Das Riemann-Stieltjessche Integral

(Całka Riemanna-Stieltjessa)

Von

J. Ridder in Groningen

Einleitung

Zur Definition des Riemann-Stieltjesschen Integrals einer für $a \leqq x \leqq b$ beschränkten Funktion $f(x)$ in bezug auf eine Funktion $\alpha(x)$ (die Determinante), welche in (a, b) von beschränkter Variation sei, bildet man die Summe,

$$\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j) \cdot \{\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})\}, \tag{1}$$

wobei $a_0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ und $x_{j-1} \leqq \xi_j \leqq x_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ ist. Wenn diese Summe, wie auch die Teilungspunkte von (a, b) und die Punkte (ξ_j) in den Teilintervallen gewählt sein mögen, immer denselben Grenzwert liefert, sobald die Länge des größten, zur Summe gehörigen Teilintervalls nach Null konvergiert, so definiert dieser Grenzwert das R.-S. Integral über (a, b): $\int\limits_a^b f(x)\, d\, \alpha(x)$.

Die Differenz $\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})$ soll in dieser Definition dieselbe Rolle haben wie die Differenz $x_j - x_{j-1}$ bei der Definition des gewöhnlichen Riemannschen Integrals. Das ist jedoch nur teilweise der Fall. Denn $\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})$ tritt zwar in die Summe (1) auf; man verlangt aber nicht, daß die größte der Differenzen $\{\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})\}$, sondern daß die größte der $\{x_j - x_{j-1}\}$ nach Null konvergiert. Man kann bemerken, daß das erste, wenn $\alpha(x)$ stetig ist, eine Folge ist des zweiten, während es bei unstetiger Determinante nich immer möglich ist Teilungen zu finden, bei welchen das größte der $\{\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})\}$ nach Null konvergiert. Jedoch lassen sich zu jedem positiven ε immer Teilungspunkte (x_j) wählen mit den Eigenschaften: 1^0 jeder Unstetigkeitspunkt x von $\alpha(x)$ mit

$$V(x+0) - V(x-0) \geqq \varepsilon,$$

wobei $V(x)$ die Totalvariation von $\alpha(x)$ in (a, x) ist, und $V(x+0) \equiv \lim\limits_{\substack{x' \to x \\ x' > x}} V(x')$; $V(x-0) \equiv \lim\limits_{\substack{x' \to x \\ x' < x}} V(x')$ [1]), kommt unter den Teilungspunkten vor; 2° für zwei aufeinander folgende Teilungspunkte $x_{j-1} < x_j$ wird

$$V(x_j - 0) - V(x_{j-1} + 0) < \varepsilon$$

sein. Wenn dann die Summen

$$(2)\quad \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j) \cdot \{\alpha(x_j - 0) - \alpha(x_j + 0)\} + \sum_{j=1}^{n+1} f(x_{j-1}) \cdot \{\alpha(x_j + 0) - \alpha(x_j - 0)\}$$

für $\varepsilon \to 0$ immer denselben Grenzwert liefern, so definiert dieser ein verallgemeinertes R.-S. Integral über (a, b), dessen Eigenschaften, wie sich im folgenden zeigen wird, aus den analogen Eigenschaften des R. Integrals herzuleiten oder direkt zu beweisen sind. Speziell bei monotoner Determinante $\alpha(x)$ liegt diese Änderung der Definition auf der Hand. Dieses Integral ist allgemeiner[14]) als eine von E. W. Hobson in seiner „Theory of functions" I (Third Ed. 1927) behandelte Generalisierung des R.-S. Integrals [2]). Es hat den Vorteil, daß verschiedene Sätze (§§ 3—7) einfacher formuliert werden können als bei Hobson, loc. cit.; speziell sind keine Bedingungen über die gegenseitige Lage der Unstetigkeitspunkte von $\alpha(x)$ und $f(x)$ aufzunehmen, wie das in einigen Sätzen beim ursprünglichen R.-S. Integral oder bei der eben genannten Generalisierung notwendig ist.

Der Paragraph 11 enthält eine geometrische Definition des verallgemeinerten R.-S. Integrals.

In einer kleinen Arbeit „Über das Riemannsche Integral" [3]) zeigten wir, wie es möglich ist, unter Anwendung von nach Jordan meßbaren Funktionen (man siehe die Definition 11 und nehme in ihr $\alpha(x) \equiv x$), eine Definition des R. Integrals zu geben, welche übereinstimmt mit der bekannten analytischen Definition des L. Integrals von Lebesgue. In § 13 findet man für das R.-S. Integral, wieder verallgemeinert in dem oben angedeuteten Umfang, eine dritte Definition, analog mit der eben genannten für das R. Integral, wobei an Stelle des gewöhnlichen Jordanschen Maßes das $\alpha(x)$-Maß nach Jordan benutzt wird und welche für $\alpha(x) \equiv x$ in die übereinstimmende Definition des R. Integrals übergeht.

[1]) In a und b sei $V(a-0) \equiv V(a)$; $V(b+0) \equiv V(b)$. — Auf gleiche Weise lassen sich $\alpha(a-0)$ und $\alpha(b+0)$ einführen.

[2]) Man siehe auch S. Pollard, Quart. J. of Math. 49 (1923), S. 74—138, ins bes. S. 96 u. 122.

[3]) Siehe: Nieuw Archief (Amsterdam) (2) 15: 4 (1928), S. 321—329.

Riemannsche Form der Definition.

§ 1. Definition 1. $\alpha(x)$ sei von beschränkter Variation im abgeschlossenen Intervall (a, b). Ein Punkt x von (a, b) heiße ein Doppelpunkt in bezug auf $\alpha(x)$, wenn $\alpha(x)$ unstetig ist in x; man denke sich in x zwei Punkte $x-0$ und $x+0$ zusammengefallen und definiere α in diesen Punkten wie folgt:

$$\alpha(x-0) = \lim_{\substack{x' \to x \\ x' < x}} \alpha(x') \quad \text{und} \quad \alpha(x+0) = \lim_{\substack{x' \to x \\ x' > x}} \alpha(x'). \text{ [4])}$$

Und man schreibe $\xi_1 < x - 0 < x + 0 < \xi_2$, wenn $\xi_1 < x < \xi_2$ ist; die Axiome der linearen Anordnung werden dadurch gültig bleiben im neuen Punktbereich, gebildet von den Stetigkeitspunkten von $\alpha(x)$ und den zu den Doppelpunkten von $\alpha(x)$ gehörenden Punkten $(x-0)$, $(x+0)$.

Definition 2. $f(x)$ sei definiert für $a \leqq a \leqq b$ und $\alpha(x)$ sei von beschränkter Variation in (a, b). Dann soll, wenn x ein Doppelpunkt in bezug auf $\alpha(x)$ in (a, b) ist, $f(x-0) = f(x+0) = f(x)$ sein.

Definition 3. Bei willkürlich positivem ε wird

$$a \text{ oder } a - 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b \text{ oder } b + 0$$

eine ε-Teilung von (a, b) sein in bezug auf eine Funktion $\alpha(x)$, von beschränkter Variation in (a, b), wenn: 1° die Teilungspunkte entweder Stetigkeitspunkte von $\alpha(x)$ oder (zu einem Doppelpunkt von $\alpha(x)$ gehörende) Punkte $(x-0)$ oder $(x+0)$ sind; 2° zu jedem Doppelpunkte x von $\alpha(x)$ mit

$$V(x+0) - V(x-0) \geqq \varepsilon,$$

wobei $V(x)$ die Totalvariation von $\alpha(x)$ über (a, x) darstellt, unter den Teilungspunkten zwei aufeinander folgende, x_j und x_{j+1}, zu finden sind mit $x = x - 0$ und $x_{j+1} = x + 0$; 3° für jedes Paar aufeinander folgender Teilungspunkte (x_k, x_{k+1}), welches nicht zu den unter 2° betrachteten Paaren gehört,

$$V(x_{k+1}) - V(x_k) < \varepsilon$$

ist.

Im folgenden werden in den Betrachtungen nur da Punkte $(x-0)$, $(x+0)$ zugelassen wo von ε-Teilungen (und ε-Summen) die Rede ist.

Definition 4. Zu der für $a \leqq x \leqq b$ endlichen Funktion $f(x)$ wird bei willkürlich positivem ε die Summe

$$\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j) \cdot \{\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})\} \quad \text{oder} \quad \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j) \cdot \delta_j \alpha(x)$$

[4]) Wenn a oder b Unstetigkeitspunkt von $\alpha(x)$ ist, so sei $\alpha(a-0) = \alpha(a)$ bzw. $\alpha(b+0) = \alpha(b)$. Wir bemerken, daß bei dieser Deutung die Symbole $\alpha(x-0)$, $\alpha(x+0)$ denselben Zahlenwert darstellen wie in der Einleitung.

eine ε-Summe über (a, b) in bezug auf die Determinante $\alpha(x)$ (von beschränkter Variation in (a, b)) sein, wenn die Teilungspunkte $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ eine ε-Teilung von (a, b) in bezug auf $\alpha(x)$ bilden und

$$x_{j-1} \leqq \xi_j \leqq x_j \, (j = 1, 2, \dots, n)$$

ist, während auf $f(x)$ die Definition 2 angewandt worden ist.

Definition 5. Die für $a \leqq x \leqq b$ beschränkte Funktion $f(x)$ besitzt über (a, b) ein (verallgemeinertes) Riemann-Stieltjessches Integral in bezug auf $\alpha(x)$, $\int_a^b f(x)\, d\alpha(x)$, wenn die zu $f(x)$, $\alpha(x)$ gehörenden ε-Summen über (a, b) nach einem festen Grenzwerte G konvergieren für $\varepsilon \to 0$. Es soll dann

$$\int_a^b f(x)\, d\,\alpha(x) = G$$

sein [5a]) [5b]).

Definition 6. Zu $f(x)$, endlich für $a \leqq x \leqq b$, wird bei willkürlich positivem ε die Summe

$$\overline{S} = \sum_{j=1}^{n} M_j' \cdot \delta_j\, \alpha(x) \tag{3}$$

[5a]) Die Klasse der ε-Summen ist umfassender als die der Summen (2) in der Einleitung. Mit Hilfe von Satz I sieht man jedoch leicht, daß beide Klassen zu demselben Integralbegriff führen.—Wenn wir im folgenden ohnemehr von einem R.-S. Integral sprechen, meinen wir immer ein Integral gemäß Definition 5.

