Deux cas sont possibles: ou bien on a identiquement

(13) $$f'(\varphi) = 0$$

ou bien cette indentité n'a pas lieu. Dans le premier cas nous aurons en vertu de (12_a):

(14) $$\bar f'(\varphi) = 0$$

(car $f > 0$, $\bar f > 0$) et par conséquent

(15) $$f = \text{Constans}, \quad \bar f = \text{Constans}$$

et nous aurons enfin d'après (10) et (5')

(16) $$\varrho(\varphi) = \text{Constans}.$$

Supposons maintenant que l'identité (13) ne subsiste pas. Les fonctions f et $\bar f$ possédant, par hypothèse, les dérivées continues de second ordre on en déduit que $\varrho(\varphi)$ possède la dérivée du premier ordre. On peut donc différentier les deux membres de la relation (12_a) et on obtient

(17) $$\bar f'^2 + \bar f \bar f'' = \varrho(f'^2 + f f'') + \varrho' f f'.$$

De (12_b) et (17) il résulte que

(18) $$\varrho' f f' = 0.$$

Comme $f' \neq 0$ on en déduit

(19) $$\varrho'(\varphi) = 0$$

et de là résulte (16). La fonction $\varrho(x, dx)$ étant homogène par rapport à dx, on voit que (16) implique la relation (7), c. q. f. d.

Contribution à la théorie des equations de Frenet dans l'espace riemannien à n dimensions

(Przyczynek do teorji równań Freneta w przestrzeni riemannowskiej o n wymiarach)

Par

A. Hoborski et S. Gołąb

Si, dans l'espace riemannien à n dimensions V_n, est donnée une courbe C sous la forme paramétrique

(1) $$x^i = x^i(s) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

où s désigne l'arc de la courbe, alors on peut établir des équations formant une généralisation des équations classiques de Frenet[1]). Elles ont la forme

(2) $$D\underset{j}{t} = -\underset{j-1}{k}\,\underset{j-1}{t} + \underset{j}{k}\,\underset{j+1}{t} \qquad \begin{bmatrix} j = 1, \ldots, n \\ \underset{0}{k} = \underset{n}{k} = 0 \end{bmatrix}$$

où D désigne le symbole de la dérivation covariante par rapport au paramètre s et $\underset{1}{t}$ désigne le vecteur de longueur unité tangent à la courbe:

(3) $$\underset{1}{t}^i = \frac{dx^i}{ds} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Les vecteurs $\underset{2}{t}, \ldots, \underset{n}{t}$ sont parfaitement detérminés au moyen de la dérivation covariante ainsi que par les conditions de la normalité et orthogonalité des vecteurs $\underset{j}{t}$ et de positivité des courbures $\underset{1}{k}, \underset{2}{k}, \ldots, \underset{n-1}{k}$.

Les équations (2) sont valables—comme on dit fréquemment—dans le cas général, c.-à-d. lorsque les dérivations covariantes succéssives des vecteurs $\underset{j}{t}$

[1]) Cf. par exemple D. J. Struik, Grundzüge der mehrdimensionalen Differentialgeometrie, Berlin 1922, p. 76.

conduisent aux vecteurs indépendents des vecteurs précédents et finissent par fournir un n-èdre des vecteurs indépendants attachés au chaque point de la courbe C.

Mais il peut arriver qu'il existe un nombre naturel $m\,(<n)$ tel que $D t_m$ s'exprime linéairement par les vecteurs

$$t_1,\ t_2, \ldots,\ t_m \tag{4}$$

et on obtient alors au lieu de (2) le système de m équations

$$D t_j = -k_{j-1} t_{j-1} + k_j t_{j+1} \qquad \begin{bmatrix} j = 1, \ldots, m \\ k_0 = k_m = 0 \end{bmatrix}. \tag{2*}$$

