Contribution à un théorème de M. M. S. Knebelman[1])

(Przyczynek do twierdzenia M. S. Knebelmana)

St. Gołąb (Kraków)

La longueur d'un vecteur v est définie dans la géométrie de Riemann d'une façon univoque. Il n'en est pas ainsi dans la géométrie de Finsler[2]) lorsque nous adoptons le point de vue de M. Berwald[3]), c.-à-d. lorsque nous considérons comme éléments de cette géométrie non pas des points (x), mais des systèmes formés par les réunions de points et de directions (x, dx), appelés éléments linéaires. La longueur d'un vecteur v issu du point x dépendra alors. en général, aussi du choix de l'élément dx c.-à-d., selon la terminologie de M. E. Cartan[4]), de l'élément d'appui.

Si

$$F(x,\ dx) = F(x^1, \ldots, x^n;\ dx^1, \ldots, dx^n) \tag{1}$$

est fonction servant de base à la métrique de Finsler, alors on en peut déduire au moyen de l'équation

$$g_{ij}(x,\ dx) = \tfrac{1}{2}\,\frac{\partial^2 F^2}{\partial\, dx^i\, \partial\, dx^j} \tag{2}$$

[1]) M. S. Knebelman, Conformal geometry of generalized metric spaces, Proc. Nat. Ac. Sc. 15 (1929), 376—379.

[2]) P. Finsler, Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen, Dissertation Göttingen (1918).

[3]) L. Berwald, Untersuchung über die Krümmung allgemeiner metrischer Räume, Math. Zeitschr. 25 (1926), 40—73.

[4]) E. Cartan, Sur les espaces de Finsler, C. R. 196 (1933), 582—586.

le tenseur métrique qui est, en général, fonction du point et de l'élément d'appui. La longueur d'un vecteur $\boldsymbol{v}$ issu du point x, calculée par rapport à l'élément d'appui dx s'exprime alors par la formule

$$|\boldsymbol{v}|_{dx} = g_{ij}(x,\ dx)\ v^i v^j. \tag{3}$$

La longueur „absolue" du vecteur $\boldsymbol{v}$ désignée dans la suite par $|\boldsymbol{v}|$ est définie par la formule

$$|\boldsymbol{v}| = g_{ij}(x,\ \boldsymbol{v})\ v^i v^j = F(x,\ \boldsymbol{v}). \tag{4}$$

Supposons que deux espaces de Finsler sont transformés l'un sur l'autre de façon que les longueurs des vecteurs ayant la même origine soumis à cette transformation se multiplient par un facteur commun.

Or deux sortes (espèces) d'hypothèses se présenteront: les unes dans le cas des longueurs rapportées aux éléments d'appui arbitraires, les autres dans le cas des longueurs absolues. Les dernières hypothèses ne sont pas plus générales que les premières contrairement à ce qui pourrait paraître à première vue. Voici la forme analytique de la première hypothèse

$$\bar{g}_{ij}(x,\ dx)\ v^i v^j = \varrho(x,\ dx)\ g_{ij}(x,\ dx)\ v^i v^j$$

valable pour tous les v^i et tous les dx. De la, en raison de la symétrie des indices i et j, nous avons:

$$\bar{g}_{ij}(x,\ dx) = \varrho(x,\ dx)\ g_{ij}(x,\ dx). \tag{5}$$

L'hypothèse de la deuxième espèce suppose qu'on a

$$\bar{F}(x,\ \boldsymbol{v}) = \varrho(x)\,F(x,\ \boldsymbol{v}). \tag{6}$$

Or le théorème de M. Knebelman (l. c.) affirme que le facteur ϱ dans la formule (5) ne dépend pas de l'élément d'appui dx et qu'il est, par conséquent, fonction de la seule variable x. Il en résulte qu'aussi dans ce cas a lieu la formule (6). La démonstration de M. Knebelman est très simple et courte. Elle suppose cependant que les fonctions g_{ij} et $\bar{g}_{ij}$ possèdent des dérivées partielles continues calculées par rapport aux variables dx^i et se base sur ce que le changement de l'ordre de la dérivation est alors sans effet sur le résultat final.