[5b]) In einer Arbeit von Miss R. C. Young, Math. Ztschr. 35 (1932), S. 117 — 153 werden „vielwertige" Stieltjessche Integrale definiert. Dazu wird gefordert, daß die größte Intervalllänge („the norm") von Teilungen von (a, b) in endlich viele Intervalle nach Null konvergiert, wobei dann mittels zur Teilung gehörenden und von den Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ abhängigen Summen die Werte des Integrals von $f(x)$ in bezug auf $g(x)$ über (a, b) gefunden werden. Im Falle daß $g(x)$ von beschränkter Variation ist, ist es möglich die hier in Definition 3 eingeführten ε-Teilungen von (a, b) bei der Bildung jener Summen zugrunde zu legen. Dadurch wird dann die Vielwertigkeit det Integrals verringert und sehr wahrscheinlich ist es, daß die von Miss Young in § 5 ihrer Arbeit abgeleiteten Beziehungen zwischen den vielwertigen „inneren" Stieltjesschen Integralen und den „modifizierten" Stieltjesschen Integralen von Pollard (siehe Pollard, l. c. [3])) sich im Falle, daß $g(x)$ von beschränkter Variation ist, übertragen lassen auf die mit Hilfe von ε-Teilungen zu definierenden vielwertigen „inneren" Stieltjesschen Integrale und die verallgemeinerten R.-S. Integrale, die hier mittels Definition 5 eingeführt wurden. Übrigens kann man auf verschiedene Weisen ε-Teilungen und dabei gehörende Stieltjessche Integrale sowohl im Sinne der Youngschen wie im Sinne unserer Arbeit einführen auch dann, wenn $g(x)$ nicht notwendig von beschräakter Variation ist; die gegenseitigen Verhältnisse dieser beiden Definitionen wären dann jedesmal zu untersuchen (man vergleiche wieder § 5 der Arbeit von Miss Young). Wir gehen jedoch nicht näher darauf ein.

eine obere ε-Summe über (a, b) in bezug auf $\alpha(x)$ sein, wenn die Teilungspunkte (x_j) eine ε-Teilung von (a, b) bilden und

$$\begin{aligned} M_j' &= \text{obere Schranke } M_j \text{ von } f(\xi_j) \text{ ist für } x_{j-1} \leqq \xi_j \leqq x_j, \text{ im Falle } \delta_j\alpha(x) \geqq 0, \\ &= \text{untere Schranke } m_j \text{ von } f(\xi_j) \text{ ist für } x_{j-1} \leqq \xi_j \leqq x_j, \text{ im Falle } \delta_j\alpha(x) < 0 \text{ ist} \end{aligned}$$

$(j = 1, 2, \dots, n)$; auf $f(x)$ sei hierbei wieder die Deifinition 2 angewandt.

Die zugehörige untere ε-Summe über (a,b) in bezug auf $\alpha(x)$,

$$\underline{S} = \sum_{j=1}^{n} m_j' \cdot \delta_j\, \alpha(x) \tag{4}$$

enthält zu jedem $j = 1, 2, \dots, n$ eine Zahl

$$\begin{aligned} m_j' &= \text{untere Schranke } m_j \text{ von } f(\xi_j) \text{ für } x_{j-1} \leqq \xi_j \leqq x_j, \text{ wenn } \delta_j\alpha(x) \geqq 0, \\ &= \text{obere Schranke } M_j \text{ von } f(\xi_j) \text{ für } x_{j-1} \leqq \xi_j \leqq x_j, \text{ wenn } \delta_j\alpha(x) < 0 \text{ ist.} \end{aligned}$$

Satz I. Wenn $f(x)$ beschränkt ist für $a \leqq x \leqq b$, so nähern sich die oberen ε-Summen einem bestimmten Grenzwerte für $\varepsilon \to 0$; dasselbe gilt für die unteren ε-Summen.

Definition 7. Die in Satz I genannten Grenzwerte definieren das (verallgemeinerte) obere Darboux-Stieltjessche Integral, $\overline{\int_a^b} f(x)\, d\alpha(x)$, bzw. das (verallgemeinerte) untere D.-S. Integral, $\underline{\int_a^b} f(x)\, d\alpha(x)$ [6]).

Beweis des Satzes I. $V(x)$ sei die Totalvariation von $\alpha(x)$ über (a, x), $P(x)$ die positive und $N(x)$ die negative Totalvariation von $\alpha(x)$ über (a, x). Dann ist für die bei den ε-Teilungen in bezug auf $\alpha(x)$ zugelassenen Punkte x:

$$\alpha(x) = \alpha(a) + P(x) - N(x) \quad \text{und} \quad V(x) = P(x) + N(x); \tag{5}$$

dabei ist in jedem Punkt $x - 0$ $P(x-0) = \lim\limits_{\substack{x' \to x \\ x' < x}} P(x')$ und in jedem Punkte $x + 0$ $P(x+0) = \lim\limits_{\substack{x' \to x \\ x' > x}} P(x')$ gesetzt und sind die Werte von $N(x)$ und $V(x)$ in diesen Punkten auf analoge Weise definiert. Aus (5) und Definition 6 folgt:

$$\sum_{j=1}^{n} m_j \cdot \delta_j P - \sum_{j=1}^{n} M_j \cdot \delta_j N \leqq \underline{S} \leqq \overline{S} \leqq \sum_{j=1}^{n} M_j \cdot \delta_j P - \sum_{j=1}^{n} m_j \cdot \delta_j N, \tag{6}$$

wobei $\delta_j P = P(x_j) - P(x_{j-1})$ und $\delta N = N(x_j) - N(x_{j-1})$ ist $(j = 1, 2, \dots, n)$.

[6]) Man vergleiche Lebesgue, Leçons sur l'intégration (Deuxième Éd. 1928), S. 272.

Die Funktion $t = P(x)$ bildet die Punkte[7]) des abgeschlossenen Intervalls (a, b) der x-Achse auf die Punkte[7]) des abgeschlossenen Intervalls $[t_1 = P(a) = 0,\ t_2 = P(b)]$ der t-Achse ab, wenn man für jeden Stetigkeitspunkt x von $P(x)$ $t = P(x)$ zum Bildpunkt nimmt, jedem Unstetigkeitspunkte x' das abgeschlossene Intervall $[P(x'-0),\ P(x'+0)]$ auf der t-Achse hinzufügt. Ordnet man dem Punkte $t = P(x)$ den Funktionswert $f(x)$ zu, jedem Punkte des abgeschlossenen Intervalls $[P(x'-0),\ P(x'+0)]$ den Wert $f(x')$, so wird auf $[t_1, t_2]$ eine Funktion $\varphi(t)$ erhalten[8]) und die Summen

$$\sum_{j=1}^{n} M_j \cdot \delta_j P \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{n} m_j \cdot \delta_j P \tag{7}$$

konvergieren für $\varepsilon \to 0$ zum oberen Darbouxschen Integrale $\overline{\int_{t_1}^{t_2}} \varphi(t)\,dt$[9]) bzw. zum unteren Darbouxschen Integrale $\underline{\int_{t_1}^{t_2}} \varphi(t)\,dt$.

Auf dieselbe Weise läßt sich mit Hilfe von $u = N(x)$ das Intervall (a, b) auf das Intervall $[u_1 = N(a) = 0,\ u_2 = N(b)]$ einer u-Achse abbilden; $f(x)$ geht dabei in eine Funktion $\psi(u)$ in $[u_1, u_2]$ über und die Summen

$$\sum_{j=1}^{n} M_j \cdot \delta_j N \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{n} m_j \cdot \delta_j N$$

konvergieren für $\varepsilon \to 0$ zu $\overline{\int_{u_1}^{u_2}} \psi(u)\,du$ bzw. $\underline{\int_{u_1}^{u_2}} \psi(u)\,du$.

Aus (6) folgt somit

$$\underline{\int_{t_1}^{t_2}} \varphi(t)\,dt - \overline{\int_{u_1}^{u_2}} \psi(u)\,du \leq \lim_{\varepsilon\to 0} \genfrac{}{}{0pt}{}{\sup}{\inf} \bar{S} \leq \overline{\int_{t_1}^{t_2}} \varphi(t)\,dt - \underline{\int_{u_1}^{u_2}} \psi(u)\,du,$$

wobei auch $\underline{S}$ statt $\bar{S}$ geschrieben werden darf.

[7]) Es werden hiermit keine Punkte $(x-0)$, $(x+0)$; $(t-0)$, $(t+0)$ gemeint.

[8]) Man beachte, daß in den abzählbar vielen Punkten (t), welche mit Intervallen auf der x-Achse korrespondieren, in denen $\alpha(x)$ konstant ist, $\varphi(t)$ im allgemeinen nicht eindeutig sein wird.

[9]) $\overline{\int_{t_1}^{t_2}} \varphi(t)\,dt$ hat denselben Wert wie $\overline{\int_{t_1}^{t_2}} \varphi_1(t)\,dt$, wobei $\varphi_1(t)$ eine in (t_1, t_2) eindeutige Funktion ist, welche auf der Teilmenge, in deren Punkten $\varphi(t)$ eindeutig ist, mit dieser zusammenfällt und die in jedem Punkte, welcher mehr als einen φ-Wert zuläßt, gleich der oberen Schranke jener φ-Werte ist. Es gibt verschiedene ε-Teilungen von (a, b) in bezug

Die Differenz der beiden äußersten Glieder dieser Ungleichung ist gleich

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left\{ \left(\sum_{j=1}^{n} M_j \cdot \delta_j P - \sum_{j=1}^{n} m_j \cdot \delta_j N \right) - \left(\sum_{j=1}^{n} m_j \cdot \delta_j P - \sum_{j=1}^{n} M_j \cdot \delta_j N \right) \right\} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{j=1}^{n} \omega_j \cdot \delta_j V,$$

wobei $\omega_j = M_j - m_j$. Fügt man zwischen je zwei Teilungspunkten $(x_j = x - 0,\ x_{j+1} = x + 0)$ den Punkt x als neuen Teilungspunkt hinzu, so ändert sich die Summe $\sum_{(j)} \omega_j \cdot \delta_j V$ nicht; somit auch nicht ihr Grenzwert. Die Summen (3) und (4) bleiben dabei ebenfalls ungeändert.

Denken wir uns die neuen Teilungspunkte unter den (x_j) aufgenommen, so wird die Anzahl n der Glieder in den verschiedenen Summen im allgemeinen zugenommen sein (n') und es ist dann

$$\sum_{j=1}^{n'} \omega_j \cdot \delta_j V - (\bar{S} - \underline{S}) = \sum_{j=1}^{n'} \omega_j \cdot (\delta_j V - |\,\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})\,|). \tag{9}$$

Ist Ω die Oszillation von $f(x)$ im abgeschlossenen Intervall (a, b), so wird der nicht negative Ausdruck (9) höchstens gleich

$$\Omega \cdot \left(V(b) - \sum_{j=1}^{n'} |\,\alpha(x_j - \alpha(x_{j-1})\,| \right)$$

sein. Da jeder der Unstetigkeitspunkte von $\alpha(x)$ für genügend kleines ε zu

auf $\alpha(x)$, welche zu derselben Teilung von (t_1, t_2) führen; zwischen den beiden, zu dieser Teilung gehörenden oberen Summen für $\varphi_1(t)$:

$$\sum_{(j)} \mu_j (\tau_j - \tau_{j-1}) \quad \text{und} \quad \sum_{(j)} \mu_j^* (\tau_j - \tau_{j-1}), \tag{A}$$

wobei $\mu_j =$ obere Schranke von $\varphi_1(t)$ im abgeschlossenen Intervall (τ_{j-1}, τ_j) und $\mu_j^* =$ obere Schranke von $\varphi_1(t)$ im offenen Intervall (τ_{j-1}, τ_j), liegen die Summen $\left\{ \sum_{j=1}^{n} M_j \,.\, \delta_j P \right\}$, gehörend zu den verschiedenen, mit der Teilung von (t_1, t_2) korrespondierenden ε-Teilungen von (a, b). Dies bleibt der Fall, wenn bei der Einführung von M_j das zugehörige Intervall der ε-Teilung offen (also ohne Endpunkte) oder halboffen angenommen wird. Sowohl in diesen Fällen wie in dem des Textes folgt die Gleichheit von $\lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{j=1}^{n} M_j \,.\, \delta_j P$ und $\overline{\int_{t_1}^{t_2}} \varphi(t)\,dt$ daraus daß beide Summen (A) für $\varepsilon \to 0$ nach $\overline{\int_{t_2}^{t_1}} \varphi_1(t)\,dt$ konvergieren.

den Teilungspunkten gehört, findet man leicht, daß die letzte Summe $V(b)$ zum Grenzwert hat, falls ε nach Null konvergiert [10]). Dadurch muß

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(\overline{S}-\underline{S})=\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{j=1}^{n'}\omega_j\cdot\delta_j V \tag{10}$$
$$=\overline{\int_{t_1}^{t_2}}\varphi(t)\,dt-\underline{\int_{t_1}^{t_2}}\varphi(t)\,dt+\overline{\int_{u_1}^{u_2}}\psi(u)\,du-\underline{\int_{u_1}^{u_2}}\psi(u)\,du$$

sein.