Le but de la présente note est de montrer que l'on *peut dans ces cas spécials déterminer les vecteurs*

$$t_{m+1},\ t_{m+2}, \ldots,\ t_n \tag{5}$$

(d'une façon *non* univoque, le cas $m = n-1$ excepté) *et cela d'une telle manière que les vecteurs*

$$t_1,\ t_2, \ldots,\ t_m,\ t_{m+1}, \ldots,\ t_n \tag{6}$$

possèdent la longueur égale à un, qu'ils soient mutuellement orthogonaux et que les équations (2) *soient vérifiées sous l'hypothèse complémentaire*

$$k_{m+1} = k_{m+2} = \ldots = k_n = 0. \tag{7}$$

Démonstration. Supposons que la dérivée $D t_m$ s'exprime linéairement par les vecteurs $t_1, \ldots, t_m$ (elle possède alors la direction du vecteur t_{m-1}). Les vecteurs (5) ne peuvent pas être alors obtenus par la dérivation covariante. Choisissons sur la courbe C un point fixe $s = s_0$ et complétons en ce point le système $\Sigma_1 \{t_1(s_0), \ldots, t_m(s_0)\}$ par un système de vecteurs $\Sigma_2 \{t_{m+1}(s_0), \ldots, t_n(s_0)\}$ de façon à obtenir un n-èdre formé par des vecteurs orthogonaux et unitaires. Ceci est possible pour $m < n-1$ d'une infinité de manières et pour $m = n-1$ de deux manières différentes. Désignons par (5) le système des vecteurs le long de la courbe C obtenus par le déplacement parallèle des vecteurs Σ_2 le long de C. Si nous adoptons les relations (7), les équations (2) seront vérifiées pour $j = m+1, \ldots, n$. Il reste à prouver que le n-èdre obtenu par les systèmes $(4)+(5)$ se compose des vecteurs unitaires, indépendants et mutuellement orthogonaux. Or les vecteurs du système (4) sont, par definition,

unitaires. Les vecteurs du systeme (5) possèdent la longueur égale à un parce qu'ils ont été ainsi déterminés dans le système Σ_2 et cette propriété est invariante par rapport aux déplacements parallèles. L'indépendance du système $(4)+(5)$ résultera de l'orthogonalité. Les vecteurs du système (4) étant mutuellement orthogonaux ainsi que ceux du système (5) (les déplacements parallèles consérvent l'orthogonalité) il suffit de démontrer que chaque vecteur du système (5) est perpendiculaire à chaque vecteur du système (4). Désignons à cet effet par

$$t'_1,\ t'_2, \ldots,\ t'_m \tag{8}$$

le système de vecteurs le long de C obtenus par le déplacement parallèle le long de C des vecteurs respectifs du système Σ_1. Nous affirmons que chaque vecteur du système (8) dépend linéairement des vecteurs du système (4). Soit en effet t'_j un vecteur du système (8). Afin de prouver l'existence de m fonctions du paramètre s:

$$\overset{k}{\alpha}_j(s) \qquad (k = 1, \ldots, m) \tag{9}$$

pour lesquelles on a

$$t'_j = \sum_{k=1}^{m} \overset{k}{\alpha}_j(s)\, t_k \tag{10}$$

il suffit d'établir l'existence de fonctions (9) vérifiant des relations obtenues par la dérivation covariante de deux membres de (10) qui ont la forme (cf. la définition du système (8)):

$$0 = \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{d\overset{k}{\alpha}_j}{ds} t_k + \overset{k}{\alpha}_j D t_k \right). \tag{11}$$

En vertu (2*) les relations (11) prennent la forme suivante

$$\sum_{k=1}^{m} \left(t_k \frac{d\overset{k}{\alpha}_j}{ds} + \overset{k}{\alpha}_j(s)\, [k_k t_{k+1} - k_{k-1} t_{k-1}] \right) = 0\,. \tag{12}$$

Le premier membre de cette relation contient exclusivement les vecteurs du système (4) qui sont linéairement indépendants. De là résultent les équations

$$\frac{d\overset{k}{\alpha}_j}{ds} + k_{k-1}(s)\, \overset{k-1}{\alpha}_j(s) - k_k(s)\, \overset{k+1}{\alpha}_j(s) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m) \tag{13}$$

ce que nous pouvons écrire sous la forme

$$\frac{d\overset{k}{\alpha}}{ds} = \sum_{i=1}^{m} \underset{i}{\overset{k}{c}}(s)\,\overset{i}{\alpha} \qquad (k = 1, 2, \ldots, m). \tag{14}$$

Dans cette formule on a supprimé l'indice j et on a introduit des notations symétriques pour les coefficients $\underset{i}{\overset{k}{c}}$ qui s'expriment par la formule

$$\underset{i}{\overset{k}{c}}(s) = \delta_i^{k+1}\underset{k}{k}(s) - \delta_i^{k-1}\underset{k-1}{k}(s) \tag{15}$$

les δ_i^j étant les bien connus symboles de Kronecker. Nous observons que les coefficients $\underset{i}{\overset{k}{c}}$ ne dépendent pas de l'indice j qui a été suprimé dans les équations (14).