Je démontre dans la présente note la relation

$$\varrho(x,\ dx) = \varrho(x) \tag{7}$$

en supposant uniquement que les fonctions g_{ij} et $\bar{g}_{ij}$ sont continues.

On s'assura sans peine qu'il suffit de donner la démonstration dans le cas où les deux espaces transformés l'un sur l'autre sont à deux dimensions. Posons pour abréger

$$\begin{cases} F(x;\ \cos\varphi,\ \sin\varphi) = f(\varphi), & \bar{F}(x;\ \cos\varphi,\ \sin\varphi) = \bar{f}(\varphi), \\ \varrho(x;\ \cos\varphi,\ \sin\varphi) = \varrho(\varphi). \end{cases} \tag{8}$$

Par une substitution convenable nous obtenons de la relation (5) relation:

$$\bar{g}_{ij}(\varphi) = \varrho(\varphi)\ g_{ij}(\varphi). \tag{5'}$$

En raison de (8) les fonctions g_{ij} et $\bar{g}_{ij}$ s'expriment au moyen des fonctions $f(\varphi)$ et $\bar{f}(\varphi)$. En effet, en s'appuyant sur les relations déduites de la formule d'Euler

$$p\frac{\partial F}{\partial p} + q\frac{\partial F}{\partial q} = F(p,\ q) \tag{9}$$

et des formules que l'on déduit de (9) par une seule dérivation (légitime dans nos hypothèses), nous obtiendrons:

$$\begin{cases} g_{11}(\varphi) = f^2 - 2f(\varphi)f'(\varphi)\sin\varphi\cos\varphi + (f'^2(\varphi) + f(\varphi)f''(\varphi))\sin^2\varphi, \\ g_{22}(\varphi) = f^2 + 2f(\varphi)f'(\varphi)\sin\varphi\cos\varphi + (f'^2(\varphi) + f(\varphi)f''(\varphi))\cos^2\varphi, \\ g_{12}(\varphi) = f(\varphi)f'(\varphi)\cos 2\varphi - \tfrac{1}{2}(f'^2(\varphi) + f(\varphi)f''(\varphi))\sin 2\varphi \end{cases} \tag{10}$$

ainsi que les formules analogues pour les $\bar{g}_{ij}$.

De (5') et (10) il s'ensuit

$$\bar{f}^2 - \bar{f}\bar{f}'\lambda + (\bar{f}'^2 + \bar{f}\bar{f}'')\frac{1-\mu}{2} = \varrho\left[f^2 - ff'\lambda + (f'^2 + ff'')\frac{1-\mu}{2}\right] \tag{11$_a$}$$

$$\bar{f}^2 + \bar{f}\bar{f}'\lambda + (\bar{f}'^2 + \bar{f}\bar{f}'')\frac{1+\mu}{2} = \varrho\left[f^2 + ff'\lambda + (f'^2 + ff'')\frac{1+\mu}{2}\right] \tag{11$_b$}$$

$$\bar{f}\bar{f}'\mu - \tfrac{1}{2}(\bar{f}'^2 + \bar{f}\bar{f}'')\lambda = \varrho[ff'\mu - \tfrac{1}{2}(f'^2 + ff'')\lambda] \tag{11$_c$}$$

où nous avons posé

$$\lambda = \sin 2\varphi, \qquad \mu = \cos 2\varphi.$$

Les équations (11_a) et (11_b) donnent

$$\bar{f}\bar{f}'\lambda + \tfrac{1}{2}(\bar{f}'^2 + \bar{f}\bar{f}'')\mu = \varrho[ff'\lambda + \tfrac{1}{2}(f'^2 + ff'')\mu]. \tag{11$_d$}$$