Aus (8), denselben Ungleichungen mit $\underline{S}$ statt $\overline{S}$ und (10) folgt die Existenz von $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\overline{S}$ und $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\underline{S}$ und es ist

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\overline{S}=\overline{\int_{t_1}^{t_2}}\varphi(t)\,dt-\underline{\int_{u_1}^{u_2}}\psi(u)\,du \quad\text{und}\quad \lim_{\varepsilon\to 0}\underline{S}=\underline{\int_{t_1}^{t_2}}\varphi(t)\,dt-\overline{\int_{u_1}^{u_2}}\psi(u)\,du. \tag{11}$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Aus (11) und Definition 7 folgt weiter:

$$\overline{\int_a^b}f(x)\,d\alpha(x)=\overline{\int_a^b}f(x)\,dP(x)-\underline{\int_a^b}f(x)\,dN(x)\quad\text{und} \tag{12}$$
$$\underline{\int_a^b}f(x)\,d\alpha(x)=\underline{\int_a^b}f(x)\,dP(x)-\overline{\int_a^b}f(x)\,dN(x).$$

Satz II. Damit die beschränkte Funktion $f(x)$ über (a, b) in bezug auf die Determinante $\alpha(x)$ (von beschränkter Variation in (a,b)) integrierbar sei nach Riemann-Stieltjes, ist notwendig uud hinreichend, daß die oberen und unteren D.-S. Integrale (im Sinne der Definition 7) über (a, b) einander gleich seien. Ihr gemeinsamer Wert gibt dann $\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)$.

Der Beweis folgt in einfacher Weise aus Satz I und den Definitionen 4—7

Satz III. $f(x)$ sei beschränkt und $\alpha(x)$ von beschränkter Variation für $a\leqq x\leqq b$. Damit

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)$$

[10]) Siehe z. B. Lebesgue, l. c. [6]) S. 61.

existiere, ist notwendig und hinreichend, daß

$$\int_a^b f(x)\,dV(x)$$

existiere, wobei $V(x)$ die Totalvariation von $\alpha(x)$ über (a, x) darstellt.

Dies läßt sich ableiten aus der Tatsache, daß für $\varepsilon\to 0$ (9) nach Null konvergiert, auch wenn man die im Beweise des Satzes I neu hinzugefügten Teilungspunkte wieder fortläßt.

Satz IV. Wenn $\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)$ existiert, so existieren auch $\int_a^b f(x)\,dP(x)$ und $\int_a^b f(x)\,dN(x)$, wobei $P(x)$ und $N(x)$ die positive bzw. negative Totalvariation von $\alpha(x)$ über (a, x) darstellen, und es ist:

$$1^0\quad \int_a^b f(x)\,d\alpha(x)=\int_a^b f(x)\,dP(x)-\int_a^b f(x)\,dN(x);$$

und

$$2^0\quad \int_a^b f(x)\,dV(x)=\int_a^b f(x)\,dP(x)+\int_a^b f(x)\,dN(x).$$

Beweis. Die Existenz von $\int_a^b f(x)\,dP(x)$ und $\int_a^b f(x)\,dN(x)$ und 1^0 folgen unmittelbar aus (12). Nach Satz III existiert auch $\int_a^b f(x)\,dV(x)$. Schließlich folgt 2^0, da $V(x)=P(x)+N(x)$ ist, durch Anwendung der Definition 4 auf die Funktionen $f(x)$, $V(x)$ [11]).

§ 2. Bekanntlich läßt sich zu einer Funktion $\alpha(x)$, von beschränkter Variation in jedem endlichen Intervall (x_1, x_2), für die beschränkten Teilmen-

[11]) Auch läßt sich mit Hilfe der Definition 4 zeigen, daß

$$\int_a^b f(x)\,d[\alpha(x)+\beta(x)]=\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)+\int_a^b f(x)\,d\beta(x)$$

ist, sobald die Integrale des rechten Gliedes existieren und $\alpha(x)$ und $\beta(x)$ beide monoton nicht — abnehmend oder beide monoton nicht — zunehmend sein; $f(x)$ soll dabei wieder beschränkt sein für $a\leqq x\leqq b$.—Unter Anwendung von Satz V läßt sich sogar zeigen, daß diese Behauptung auch gültig bleibt, wenn $\alpha(x)$ und $\beta(x)$ nur von beschränkter Variation zu sein brauchen.

gen der x-Achse ein äußeres und ein inneres $\alpha(x)$-Maß definieren, die für $\alpha(x) \equiv x$ mit dem gewöhnlichen äußeren bzw. inneren Maße nach Lebesgue zusammenfallen; dabei wird das äußere Maß eines offenen Intervalls (ξ_1, ξ_2) gleich $\alpha(\xi_2 - 0) - \alpha(\xi_1 + 0)$ angenommen, wobei $\alpha(\xi + 0) \equiv \lim\limits_{\substack{x \to \xi \\ x > \xi}} \alpha(x)$ und $\alpha(\xi - 0) \equiv \lim\limits_{\substack{x \to \xi \\ x < \xi}} \alpha(x)$ sein soll. Ebenso und in analoger Weise lassen sich für alle beschränkten Teilmengen der x-Achse ein äußeres und ein inneres $\alpha(x)$-Maß einführen, die für $\alpha(x) \equiv x$ mit dem Jordanschen äußeren bzw. inneren Maße zusammenfallen; das äußere Maß eines offenen Intervalls ist dabei wieder wie soeben anzunehmen. Die erstgenannten Maße nennen wir äußere und innere $\alpha(x)$-Maße (L), die letztgenannten äußere und innere $\alpha(x)$-Maße (J). Eine in (a, b) liegende Menge E_x heißt $\alpha(x)$-meßbar nach Lebesgue bzw. Jordan, wenn ihre äußeren und inneren $V(x)$-Maße nach Lebesgue bzw. Jordan einander gleich sind; hierbei ist $V(x)$ die Totalvariation von $\alpha(x)$ über (a, x). Außerdem ist die Menge dann auch $P(x)$-meßbar und $N(x)$-meßbar nach Lebesgue bzw. Jordan, wobei $P(x)$ und $N(x)$ die positive bzw. negative Totalvariation von $\alpha(x)$ über (a, x) darstellen, und man hat, wenn $m_{\alpha(x)}$ das $\alpha(x)$-Maß nach Lebesgue bzw. Jordan der meßbaren Menge (d. h. den gemeinsamen Wert der zugehörigen äußeren und inneren Maße) andeutet:

$$(13) \qquad m_{\alpha(x)}(E_x) = m_{P(x)}(E_x) - m_{N(x)}(E_x) \quad \text{und} \quad m_{V(x)}(E_x) = m_{P(x)}(E_x) + m_{N(x)}(E_x)^{12}).$$

Satz V. $f(x)$ sei beschränkt und $\alpha(x)$ von beschränkter Variation im abgeschlossenen Intervall (a, b). Damit

$$\int_a^b f(x)\, d\,\alpha(x)$$

existiere, ist notwendig und hinreichend, daß die Menge derjenigen Unstetigkeitspunkte von $f(x)$, welche nicht gleichzeitig Unstetigkeitspunkte von $\alpha(x)$ sind, ein $V(x)$-Maß $(L) = 0$ habe.

Beweis. Für die Existenz des R.-S. Integrals von $f(x)$ nach $\alpha(x)$ ist nach Satz III notwendig und hinreichend die Existenz von $\int_a^b f(x)\, d\, V(x)$. Die Transformation $t = V(x)$ und ihre Umkehrung führen das letzte Integral und das Riemannsche Integral $\int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)\, dt$ (man siehe den Anfang des Beweises von Satz I und

[12]) Man vergleiche für die ganze Theorie z. B. Lebesgue, l. c.[6]), S. 277—281.

nehme dort $t = V(x)$ statt $t = P(x)$) ineinander über. Damit das Riemannsche Integral existiere, ist notwendig und hinreichend, daß die Menge derjenigen Unstetigkeitspunkte von $\varphi(t)$, welche nicht Bildpunkt eines der abzählbar vielen Unstetigkeitspunkte von $V(x)$ (oder was dasselbe bedeutet, von $\alpha(x)$) sind, ein Lebesguesches Maß Null habe[13]). Das Maß (L) dieser Menge ist jedoch gleich dem $V(x)$-Maße (L) ihrer Bildmenge. Daraus folgt der Satz fast unmittelbar.

Es wird in diesem Satze nicht gefordert, daß die Unstetigkeitspunkte von $f(x)$ von den Unstetigkeitspunkten von $\alpha(x)$ verschieden sind. Wenn z. B. $f(x)$ und $\alpha(x)$ beide nur in einem und demselben Punkte von (a, b) unstetig sind, so existiert dennoch das verallgemeinerte R.-S. Integral über (a, b)[14]); das R.-S. Integral in seiner nicht verallgemeinerten Form kann dann jedoch nie existieren.

Allgemeiner folgt aus dem vorigen Satze das

Korollar: $f(x)$ sei beschränkt und $\alpha(x)$ von beschränkter Variation im abgeschlossenen Intervall (a, b). Zur Existenz von $\int_a^b f(x)\, d\alpha(x)$ genügt: 1° $f(x)$ ist von beschränkter Variation im (a, b), oder allgemeiner: 2° $f(x)$ hat höchstens abzählbar unendlich viele Unstetigkeitspunkte[15]).

Wenn $f(x)$ und $\alpha(x)$ beide von beschränkter Variation sind, so existieren beide Integrale: $\int_a^b f(x)\, d\,\alpha(x)$ und $\int_a^b \alpha(x)\, d f(x)$[15]).

Elementare Eigenschaften des Integrals.

§ 3. Wir lassen einige weiteren Eigenschaften des hier behandelten R.-S. Integrals folgen. Bei den Sätzen, deren Beweise fast dieselben sind wie die ihres Analogons bei dem gewöhnlichen R.-S. Integrale oder der von Pollard und Hobson behandelten Generalisierung, werden diese nur kurz angedeutet.

[13]) Siehe Hobson, Theory of functions I (Third Ed. 1927), S. 469.

[14]) Man siehe auch die Beispiele bei Hobson, l. c.[13]), S. 559. Diese zeigen außerdem, daß Funktionen $f(x)$, $\alpha(x)$ sehr wohl ein R.-S. Integral in der hier behandelten, verallgemeinerten Form liefern können ohne ein „generalisiertes" R.-S. Integral zu haben nach der Definition, behandelt von Pollard, l. c.[2]) und von Hobson in den §§ 377 — 380 seines zitierten Werkes. Aus Satz II, (11) und Hobson, l. c. S. 552 folgt jedoch, daß umgekehrt aus der Existenz eines „generalisierten" Integrals die des zugehörigen verallgemeinerten Integrals notwendig folgen wird und daß sie dann einander gleich sind.