Les formules (14) présentent un système de m équations linéaires homogènes du premier ordre à m fonctions inconnues $\overset{k}{\alpha}$. Ce système possède une solution quelles que soient les valeurs initiales des fonctions inconnues. Considérons le système de solutions $\underset{i}{\overset{k}{\alpha}}(s)$ correspondant aux valeurs initiales

$$\underset{i}{\overset{k}{\alpha}}(s_0) = \delta_j^k. \tag{16}$$

Nous aurons [1])

$$\Delta(s) = \left|\underset{j}{\overset{k}{\alpha}}(s)\right| = \left|\underset{j}{\overset{k}{\alpha}}(s_0)\right| e^{\int_{s_0}^{s}\sum_{i=1}^{m}\underset{i}{\overset{i}{c}}(u)\,du}. \tag{17}$$

Or en vertu de (15) et de (16) on a respectivement $\underset{i}{\overset{i}{c}}(u) = 0$ et $\left|\underset{j}{\overset{k}{\alpha}}(s_0)\right| = 1$. Par conséquent $\Delta = 1$. Le système (10) admet donc une solution en $\underset{1}{t}, \ldots, \underset{m}{t}$. En désignant par $\underset{k}{\overset{j}{\beta}}$ le mineur corréspondant, dans le detérminant Δ, à l'élément $\underset{j}{\overset{k}{\alpha}}$ nous obtiendrons

$$\underset{k}{t} = \sum_{j=1}^{m}\underset{k}{\overset{j}{\beta}}\,\underset{j}{t'}. \tag{18}$$

Chaque vecteur du système (4) s'exprime donc linéairement par les vecteurs du système (8). Envisageons maintenant un vecteur quelconque du système (5). Il est perpendiculaire à chaque vecteur du système (8) et, par conséquent, à chaque vecteur du système (4), car chaque vecteur perpendiculaire à un certain nombre de vecteurs est aussi perpendiculaire à leur combinaison linéaire quelconque. Notre théorème est ainsi démontré.

[1]) Cf. p. ex. E. Kamke, Differentialgleichungen reeller Funktionen, Leipzig 1930, p. 172.

Recherches sur le mouvement de la Comète Wolf I

XII^e Partie

Perturbations, produites par Uranus pendant la période 1884 Semptembre 24.0 — 1918 Décembre 16.0.

Badania nad biegiem komety okresowej Wolfa I

Część XII

Perturbacje, wywołane przez Urana w biegu komety za okres 1884—1919

par

M. Kamieński.

1. On sait que les perturbations produites par Uranus n'ont pas en général une grande influence sur le mouvement des Comètes appartenantes au groupe de Jupiter, surtout si l'aphélie de ces Comètes ne dépasse pas de beaucoup l'orbite de Jupiter. Cette influence devient encore moins sensible lorsque l'aphélie d'une telle Comète se trouve à l'intérieur de l'orbite de Jupiter. Par conséquent on n'en tient pas compte, non seulement quand il s'agit d'une seule apparition de la Comète, mais parfois même pour l'élaboration des liaisons de plusieurs retours de la Comète au Soleil. C'est ainsi qu'ont procédé E. Asten et plus tard O. Backlund dans leurs travaux bien connus concernant le mouvement de la Comète d'Encke. Cependent ce procédé ne peut pas être considéré comme tout à fait juste, surtout lorsque Uranus se trouve dans la partie de son orbite, située dans le voisinage de l'aphélie de l'orbite cométaire. Dans ce cas les perturbations atteignent des valeurs relativement considérables, et il faut les prendre en considération au moins lorsqu'il s'agit de l'étude de plusieurs retours de la Comète au Soleil.

2. C'est précisement le cas qui s'est présenté dans mes recherches concernant la liaison de 6 retours de la Comète Wolf I au Soleil durant la période 1884—1919. Pendant sa première révolution (1884—1891) la Comète