^2\frac{g-1+\alpha}{g+\alpha}-\ldots.\right]$$
$$=b_{c_1}b_{c_2}\ldots\,b_{c_n}\frac{(g-1)(1-\alpha)-\alpha^2}{(g-1)(g+\alpha)},$$
donc, d'après $0<\alpha<{}^1/_2$:
$$A_n>\frac{2g-3}{4(g^2-1)}\,b_{c_1}b_{c_2}\ldots b_{c_n}.$$

Or, il résulte de (1) qu'il existe pour tout nombre x de l'ensemble E une suite infinie de nombres naturels $\{n_k\}$, telle qu'on a pour tous indices k suffisamment grands:
$$n_k(\gamma)>\frac{n_k}{g}+n_k\,\alpha.$$

D'après (2) nous avons alors

$$b_{c_1} b_{c_2} \dots b_{c_{n_k}} \geqslant \frac{(1+\alpha)^{\frac{n_k}{g} + n_k \alpha}}{(g+\alpha)^{n_k}} = \frac{1}{g^{n_k}} \left[\frac{(1+\alpha)^{1+g\alpha}}{\left(1+\frac{\alpha}{g}\right)^{g}} \right]^{\frac{n_k}{g}}$$

$$> \frac{1}{g^{n_k}} \left[\frac{1+\alpha}{\left(1+\frac{\alpha}{g}\right)^{g(1-\alpha)}}\right]^{\frac{n_k}{g}} > \frac{1}{g^{n_k}}\left[\frac{1+\alpha}{e^{\alpha(1-\alpha)}}\right]^{\frac{n_k}{g}}$$

$$= \frac{1}{g^{n_k}}\left[\frac{e^{\log(1+\alpha)}}{e^{\alpha(1-\alpha)}}\right]^{\frac{n_k}{g}} > \frac{1}{g^{n_k}}\left[\frac{e^{\alpha\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}}{e^{\alpha(1-\alpha)}}\right]^{\frac{n_k}{g}} = \frac{1}{g^{n_k}} e^{\frac{\alpha^2}{2g} n_k},$$

donc

$$g^{n_k} A_{n_k} > \frac{2g-3}{4(g^2-1)} e^{\frac{\alpha^2}{2g}},$$

ce qui donne $\lim\limits_{k \to \infty} g^{n_k} A_{n_k} = \infty$ pour tout nombre x de l'ensemble E et prouve qu'il n'existe pour chaque tel nombre une dérivèe finie de la fonction $f(x)$. D'après le théorème de Lebesgue on en conclut que l'ensemble E est de mesure nulle, c. q. f. d.

Streszczenie.

E. Borel dowiódł twierdzenia, że przy rozwijaniu liczb rzeczywistych na ułamki nieskończone przy (dowolnej danej > 1) zasadzie g, prawie dla każdej liczby rzeczywistej (t. j. dla każdej z pominięciem zbioru liczb miary zero) każda z cyfr $0, 1, 2, \dots, g-1$ występuje (średnio) jednakowo często. Autor wyprowadza to twierdzenie ze znanego twierdzenia Lebesgue'a, że każda funkcja monotoniczna posiada wszędzie skończoną pochodną, z wyjątkiem pewnego zbioru miary zero,

---

Une équation fonctionnelle relative au problème de Dirichlet

(O pewnem równaniu funkcjonalnem dotyczącem zagadnienia Dirichleta)

par

B. Hostinský

1. Dans ses recherches sur la théorie de la diffusion Smoluchowski a montré que beaucoup de problèmes de ce genre se ramènent à la résolution de l'équation fonctionnelle

$$\Phi(x, y, u+v) = \int_a^b \Phi(x, z, u)\, \Phi(z, y, v)\, dz \tag{1}$$

que je propose d'appeller équation de Smoluchowski. Les problèmes fondamentaux sur la diffusion sont exprimés par des équations aux dérivées partielles du second ordre; pour ces problèmes l'équation de Smoluchowski semble de ne donner plus qu'une forme analytique nouvelle. Mais il y a de problèmes plus généraux qui ne se ramènent pas aux équations classiques de la diffusion; dans ces cas l'équation de Smoluchowski (1) ainsi que l'équation plus générale suivante établie par Chapman en 1928

$$\Phi(x, y, s, t) = \int_a^b \Phi(x, z, s, u)\, \Phi(z, y, u, t)\, dz \tag{2}$$

$$a < x < b, \quad a < y < b, \quad s < u < t.$$

servent de base pour une théorie très générale de la diffusion [1]).

[1]) J'ai traité quelques unes proprietés de ces équations dans mon Cours à l'Institut Poincaré (voir Annales de l'Institut H. Poincaré, vol. III., 1932, p. 1—74).