[15]) Vgl. Hobson, l. c.[13]), S. 545 u. 546.

Mit Hilfe von Satz V und Definition 4 lassen sich die beiden folgenden Sätze ableiten.

Satz VI. *$f(x)$ sei beschränkt und $\alpha(x)$ von beschränkter Variation in (a, b). Dann läßt sich schreiben für $a < c < b$:*

$$\int_a^b f(x)\,d\,\alpha(x) = \int_a^c f(x)\,d\,\alpha(x) + \int_c^b f(x)\,d\,\alpha(x),$$

sobald die Existenz des linken oder die der beiden rechten Integrale bekannt ist.

Satz VII. *Wenn die beschränkten Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ in (a, b) R.-S. Integrale haben in bezug auf die Determinante $\alpha(x)$ (von beschränkter Variation in (a, b)), so ist auch $f_1(x)+f_2(x)$ in (a, b) intergrierbar (R-S) in bezug auf $\alpha(x)$ und*

$$\int_a^b \{f_1(x)+f_2(x)\}\,d\,\alpha(x) = \int_a^b f_1(x)\,d\,\alpha(x) + \int_a^b f_2(x)\,d\,\alpha(x).$$

§ 4. **Definition 8.** $F(x)$ sei endlich und $\alpha(x)$ sei von beschränkter Variation im abgeschlossenen Intervall (a, b). Jede Umgebung eines Punktes ξ von (a, b) enthalte Punkte (x) mit $V(x) > V(\xi)$[16], wobei $V(x)$ die Totalvariation von $\alpha(x)$ über (a, x) darstellt. Wenn dann in ξ

(14) $$\lim_{\substack{V(x)\to V(\xi+0) \\ V(x) > V(\xi)}} \text{[17]} \; \frac{F(x)-F(\xi)}{\alpha(x)-\alpha(\xi)} \quad \text{(endlich oder bestimmt unendlich)}$$

existiert, wobei nur derartige Punkte (x) betrachtet werden, in denen $\alpha(x) \neq \alpha(\xi)$ ist, so definiert dieser Grenzwert *die rechte $\alpha(x)$-Ableitung*, $D_{\alpha(x),r}\,F(\xi)$, *von $F(x)$ in ξ.* Auch wenn es eine Umgebung von ξ gibt, derartig, daß in keinem ihrer Punkte $V(x) > V(\xi)$ ist, aber in jedem Punkte mit $V(x) = V(\xi)$ und $x > \xi$ auch $F(x) = F(\xi)$ ist[18], betrachten wir $D_{\alpha(x),r}\,F(\xi)$ als existierend. Gibt es dann eine linke $\alpha(x)$-Ableitung in ξ gleich einem Grenzwerte wie (14), wobei jedoch $V(x) < V(\xi)$ sei und $V(x)$ nach $V(\xi-0)$ konvergiere, so nehmen wir den Wert der rechten $\alpha(x)$-Ableitung gleich dem der linken; sonst sei der Wert von $D_{\alpha(x),r}\,F(\xi)$ unbestimmt. — *Die linke $\alpha(x)$ Ableitung*, $D_{\alpha(x),l}\,F(\xi)$, *von $F(x)$ in ξ* und ihr Wert sind in analoger Weise zu definieren.

[16]) Oder, was auf dasselbe hinauskommt, mit $\alpha(x) \neq \alpha(\xi)$ und $x > \xi$.

[17]) Oder $x \to \xi$ und $x > \xi$.

[18]) Man kann auch fordern: es gibt eine Umgebung von ξ, derartig, daß für alle Punkte $x > \xi$ in ihr gleichzeitig $\alpha(x) = \alpha(\xi)$ und $F(x) = F(\xi)$ ist.

Definition 9. Zur Einführung der *$\alpha(x)$-Ableitung*, $D_{\alpha(x)}\,F(\xi)$, *von $F(x)$ in ξ* betrachten wir drei Fälle: 1° wenn ξ mit a oder b zusammenfällt und in a bzw. b die rechte bzw. linke $\alpha(x)$-Ableitung existiert, soll die $\alpha(x)$-Ableitung in ξ existieren und denselben (bestimmten oder unbestimmten) Wert haben; 2° wenn in ξ [$\neq a$ oder b] $V(\xi) = V(\xi \pm 0)$ oder $\neq V(\xi-0)$ und $\neq V(\xi+0)$ ist[19]) und wenn dabei die linke und die rechte $\alpha(x)$-Ableitung den gleichen Wert haben, sei $D_{\alpha(x)}\,F(\xi)$ gleich dem gemeinsamen Werte; 3° wenn nur einer der beiden Grenzwerte $V(\xi+0)$, $V(\xi-0)$ von $V(\xi)$ verschieden ist und die zugehörige (rechte bzw. linke) $\alpha(x)$-Ableitung existiert, sei $D_{\alpha(x)}\,F(\xi)$ gleich dieser.

Definition 10. Es seien $F(x)$ und $\alpha(x)$ wie in Def. 8. Dann nennen wir $F(x)$ in ξ ($a \leqq \xi \leqq b$) *linksseitig stetig nach $\alpha(x)$*: 1° wenn in ξ gleichzeitig $V(\xi-0) = V(\xi)$[20]) und $F(\xi-0) = F(\xi)$ ist; 2° wenn ξ ein Unstetigkeitspunkt von $V(x)$[21]) ist. Eine in ξ nach $\alpha(x)$ sowohl links — wie rechtsseitig stetige Funktion heiße in ξ *stetig nach $\alpha(x)$*.

Diese Definitionen ermöglichen es zu formulieren den

Satz VIII. *Das unbestimmte Integral, $G(x)$, für $a < x \leqq b$ gleich der Summe von $\int_a^x f(x)\,d\alpha(x)$ und einer willkürlichen Konstante und für $x = a$ gleich dieser Konstante, ist in allen Punkten des abgeschlossenen Intervalls (a, b) stetig nach $\alpha(x)$ und hat in jedem Punkte ξ, in welchem $f(x)$ stetig ist nach $\alpha(x)$ und, im Falle daß $V(x)$ stetig ist in ξ, daneben $D_{V(x)}\,\alpha(x) = +1$ oder -1, oder unbestimmt ist, eine $\alpha(x)$-Ableitung $= f(\xi)$*[22]).

Beweis. Aus den Definitionen 5 und 10 folgt die Stetigkeit nach $\alpha(x)$ des unbestimmten Integrals $G(x)$ in jedem Punkte von (a, b).

Wenn $P(x)$ die positive und $N(x)$ die negative Totalvariation von $\alpha(x)$ über (a, x) ist, so werden in jedem Punkte ξ, in welchem $f(\xi \pm 0) = f(\xi)$ und $V(\xi \pm 0) = V(\xi)$ ist, die Ableitungen

$$D_{P(x)}\left[\int_a^\xi f(x)\,dP(x)\right] = \lim_{V(x)\to V(\xi\pm 0)} \frac{\int_a^x f(x)\,dP(x) - \int_a^\xi f(x)\,dP(x)}{P(x)-P(\xi)} \left[= \lim_{V(x)\to V(\xi\pm 0)} \frac{A(x,\xi)}{B(x,\xi)}\right]$$

[19]) Oder: wenn $\alpha(x)$ in ξ stetig oder auf beiden Seiten unstetig ist.

[20]) Oder $\alpha(\xi-0) = \alpha(\xi)$.

[21]) Oder von $\alpha(x)$.

[22]) Bei dieser Formulierung rechnen wir die $\alpha(x)$-Ableitung in denjenigen Punkten, in welchen sie zwar existiert, aber unbestimmt ist, gleich dem zugehörigen Werte von $f(x)$.

und

$$D_{N(x)}\left[\int_a^{\xi} f(x)\,dN(x)\right]=\lim_{V(x)\to V(\xi\pm 0)}\frac{\int_a^{x} f(x)\,dN(x)-\int_a^{\xi} f(x)\,dN(x)}{N(x)-N(\xi)}\left[=\lim_{V(x)\to V(\xi\pm 0)}\frac{C(x,\xi)}{D(x,\xi)}\right]$$

existieren und gleich $f(\xi)$ oder unbestimmt sein. Ist in außerdem $D_{V(x)}\,\alpha(x)=+1$, so wird für genügend kleine Differenzen $\{V(x)-V(\xi)\}$

$$|N(x)-N(\xi)|<\eta\cdot|P(x)-P(\xi)|$$

sein, wobei η positiv und fest, aber willkürlich klein. Hiermit beweist man aus der Existenz der beiden vorigen Ableitungen, daß auch

$$D_{\alpha(x)}\,G(\xi)=\lim_{V(x)\to V(\xi\pm 0)}\frac{\int_a^{x} f(x)\,d\alpha(x)-\int_a^{\xi} f(x)\,d\alpha(x)}{\alpha(x)-\alpha(\xi)}\left[=\lim_{V(x)\to V(\xi\pm 0)}\frac{A(x,\xi)-C(x,\xi)}{B(x,\xi)-D(x,\xi)}\right]$$

existiert und gleich $f(\xi)$ oder unbestimmt ist. Dies gilt ebenfalls, wenn in ξ $D_{V(x)}\,\alpha(x)=-1$ ist. Schließlich wird auch für $D_{V(x)}\,\alpha(\xi)$ unbestimmt die Ableitung von $G(x)$ nach $\alpha(x)$ in ξ existieren, jedoch unbestimmt sein.

Daß $D_{\alpha(x)}\,G(x)$ in einem Unstetigkeitspunkte ξ von $V(x)$ existiert und gleich $f(\xi)$ ist, folgt in leicht ersichtlicher Weise aus den Definitionen 5 und 9 (2^0 und 3^0).

Satz IX. Das unbestimmte Integral $G(x)$ von $f(x)$ nach $\alpha(x)$ hat in allen Punkten (x) des abgeschlossenen Intervalls (a, b) eine $\alpha(x)$-Ableitung $=f(x)$, ausgenommen in den Punkten einer Teilmenge vom $V(x)$-Maße (L) Null.

Beweis. Aus der Theorie der Funktionen von beschränkter Variation geht hervor, daß in allen Punkten von (a, b), welche Stetigkeitspunkt von $V(x)$ sind, ausgenommen diejenigen einer Menge vom $V(x)$-Maße (L) Null, die Ableitung $D_{V(x)}\,\alpha(x)$ existiert und entweder $+1$ oder -1 ist[23]. Dadurch folgt Satz IX sofort aus den Sätzen VIII und V[24].

[23]) Man siehe Lebesgue, l. c. [6]), S. 259 u. 260. Wir bemerken, daß dies und Fuszn. 30 die einzigen Stellen unserer Arbeit sind, an denen ein Resultat benutzt wird, das mit Hilfe der Lebesgueschen Maß-und Integrationstheorie bewiesen wird. An einigen weiteren Stellen haben wir zwar zur „Formulierung" der Sätze das Lebesguesche Maß oder α-Maß angewandt; das wäre jedoch leicht zu vermeiden gewesen.