Multiplions l'équations (11_c) par μ et (11_d) par λ et ajoutons les équations ainsi obtenues membre à membre. Faisons la même opération en multipliant (11_c) par (-2λ) et (11_d) par (2μ). En raison de l'identité: $\lambda^2 + \mu^2 = 1$ nous obtiendrons les relations suivantes

$$\bar{f}\bar{f}' = \varrho ff' \tag{12$_a$}$$

$$\bar{f}'^2 + \bar{f}\bar{f}'' = \varrho(f'^2 + ff''). \tag{12$_b$}$$

Deux cas sont possibles: ou bien on a identiquement

$$f'(\varphi) = 0 \tag{13}$$

ou bien cette indentité n'a pas lieu. Dans le premier cas nous aurons en vertu de (12_a):

$$\bar{f}'(\varphi) = 0 \tag{14}$$

(car $f > 0$, $\bar{f} > 0$) et par conséquent

$$f = \text{Constans}, \quad \bar{f} = \text{Constans} \tag{15}$$

et nous aurons enfin d'après (10) et (5′)

$$\varrho(\varphi) = \text{Constans}. \tag{16}$$

Supposons maintenant que l'identité (13) ne subsiste pas. Les fonctions f et $\bar{f}$ possédant, par hypothèse, les dérivées continues de second ordre on en déduit que $\varrho(\varphi)$ possède la dérivée du premier ordre. On peut donc différentier les deux membres de la relation (12_a) et on obtient

$$\bar{f}'^2 + \bar{f}\bar{f}'' = \varrho\,(f'^2 + ff'') + \varrho' ff'. \tag{17}$$

De (12_b) et (17) il résulte que

$$\varrho' ff' = 0. \tag{18}$$

Comme $f' \neq 0$ on en déduit

$$\varrho'(\varphi) = 0 \tag{19}$$

et de là résulte (16). La fonction $\varrho(x, dx)$ étant homogène par rapport à dx, on voit que (16) implique la relation (7), c. q. f. d.

Contribution à la théorie des equations de Frenet dans l'espace riemannien à n dimensions

(Przyczynek do teorji równań Freneta w przestrzeni riemannowskiej o n wymiarach)

Par

A. Hoborski et S. Gołąb

Si, dans l'espace riemannien à n dimensions V_n, est donnée une courbe C sous la forme paramétrique

$$x^i = x^i(s) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

où s désigne l'arc de la courbe, alors on peut établir des équations formant une généralisation des équations classiques de F r e n e t[1]). Elles ont la forme

$$D\underset{j}{t} = -\underset{j-1}{k}\,\underset{j-1}{t} + \underset{j}{k}\,\underset{j+1}{t} \qquad \left[\begin{array}{l} j = 1, \ldots, n \\ \underset{0}{k} = \underset{n}{k} = 0 \end{array}\right] \tag{2}$$

où D désigne le symbole de la dérivation covariante par rapport au paramètre s et $\underset{1}{t}$ désigne le vecteur de longueur unité tangent à la courbe:

$$\underset{1}{t}^i = \frac{dx^i}{ds} \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{3}$$

Les vecteurs $\underset{2}{t}, \ldots, \underset{n}{t}$ sont parfaitement detérminés au moyen de la dérivation covariante ainsi que par les conditions de la normalité et orthogonalité des vecteurs $\underset{j}{t}$ et de positivité des courbures $\underset{1}{k}, \underset{2}{k}, \ldots, \underset{n-1}{k}$.

Les équations (2) sont valables—comme on dit fréquemment—dans le cas général, c.-à-d. lorsque les dérivations covariantes succéssives des vecteurs $\underset{j}{t}$

[1]) Cf. par exemple D. J. S t r u i k, Grundzüge der mehrdimensionalen Differentialgeometrie, Berlin 1922, p. 76.