[24]) Dieser letzte Satz läßt sich nun, unter Anwendung von Definition 10, auch so aussprechen: Damit $\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)$ existiere, ist notwendig und hinreichend, daß die Punkte von (a, b), in denen $f(x)$ nicht stetig ist nach $\alpha(x)$, eine Menge vom $V(x)$-Maße $(L)=0$ bilden.

§ 5. **Satz X.** Es sei $f(x)$ beschränkt und $\varphi(x)$ integrierbar (R) im abgeschlossenen Intervall (a, b); man setze für $a\leqq x\leqq b$ $\int_a^x \varphi(x)\,dx=\Phi(x)$. Dann wird

$$\int_a^b f(x)\cdot\varphi(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,d\,\Phi(x)$$

sein, wobei das erste ein R. Integral, das letzte ein R.-S. Integral ist, sobald die Existenz eines dieser Integrale bekannt ist.

Für den Fall, daß $\varphi(x)\geqq 0$ und das letzte Integral ein „generalisiertes" R.-S. Integral[14]) ist, wurde der Satz am ersten von J. M. Whittaker bewiesen[25]). Das von Hobson[26]) gegebene Beweisverfahren ist auch ohnemehr anwendbar, wenn das R.-S. Integral im Sinne der Definition 5 genommen wird und $\varphi(x)$ wieder $\geqq 0$ ist.

Läßt $\varphi(x)$ positive und negative Werte zu, so ist zu schreiben: $\varphi(x)=\varphi^{+}(x)-\varphi^{-}(x)$, wobei in x: $\varphi^{+}=\varphi$ ist, wenn $\varphi>0$, und sonst $=0$; $\varphi^{-}=-\varphi$ ist, wenn $\varphi<0$, und sonst$=0$. Dann sind $\int_a^x \varphi^{+}(x)\,dx$ und $\int_a^x \varphi^{-}(x)\,dx$ R. Integrale, welche die positive bzw. negative Totalvariation von $\Phi(x)$ über (a, x) darstellen. Der Satz gilt, wenn man $\varphi(x)$ durch $\varphi^{+}(x)$ oder $\varphi^{-}(x)$ ersetzt. Mit Hilfe von (12) und Satz II folgt daraus auch seine Gültigkeit für $\varphi(x)$ selbst[27]).

§ 6. **Hilfssatz.** $\alpha(x)$ sei von beschränkter Variation im abgeschlossenen Interval (a, b). In jedem Punkte x von (a, b), in welchem $\alpha(x)$ linksseitig (rechtsseitig) stetig ist, sei auch die endliche Funktion $f(x)$ linksseitig (rechtsseitig) stetig; in jedem (offenen oder abgeschlossenen) Intervall, in dem $\alpha(x)$ konstant ist, sei auch $f(x)$ konstant. Wenn dann: 1^0 für jedes x, mit Ausnahme derjenigen einer Menge E_x vom $V(x)$-Maße (L) Null, $D_{\alpha(x)}f(x)$ existiert und gleich Null ist[28]), und:

[25]) Siehe Proc. London Math. Soc. (2) 25 (1926), S. 213.

[26]) Siehe Hobson, l. c. [13]), S. 554, 555.

[27]) Es wird hierbei benutzt, daß aus der Integrierbarkeit (R) in (a, b) von $f(x)\cdot\varphi(x)$ und von $\varphi(x)$ die von $f(x)\cdot\varphi^{+}(x)$ und von $f(x)\cdot\varphi^{-}(x)$ folgen; das ist so, da in jedem Punkte, in welchem $f(x)\cdot\varphi(x)$ und $\varphi(x)$ beide stetig sind, dasselbe gilt von den Funktionen $f(x)\cdot\varphi^{+}(x)$ und $f(x)\cdot\varphi^{-}(x)$.

[28]) In den Punkten, für die $D_{\alpha(x)}f(x)$ unbestimmt ist, nehmen wir die Ableitung gleich Null an.

2^0 die Differenzenquotienten $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{V(x_1)-V(x_2)}$ (mit $V(x_1)\neq V(x_2)$) in (a, b) beschränkt sind, so wird $f(x)$ konstant sein in (a, b).

Beweis. Es sei ε willkürlich positiv und $\varepsilon=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_k+\ldots$, wobei auch die Glieder dieser Reihe positiv sein sollen. Die Menge P der Unstetigkeitspunkte (x_k) von $\alpha(x)$, in welchen keine rechte $\alpha(x)$-Ableitung $=0$ existiert, ist höchstens abzählbar unendlich (siehe Def. 9, 3^0). Zu jedem x_k läßt sich, da $f(x)$ in einem solchen Punkte rechtsseitig stetig ist, ein Intervall (x_k, x'_k) angeben mit

(15) $$|f(x'_k)-f(x_k)|<\varepsilon_k.$$

Die Punkte von E_x sind innere Punkte von abzählbar vielen Intervallen (ξ_k, ξ'_k), für die

(16) $$\sum_{(k)}[V(\xi'_k)-V(\xi_k)]<\varepsilon$$

ist. Jeder Punkt x von E_x ist also innerer Punkt mindestens eines der Intervalle (ξ_k, ξ'_k); es sei $(\xi_{k(x)}, \xi'_{k(x)})$ ein derartiges Intervall. Dann wird es, wenn M die obere Schranke aller $\left|\frac{f(x_1)-f(x_2)}{V(x_1)-V(x_2)}\right|$ (mit $V(x_1)\neq V(x_2)$) angibt, ein Punkt $\xi''_{k(x)}$ geben mit

(17) $$|f(\xi''_{k(x)})-f(x)|\leqq M\cdot[V(\xi''_{k(x)})-V(x)] \text{ und } x<\xi''_{k(x)}\leqq\xi'_{k(x)}.$$

In jedem nicht zu P und nicht zu E_x gehörenden Punkt ξ von (a, b) ist $D_{\alpha(x),r}f(\xi)=0$, und es gibt somit ein Intervall (ξ, ξ') mit

(18) $$|f(\xi')-f(\xi)|<\varepsilon\cdot[V(\xi')-V(\xi)].$$

Zu jedem Punkte des abgeschlossenen Intervalls (a, b), b ausgenommen, gehört mithin ein Intervall, dessen Anfangspunkt er ist und zwischen dessen extremen Punkten entweder (15) oder (17) oder (18) gilt. Mit Hilfe dieser Intervalle läßt sich eine Lebesguesche Kette konstruieren, welche bei a anfängt und b erreicht. Da in jedem linksseitigen Unstetigkeitspunkte x von $\alpha(x)$ $D_{\alpha(x)}f(x)=0$ und dadurch $f(x-0)=f(x)$ ist, und diese Gleichheit auch in den linksseitigen Stetigkeitspunkten von $\alpha(x)$ gilt, folgt aus der Existenz der Lebesgueschen Kette und (15) bis (18), daß

$$|f(b)-f(a)|<\varepsilon+M\cdot\varepsilon+\varepsilon\cdot V(b)$$

sein muß. ε ist willkürlich positiv; es wird dadurch $f(a)=f(b)$ sein.

Der Beweis gilt ungeändert für jedes Intervall (c, d) mit $a<c<d\leqq b$. Also ist $f(x)$ konstant in (a, b).

Satz XI. $\alpha(x)$ sei von beschränkter Variation im abgeschlossenen Intervall (a, b). In jedem Punkte x von (a, b), in welchem $\alpha(x)$ linksseitig (rechtsseitig) stetig ist, sei auch die endliche Funktion $f(x)$ linksseitig (rechtsseitig) stetig; in jedem (offenen oder abgeschlossenen) Intervall, in dem $\alpha(x)$ konstant ist, sei auch $f(x)$ konstant. Wenn dann: 1^0 für jedes x, mit Ausnahme derjenigen einer Menge E_x vom $V(x)$-Maße (L) Null, $D_{\alpha(x)}f(x)$ existiert, 2^0 diese Ableitung sich durch Hinzufügung gewisser Werte in den Punkten, in welchen sie nicht existiert oder unbestimmt ist, erweitern läßt zu einer für $a\leqq x\leqq b$ definierten und beschränkten Funktion $D_{\alpha(x)}f(x)$, für die das R.-S. Integral $\int_a^b D_{\alpha(x)}f(x)\,d\,\alpha(x)$ existiert, 3^0 die Differenzenquotienten $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{V(x_1)-V(x_2)}$ (mit $V(x_1)\neq V(x_2)$) in (a, b) beschränkt sind, so wird

$$\int_a^b D_{\alpha(x)}f(x)\,d\,\alpha(x)=f(b)-f(a)$$

sein (Hauptsatz der Integralrechnung).

Beweis. Nach Fuszn. 24 existiert $\int_a^x D_{\alpha(x)}f(x)\,d\,\alpha(x)$ für $a\leqq x\leqq b$. Die Differenz zwischen ihr und $f(x)-f(a)$ genügt den Bedingungen des Hilfssatzes und wird somit konstant sein. Diese Konstante ist Null.

§ 7. Satz XII. Wenn die beschränkten Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ im abgeschlossenen Intervall (a, b) integrierbar (R-S) sind in bezug auf eine in (a, b) stetige und monoton nicht-abnehmende Funktion $\alpha(x)$, so wird

(19) $$\int_a^b f(x)\cdot\left[\int_a^x g(y)\,d\,\alpha(y)\right]d\,\alpha(x)+\int_a^b g(x)\cdot\left[\int_a^x f(y)\,d\,\alpha(y)\right]d\,\alpha(x) =\int_a^b f(x)\,d\,\alpha(x)\cdot\int_a^b g(x)\,d\,\alpha(x)$$

sein.

Beweis. $\int_a^x g(y)\,d\,\alpha(y)$ ist, nach Satz VIII, stetig nach $\alpha(x)$ für $a\leqq x\leqq b$. Die Menge der Punkte, in denen $f(x)$ nicht stetig ist nach $\alpha(x)$, hat das $\alpha(x)$-

Maß (L) Null (siehe Fußn. 23). Dasselbe wird nun auch der Fall sein für die Menge der Punkte, in denen $f(x)\cdot\int\limits_a^x g(y)\,d\,\alpha(y)$ nicht stetig ist nach $\alpha(x)$ und daraus folgt, nach Fußn. 23, daß dieses Produkt über (a, b) ein R.-S. Integral nach $\alpha(x)$ besitzt.

Auf dieselbe Weise läßt sich die Existenz des zweiten iterierten Integrals in (19) ableiten.

Ebenso wie im Beweise von Satz I mit Hilfe von $t = P(x)$ sind hier mit Hilfe von $t = \alpha(x)$ die Punkte von (a, b) abzubilden auf die Punkte eines Intervalls $[t_1 = \alpha(a), t_2 = \alpha(b)]$ der t-Achse. Die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ ändern sich dabei in Funktionen von t, $\varphi(t)$ bzw. $\psi(t)$ und das erste Glied von (19) geht über in

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\varphi(t)\cdot\left[\int\limits_{t_1}^{t}\psi(u)\,du\right]dt+\int\limits_{t_1}^{t_2}\varphi(t)\cdot\left[\int\limits_{t_1}^{t}\psi(u)\,du\right]dt.$$

Aus der Theorie der R. Integrale folgt, daß sich hierfür schreiben läßt [29])

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\varphi(t)\,dt\cdot\int\limits_{t_1}^{t_2}\psi(t)\,dt.$$

Und dies ist gleich dem rechten Gliede von (19).

Korollar. $\alpha(x)$ sei stetig und monoton nicht-abnehmend, $u(x)$ und $v(x)$ seien stetig im abgeschlossenen Intervall (a, b). In jedem (offenen oder abgeschlossenen) Teilintervall, in dem $\alpha(x)$ konstant ist, seien auch $u(x)$ und $v(x)$ konstant. Wenn dann: 1° für jedes x, mit Ausnahme derjenigen einer Menge vom $\alpha(x)$-Maße (L) Null, $D_{\alpha(x)}u(x)$ und $D_{\alpha(x)}v(x)$ existieren, 2° diese Ableitungen sich durch Hinzufügung gewisser Werte in den Punkten, in welchen sie nicht existieren oder unbestimmt sind, erweitern lassen zu für $a \leqq x \leqq b$ definierten Funktionen $D_{\alpha(x)}u(x)$ bzw. $D_{\alpha(x)}v(x)$, die über (a, b) integrierbar (R-S) nach $\alpha(x)$ sind, 3° die Differenzenquotienten $\dfrac{u(x_1)-u(x_2)}{\alpha(x_1)-\alpha(x_2)}$, $\dfrac{v(x_1)-v(x_2)}{\alpha(x_1)-\alpha(x_2)}$ (mit $\alpha(x_1) \neq \alpha(x_2)$) in (a, b) beschränkt sind, so wird

$$(20)\quad \int\limits_a^b u(x)\cdot D_{\alpha(x)}v(x)\,d\,\alpha(x)+\int\limits_a^b v(x)\cdot D_{\alpha(x)}u(x)\,d\alpha(x)=u(b)\cdot v(b)-u(a)\cdot v(a)$$

sein.

[29]) Siehe z. B. Hobson. l. c. [11]), S. 491.

Beweis. Da die Funktionen $D_{\alpha(x)}u(x)$ und $D_{\alpha(x)}v(x)$ nach Fußn. 23 nur in den Punkten einer Menge vom $\alpha(x)$-Maße (L) Null unstetig nach $\alpha(x)$ sein können, so werden, wieder nach Fußn. 23, auch die Produkte $v(x)\cdot D_{\alpha(x)}u(x)$ und $u(x)\cdot D_{\alpha(x)}v(x)$ über (a, b) integrierbar (R-S) nach $\alpha(x)$ sein; die Integrale in (20) existieren somit.

Nach Satz XI läßt sich für das erste Glied von (20) schreiben

$$\int\limits_a^b D_{\alpha(x)}v(x)\cdot\left[\int\limits_a^x D_{\alpha(y)}u(y)\,d\,\alpha(y)+u(a)\right]d\,\alpha(x)$$
$$+\int\limits_a^b D_{\alpha(x)}u(x)\cdot\left[\int\limits_a^x D_{\alpha(y)}v(y)\,d\,\alpha(y)+v(a)\right]d\,\alpha(x),$$

und dies ist nach den Sätzen VIII, XII und XI gleich

$$\int\limits_a^b D_{\alpha(x)}u(x)d\alpha(x)\cdot\int\limits_a^b D_{\alpha(x)}v(x)\,d\alpha(x)+u(a)\int\limits_a^b D_{\alpha(x)}v(x)d\alpha(x)+v(a)\int\limits_a^b D_{\alpha(x)}u(x)\,d\,\alpha(x)$$
$$=u(b)\cdot v(b)-u(a)\cdot v(a)\,^{30}).$$

Geometrische Definition des Integrals.

§ 8. Es sei $\alpha(x)$ von beschränkter Variation in jedem endlichen Intervall der x-Achse. Jedem offenen Rechteck mit $x_1 < x < x_2$; $y_1 < y < y_2$ fügen wir ein äußeres $\alpha(x)\cdot y$-Maß gleich $\alpha(x_2-0)\cdot y_2-\alpha(x_2-0)\cdot y_1-\alpha(x_1+0)\cdot y_2+\alpha(x_1+0)\cdot y_1=\{\alpha(x_2-0)-\alpha(x_1+0)\}\cdot(y_2-y_1)$ zu. Ebenso wie für alle beschränkten linearen Mengen der x-Achse, ausgehend von dem äußeren $\alpha(x)$-Maße der offenen Intervalle, ein äußeres und ein inneres $\alpha(x)$-Maß (L) oder (J) zu definieren war, lassen sich auch für alle beschränkten Mengen der xy-Ebene, ausgehend von dem äußeren $\alpha(x)\cdot y$-Maße der offenen, achsenparallelen Rechtecke, ein äußeres und ein inneres $\alpha(x)\cdot y$-Maß (L) oder (J) einführen (man vergl. § 2); diese äußeren und inneren Maße fallen für $\alpha(x)\equiv x$ mit den gewöhnlichen äußeren bzw. inneren Maßen (L)

[30]) Wird von $\alpha(x)$ vorausgesetzt, daß sie in (a, b) stetig und von beschränkter Variation sei, so bleibt Satz XII richtig. Denn aus Satz XVIII folgt, daß jede beschränkte, nach $\alpha(x)$ (R-S) integrierbare Funktion auch ein Lebesgue-Stieltjessches Integral über (a, b) hat in bezug auf $\alpha(x)$ und zwar von demselben Werte wie ihr R.-S. Integral über (a, b); und die Anwenduug der von Lebesgue, l. c.[6]), S. 259 u. 260 gegebene Transformation von L.-S. Integralen in L. Integrale führt (19) in die analoge Formel für partielle Integration bei L. Integralen über. Auch das aus Satz XII abgeleitete Korollar bleibt dann gültig, wenn man dabei im Nenner der Differenzenquotienten (in 3°) statt $\alpha(x)$ ihre Totalvariation $V(x)$ einsetzt.

oder (J) zusammen. Eine beschränkte Menge $E_{x,y}$, deren Punkte Abszissenwerte haben, liegend im Intervall (a, b), heißt $\alpha(x)\cdot y$-meßbar (L) oder (J), wenn ihre äußeren und inneren $V(x)\cdot y$-Maße (L) bzw. (J) einander gleich sind; hierbei bedeutet $V(x)$ die Totalvariation von $V(x)$ über (a, x). Wenn $P(x)$ und $N(x)$ die positive bzw. negative Totalvariation von $\alpha(x)$ über (a, x) darstellen, wird $E_{x,y}$ dann auch $P(x)\cdot y$-meßbar (L) bzw. (J) und $N(x)\cdot y$-meßbar (L) bzw. (J) sein und man hat für die zugehörigen Maßzahlen:

$$
\text{(21)} \qquad \begin{aligned} m_{\alpha(x).y}(E_{x,y}) &= m_{P(x).y}(E_{x,y}) - m_{N(x).y}(E_{x,y}) \quad \text{und} \\ m_{V(x).y}(E_{x,y}) &= m_{P(x).y}(E_{x,y}) + m_{N(x).y}(E_{x,y}). \end{aligned}
$$

§ 9. Ist auf der x-Achse die Funktion $\alpha(x)$ monoton nicht-abnehmend, so erhält man das äußere $\alpha(x).y$-Maß (J) einer beschränkten Menge $E_{x,y}$ als untere Schranke der Summen der $\alpha(x)\cdot y$-Maße von endlich vielen, offenen Rechtecken (R_n), welche sämtlich $E_{x,y}$ überdecken. Wenn die Horizontal- und Vertikalseiten der (R_n) bis ins Unendliche verlängert werden, so entstehen endlich viele offene Rechtecke (S_m), welche entweder mit einem R_n zusammenfallen oder Teil eines R_n sind. Die Koordinaten der Punkte eines S_m sollen den Bedingungen $x_1^{(m)} < x < x_2^{(m)}$; $y_1^{(m)} < y < y_2^{(m)}$ genügen. Wenn es dann mindestens ein Punkt von $E_{x,y}$ gibt, dessen Koordinaten denselben Ungleichungen genügen, aber keiner mit $x = x_1^{(m)}$; $y_1^{(m)} \leqq y < y_2^{(m)}$ oder mit $x_1^{(m)} \leqq x < x_2^{(m)}$; $y = y_1^{(m)}$, so lassen wir S_m offen; es seien (S'_m) alle derartigen Rechtecke unter den (S_m). Gehörten bei S_m entweder Punkte (x, y) von $E_{x,y}$ mit $x = x_1^{(m)}$; $y_1^{(m)} \leqq y < y_2^{(m)}$ oder solche mit $x_1^{(m)} < x < x_2^{(m)}$; $y = y_1^{(m)}$, oder sowohl Punkte von $E_{x,y}$ der ersten wie auch der zweiten Kategorie, so fügten wir ihm alle Punkte der xy- Ebene zu, welche der ersten bzw. der zweiten bzw. einer der beiden Bedingungen genügen würden; es sei S''_m ein so entstandenes, teilweise abgeschlossenes Rechteck. Schließlich lassen wir diejenigen Rechtecke (S_m) fort, welche nicht zu den (S'_m) gehören und nicht in ein S''_m übergeführt werden können. Es ist klar, daß die (S'_m) und die (S''_m) sämtlich die Menge $E_{x,y}$ enthalten und daß ihr $\alpha(x)\cdot y$-Gesamtmaß (J) höchstens gleich der Summe der $\alpha(x)\cdot y$-Maße der (S_m) ist.

Jedes Netz $N(\eta)$, welches entsteht mittels Horizontal- und Vertikallinien, bei denen der Abstand zweier nebeneinander verlaufender unterhalb der festen, positiven Zahl η bleibt, liefert eine Überdeckung von $E_{x,y}$ durch endlich viele Rechtecke (S'_m, S''_m). Es ist nun deutlich, daß die untere Schranke des $\alpha(x)\cdot y$-Gesamtmaßes (J) von (S'_m, S''_m) für alle möglichen Netze $N(\eta)$ nicht größer sein kann als die untere Schranke der Summen der $\alpha(x)\cdot y$-Maße von je endlich vielen offenen, $E_{x,y}$ überdeckenden Rechtecken (R_n). Da die erste Schranke auch nicht kleiner sein kann als die zweite, sind beide einander gleich. Also:

Hilfssatz. Bei monoton nicht-abnehmender Funktion $\alpha(x)$ erhält man das äußere $\alpha(x).y$-Maß (J) einer beschränkten Menge $E_{x,y}$ als untere Schranke der Summen der $\alpha(x)\cdot y$-Maße von je endlich vielen Rechtecken (S'_m, S''_m), welche sämtlich $E_{x,y}$ überdecken und zu einem und demselben der Netze $N(\eta)$ gehören; hierbei ist η willkürlich positiv, aber fest.

§ 10. Wenn im abgeschlossenen Intervall (a, b) $\alpha(x)$ monoton nicht-abnehmend und $f(x)$ nicht-negativ und beschränkt ist, so hat die Ordinatenmenge $O[a \leqq x \leqq b;\ 0 \leqq y \leqq f(x)]$ ein äußeres $\alpha(x)\cdot y$-Maß (J). Wählt man auf der y-Achse Punkte (y_j), derartig, daß je zwei benachbarte einen Abstand $< \varepsilon$ (willkürlich positiv) haben und auf (a, b) Punkte $a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_n = b$, zu welchen eine ε-Teilung von (a, b) in bezug auf $\alpha(x)$ gehört[31], so liefern die Parallelen zur x-Achse durch die Punkte (y_j) und die Parallelen zur y-Achse durch die Punkte (x_j) ein System Σ von Intervallen (S'_m, S''_m), das die Ordinatenmenge O enthält (siehe § 9). Das $\alpha(x)\cdot y$-Maß (J) von Σ weicht um weniger als $\varepsilon\cdot[\alpha(b) - \alpha(a)]$ ab von der zu $f(x)$ und der eben betrachteten ε-Teilung von (a, b) gehörigen Summe $\bar{S}$, bei deren Bildung die Intervalle der ε-Teilung jedoch als nach rechts offen betrachtet werden[32]; das folgt aus den Definitionen der oberen ε-Summe $\bar{S}$ und des Systems von Intervallen (S'_m, S''_m).

Nach Fuszn. 9 hat $\bar{S}$ für $\varepsilon \to 0$ $\overline{\int_a^b} f(x)\,d\alpha(x)$ zum Grenzwert. Somit ist dieses obere Integral auch Grenzwert des $\alpha(x)\cdot y$-Maßes (J) von Σ für $\varepsilon \to 0$. Auf Grund des Hilfssatzes von § 9 muß dieser Grenzwert gleich dem oberen $\alpha(x)\cdot y$-Maße (J) von O sein. Wir erhalten somit den

Satz XIII. Wenn $f(x)$ nicht-negativ und beschränkt und $\alpha(x)$ monoton nicht-abnehmend ist im abgeschlossenen Intervall (a, b), so ist der Wert von $\overline{\int_a^b} f(x)\,d\alpha(x)$ gleich dem äußeren $\alpha(x)\cdot y$-Maße (J) der Ordinatenmenge $O[a \leqq x \leqq b;\ 0 \leqq y \leqq f(x)]$.

Ist für $a \leqq x \leqq b$

$$0 \leqq f(x) < h,$$

so wird bei nicht-abnehmender Funktion $\alpha(x)$

$$
\text{(22)} \qquad \overline{\int_a^b} f(x)\,d\alpha(x) = h\cdot[\alpha(b) - \alpha(a)] - \underline{\int_a^b}[h - f(x)]\,d\alpha(x)
$$

[31]) Siehe Definition 3. Die Punkte (x_j) selber sind Stetigkeitspunkte oder Doppelpunkte von $\alpha(x)$, also keine Punkte $(x+0)$ oder $(x-0)$; die ε-Teilung erhält man, wenn man statt eines jeden Doppelpunktes die zugehörigen Punkte $x-0$ und $x+0$ setzt.

[32]) Siehe Definition 6 und Fuszn. 9.

sein. Aus dem vorigen Satze folgt, daß das zweite Glied von (22) das innere $\alpha(x)\cdot y$-Maß (J) der zu $f(x)$ gehörigen Ordinatenmenge darstellt. Das liefert den

Satz XIV. Für die in Satz XIII genannten Funktionen $f(x)$ und $\alpha(x)$ ist $\underline{\int_a^b} f(x)\,d\,\alpha(x)$ gleich dem inneren $\alpha(x)\cdot y$-Maße (J) der Ordinatenmenge O.

§ 11. **Satz XV.** Im abgeschlossenen Intervall (a, b) sei $f(x)$ nicht-negativ und beschränkt, $\alpha(x)$ von beschränkter Variation. Dann ist zur Existenz von $\int_a^b f(x)\,d\,\alpha(x)$ notwendig und hinreichend, daß die Ordinatenmenge $O[a\leqq x\leqq b;\ 0\leqq y\leqq f(x)]$ $V(x)\cdot y$-meßbar (J) sei, wobei $V(x)$ die Totalvariation von $\alpha(x)$ über (a, x) darstellt. Sind $P(x)$ und $N(x)$ die positive bzw. negative Totalvariation von $\alpha(x)$ über (a, x), so wird

$$\int_a^b f(x)\,d\,\alpha(x) = m_{P(x)\,.\,y}(O) - m_{N(x)\,.\,y}(O) = m_{\alpha(x)\,.\,y}(O) \tag{23}$$

sein, wobei m Maß (J) andeutet.

Beweis. Aus der Existenz von $\int_a^b f(x)\,d\,\alpha(x)$ folgt, nach Satz III, daß auch $\int_a^b f(x)\,d\,V(x)$ existiert und daraus auf Grund der Sätze XIII und XIV die $V(x)\cdot y$-Meßbarkeit (J) der Menge O.

Umgekehrt, sei O $V(x)\cdot y$-meßbar (J). Dann wird sie auch $P(x)\cdot y$-meßbar (J) und $N(x)\cdot y$-meßbar (J) sein und nach (21) ist

$$m_{\alpha(x)\,.\,y}(O) = m_{P(x)\,.\,y}(O) - m_{N(x)\,.\,y}(O). \tag{24}$$

Nach den Sätzen XIII und XIV läßt sich hierfür schreiben:

$$m_{\alpha(x)\,.\,y}(O) = \int_a^b f(x)\,d\,P(x) - \int_a^b f(x)\,d\,N(x). \tag{25}$$

Nach Fuszn. 11 existiert nun auch $\int_a^b f(x)\,d\,V(x)$ und dadurch, nach Satz III, $\int_a^b f(x)\,d\,\alpha(x)$. Schließlich folgt (23) aus (24), (25) und Satz IV, 1°.

Satz XVI. Wird von $f(x)$ nur Beschränktheit angenommen, und ist $f^+(x) = f(x)$ auf der Teilmenge E von (a, b), auf der $f(x)$ positiv ist, und $=0$ auf der Komplementärmenge $C(E)$, ist $f^-(x) = -f(x)$ auf $C(E)$ und $=0$ auf E, so ist zur Existenz von $\int_a^b f(x)\,d\,\alpha(x)$ notwendig und hinreichend, daß die Ordinatenmengen $O_1[a\leqq x\leqq b;\ 0\leqq y\leqq f^+(x)]$ und $O_2[a\leqq x\leqq b;\ 0\leqq y\leqq f^-(x)]$ $V(x)\cdot y$-meßbar (J) seien. Es wird dann

$$\int_a^b f(x)\,d\,\alpha(x) = m_{\alpha(x)\,.\,y}(O_1) - m_{\alpha(x)\,.\,y}(O_2) \tag{26}$$

sein, wobei m Maß (J) angibt. (Geometrische Definition des R.-S. Integrals).

Beweis. Wenn $f(x)$ über (a, b) integrierbar (R-S) ist nach $\alpha(x)$, so folgt aus Satz V dasselbe für die Funktionen $f^+(x)$ und $f^-(x)$; und umgekehrt. Zur Existenz der Integrale von $f^+(x)$ und $f^-(x)$ ist, nach Satz XV, wieder notwendig und hinreichend die $V(x)\cdot y$-Meßbarkeit (J) der Mengen O_1 und O_2.

Nach Satz VII ist

$$\int_a^b f(x)\,d\,\alpha(x) = \int_a^b f^+(x)\,d\,\alpha(x) - \int_a^b f^-(x)\,d\,\alpha(x).$$

Auf Grund von (23) folgt hieraus (26).

Lebesgue-Radonsche Form der Definition.

§ 12. **Hilfssatz A.** Die Menge E sei enthalten im abgeschlossenen Intervall (a, b), auf dem $\alpha(x)$ monoton nicht-abnehmend sei. Für eine Funktion $f(x)$, auf E gleich einer posiven Konstanten h und gleich Null auf der Komplementärmenge $C(E)$, wird

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,d\,\alpha(x) = h\cdot \overline{m}_{\alpha(x)}(E) \tag{27}$$

und

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,d\,\alpha(x) = h\cdot \underline{m}_{\alpha(x)}(E) \tag{28}$$

sein; hierbei deuten $\overline{m}$ und $\underline{m}$ äußeres bzw. inneres lineares Maß (J) an.

Beweis. E läßt sich überdecken durch eine Menge I von endlich vielen, einander fremden und offenen Intervallen, welche sämtlich E enthalten und für die bei willkürlich positivem ε:

$$\overline{m}_{\alpha(x)}(I) < \overline{m}_{\alpha(x)}(E) + \varepsilon \tag{29}$$

ist. Für die Ordinatenmenge $O\,[x$ auf $I;\ 0 \leqq y \leqq h]$ wird das äußere Flächenmaß (J)

$$\overline{m}_{\alpha(x)\,.\,y}(O) = h \cdot \overline{m}_{\alpha(x)}(I)$$

sein. Hieraus und aus (29) folgt, unter Anwendung von Satz XIII:

$$\overline{\int_a^b} f(x)\, d\,\alpha(x) \leqq h\,.\,\overline{m}_{\alpha(x)}(E). \tag{30}$$

Jede nach Definition 6 gebildete obere ε-Summe $\overline{S}$ von $f(x)$ über (a, b) und in bezug auf $\alpha(x)$ ist größer als oder gleich $h \cdot \overline{m}_{\alpha(x)}(E)$. Konvergiert ε nach Null, so gibt das:

$$\overline{\int_a^b} f(x)\, d\,\alpha(x) \geqq h \cdot \overline{m}_{\alpha(x)}(E). \tag{31}$$

Aus (30) und (31) folgt (27).

Ist die Funktion $g(x)$ auf $C(E)$ gleich h und auf E gleich Null, so wird

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, d\,\alpha(x) = h \cdot [\alpha(b) - \alpha(a)] - \overline{\int_a^b} g(x)\, d\,\alpha(x)$$
$$= h \cdot [\alpha(b) - \alpha(a)] - h \cdot \overline{m}_{\alpha(x)}\{C(E)\} = h \cdot \underline{m}_{\alpha(x)}(E)$$

sein.

Hilfssatz B. Die Werte der nicht-negativen Funktion $f(x)$ seien im abgeschlossenen Intervall (a, b) alle kleiner als G; $\alpha(x)$ sei nicht-abnehmend in (a, b). Dann wird für $0 \leqq p < p + h \leqq G$:

$$h \cdot \overline{m}_{\alpha(x)}\{E_x(f \geqq p + h)\} \leqq \overline{m}_{\alpha(x)\,.\,y}\{O(p, p+h)\} \leqq h \cdot \overline{m}_{\alpha(x)}\{E_x(f \geqq p)\}$$

und

$$h \cdot \underline{m}_{\alpha(x)}\{E_x(f \geqq p + h)\} \leqq \underline{m}_{\alpha(x)\,.\,y}\{O(p, p+h)\} \leqq h \cdot \underline{m}_{\alpha(x)}\{E_x(f \geqq p)\}$$

sein. Hierbei deutet $E_x(f \geqq p + h)$ die Teilmenge von (a, b) an, in deren Punkten $f \geqq p + h$ ist; $O(p, p+h)$ ist eine ebene Punktmenge, deren Punkte (ξ, η) den Bedingungen: $a \leqq \xi \leqq b$; $p \leqq \eta \leqq f(\xi) < p + h$ genügen.

Beweis. Aus der Menge $O(p, p+h)$ entsteht durch Fortlassung der zwischen $y = p$ und $y = p + h$ liegenden, aber nicht bis zur Geraden $y = p + h$

reichenden Ordinatenstücke eine Teilmenge, deren äußeres $\alpha(x) \cdot y$-Maß (J) nach Hilfssatz A gleich $h \cdot \overline{m}_{\alpha(x)}\{E_x(f \geqq p + h)\}$ ist.

Hätte man die nicht bis zu $y = p + h$ reichenden Ordinatenstücke [33] von $O(p, p+h)$ verlängert bis zu $y = p + h$, so wäre aus O eine Menge entstanden, welche O enthielte und deren äußeres $\alpha(x) \cdot y$-Maß (J) gleich $h \cdot \overline{m}_{\alpha(x)}\{E_x(f \geqq p)\}$ wäre.

Damit ist der erste Teil von B bewiesen. In derselben Weise folgt der zweite Teil.

Hilfssatz C. $f(x)$ und $\alpha(x)$ seien definiert wie in Hilfssatz B; G habe die gleiche Eigenschaft wie in jenem Hilfssatz. Wenn dann $0 = y_0 < y_1 < y_2 \ldots < y_n = G$ und δ das Maximum der Differenzen $(y_{j+1} - y_j)$ ist, so wird

$$\overline{\int_a^b} f(x)\, d\,\alpha(x) = \lim_{\delta \to 0} \sum_{j=1}^{n} (y_j - y_{j-1}) \cdot \overline{m}_{\alpha(x)}\{E_x(f \geqq y_j)\} \tag{32}$$

und

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, d\,\alpha(x) = \lim_{\delta \to 0} \sum_{j=1}^{n} (y_j - y_{j-1}) \cdot \underline{m}_{\alpha(x)}\{E_x(f \geqq y_j)\} \tag{33}$$

sein.

Beweis. Da $\overline{\int_a^b} f(x)\, d\,\alpha(x) = \sum_{j=1}^{n} \overline{m}_{\alpha(x)\,.\,y}\{O(y_{j-1}, y_j)\}$ ist, folgt aus Hilfssatz B:

$$\sum_{j=1}^{n} (y_j - y_{j-1}) \cdot \overline{m}_{\alpha(x)}\{E_x(f \geqq y_j)\} \leqq \overline{\int_a^b} f(x)\, d\,\alpha(x)$$
$$\leqq \sum_{j=1}^{n} (y_j - y_{j-1}) \cdot \overline{m}_{\alpha(x)}\{E_x(f \geqq y_{j-1})\}. \tag{34}$$

$\overline{m}_{\alpha(x)}\{E_x(f \geqq y)\}$ ist eine beschränkte, monotone Funktion von y. Nach einer bekannten Schlußmethode wird dadurch jede der in (34) vorkommenden Summen einen Grenzwert haben und dieser ist für beide derselbe. Er muß somit gleich $\overline{\int_a^b} f(x)\, d\,\alpha(x)$ sein. Damit ist (32) bewiesen; auf gleiche Weise folgt (33).

§ 13. **Definition 11.** $f(x)$ sei beschränkt und $\alpha(x)$ von beschränkter Variation im abgeschlossenen Intervall (a, b). Dann wird $f(x)$ in (a, b) $\alpha(x)$-

[33]) Hierbei wird auch ein einzelner, auf $y = a$ liegender Punkt als Ordinatenstück von O betrachtet.

meßbar (J) sein, wenn für jedes reelle y, mit Ausnahme höchstens abzählbar unendlich vieler y-Werte, diejenigen Punkte (x) von (a, b) mit $f(x) \geqq y$ eine lineare Menge bilden, welche $\alpha(x)$-meßbar (J) ist (siehe § 2).

Satz XVII. Damit die für $a \leq x \leq b$ beschränkte Funktion $f(x)$ ein R.-S. Integral über (a, b) habe in bezug auf die nichtabnehmende Funktion $\alpha(x)$, ist notwendig und hinreichend, daß $f(x)$ $\alpha(x)$-meßbar (J) sei in (a, b).

Sind g und G die untere bzw. obere Schranke von $f(x)$ im abgeschlossenen Intervall (a, b) und sind die Teilungspunkte (y_j) von (g, G'), wobei $G' > G$ sein soll, derartig gewählt, daß

$$g = y_0 < y_1 < y_2 \dots < y_n = G'$$

ist und daß die Teilmengen $\{E_x(f \geqq y_j)\}$ von (a, b) für jedes j $\alpha(x)$-meßbar (J) sind, so wird

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x) = \lim_{\delta \to 0} \sum_{j=1}^{n} y_{j-1} \cdot m_{\alpha(x)} \{E_x(y_{j-1} \leqq f < y_j)\}$$

sein. δ deutet hierbei die größte der Intervalllängen $(y_j - y_{j-1})$ der Teilung von (g, G') an. (Lebesgue-Radonsche Definition bei nicht abnehmender Determinante).

Beweis. Für die Existenz von $\int_a^b f(x)\, d\alpha(x)$ ist notwendig und hinreichend die Integrierbarkeit (R-S) über (a, b) und in bezug auf $\alpha(x)$ der nichtnegativen Funktion $h(x) = f(x) - g$.

Da $\overline{m}_{\alpha(x)}\{E_x(h \geqq y)\}$ und $\underline{m}_{\alpha(x)}\{E_x(h \geqq y)\}$ monoton nicht-zunehmende Funktionen von y sind, so werden sie gleichzeitig stetig sein für alle y-Werte, welche nicht zu einer höchstens abzählbar unendlichen Menge K_y gehören.

Nach Hilfssatz C ist, wenn $0 = \bar{y}_0 < \bar{y}_1 < \bar{y}_2 \dots < \bar{y}_n = G' - g$ und $\bar{\delta}$ das Maximum der Differenzen $(\bar{y}_{j+1} - \bar{y}_j)$ ist:,

$$\overline{\int_a^b} h(x)\, d\alpha(x) = \lim_{\bar{\delta} \to} \sum_{j=1}^{n} (\bar{y}_j - \bar{y}_{j-1}) \cdot \overline{m}_{\alpha(x)} \{E_x(h \geqq \bar{y}_j)\} \tag{35}$$

und

$$\underline{\int_a^b} h(x)\, d\alpha(x) = \lim_{\bar{\delta} \to 0} \sum_{j=1}^{n} (\bar{y}_j - \bar{y}_{j-1}) \cdot \underline{m}_{\alpha(x)} \{E_x(h \geqq \bar{y}_j)\}.$$

Diese beiden Grenzwerte können dann und nur dann einander gleich sein, wenn für alle y-Werte, welche nicht zu K_y gehören,

$$\overline{m}_{\alpha(x)} \{E_x(h \geqq y)\} = \underline{m}_{\alpha(x)} \{E_x(h \geqq y)\}$$

ist; dies folgt aus der Tatsache, daß das äußere $\alpha(x)$-Maß (J) einer Menge mindestens gleich ihrem inneren $\alpha(x)$-Maße (J) ist. Aber damit ist bewiesen, daß die im obigen Satze genannte Bedingung für die Existenz von $\int_a^b f(x)\, d\alpha(x)$ notwendig und hinreichend ist.

Existiert $\int_a^b h(x)\, d\alpha(x)$ und wählt man die Teilungspunkte $(\bar{y}_j)$ von $(0, G' - g)$ derartig daß die Mengen $\{E_x(h \geqq \bar{y}_j)\}$ $\alpha(x)$-meßbar (J) sind, so läßt sich statt (35) schreiben:

$$\int_a^b h(x)\, d\alpha(x) = \lim_{\bar{\delta} \to 0} \sum_{j=1}^{n} (\bar{y}_j - \bar{y}_{j-1}) \cdot m_{\alpha(x)} \{E_x(h \geqq \bar{y}_j)\}. \tag{36}$$

Da

$$\sum_{j=1}^{n} (\bar{y}_j - \bar{y}_{j-1}) \cdot m_{\alpha(x)} \{E_x(h \geqq \bar{y}_j)\} = -\bar{y}_0 \cdot m_{\alpha(x)} \{E_x(h \geqq \bar{y}_1)\}$$
$$+ \sum_{j=1}^{n-1} \bar{y}_j \cdot m_{\alpha(x)} \{E_x(\bar{y}_j \leqq h < y_{j+1})\} + \bar{y}_n \cdot m_{\alpha(x)} \{E_x(h \geqq \bar{y}_n)\}$$

und $\bar{y}_0 = 0$, $m_{\alpha(x)} \{E_x(h \geqq \bar{y}_n)\} = 0$ ist, so läßt sich wieder statt (36) schreiben:

$$\int_a^b h(x)\, d\alpha(x) = \lim_{\bar{\delta} \to 0} \sum_{j=1}^{n} \bar{y}_{j-1} \cdot m_{\alpha(x)} \{E_x(\bar{y}_{j-1} \leqq h < \bar{y}_j)\}. \tag{37}$$

Setzt man für jedes j $y_j = \bar{y}_j + g$, so geht jede Teilung von $(0, G' - g)$ in eine Teilung von (g, G') über und das Maximum δ der zugehörigen Intervalllängen wird gleich $\bar{\delta}$ sein. Aus (37) folgt dadurch:

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x) = \int_a^b h(x)\, d\alpha(x) + g \cdot [\alpha(b) - \alpha(a)]$$
$$= \lim_{\delta \to 0} \sum_{j=1}^{n} y_{j-1} \cdot m_{\alpha(x)} \{E_x(y_{j-1} \leqq f < y_j)\}.$$

Satz XVIII. Wird von $\alpha(x)$ nur gefordert, daß sie in (a, b) von beschränkter Variation sei, so bleibt Satz XVII gelten. (Lebesgue-Radonsche Definition des R.-S. Integrals)[34].

[34]) Lebesgue bemerkt l. c.[6]), S. 284 (Fußnote), daß die Funktionen, $\alpha(x)$-meßbar (J), mit den Funktionen, welche ein R.-S. Integral in bezug auf $\alpha(x)$ haben, identisch sind. Er nimmt dabei das R.-S. Integral in nicht-verallgemeinertem Sinne und bei der Definition

Beweis. Nach Satz III ist zur Existenz von $\int\limits_a^b f(x)\,d\,\alpha(x)$ notwendig und hinreichend die Existenz von $\int\limits_a^b f(x)\,d\,V(x)$, wobei $V(x)$ die Totalvariation von $\alpha(x)$ über (a, x) darstellt. Dazu ist, nach Satz XVII und Definition 11, wieder notwendig und hinreichend, daß $f(x)$ in (a, b) $V(x)$-meßbar (J), oder auch $\alpha(x)$-meßbar (J) sei.

Sind g und G die untere bzw. obere Schranke von $f(x)$ im abgeschlossenen Intervall (a, b), ist $G' > G$ und haben die Teilungspunkte $g = y_0 < y_1 < y_2 \ldots < y_n = G'$ von (g, G') die Eigenschaft, daß für jedes j $E_x(f \geqq y_j)$ $\alpha(x)$-meßbar (J) ist, so wird nach den Sätzen IV und XVII und dem Anfang von § 2:

$$\int\limits_a^b f(x)\,d\,\alpha(x) = \int\limits_a^b f(x)\,d\,P(x) - \int\limits_a^b f(x)\,d\,N(x)$$

$$= \lim_{\delta \to 0} \sum_{j=1}^{n} y_{j-1} \cdot m_{P(x)}\{E_x(y_{j-1} \leqq f < y_j)\} - \lim_{\delta \to 0} \sum_{j=1}^{n} y_{j-1} \cdot m_{N(x)}\{E_x(y_{j-1} \leqq y < y_j)\}$$

$$= \lim_{\delta \to 0} \sum_{j=1}^{n} y_{j-1} \cdot m_{\alpha(x)}\{E_x(y_{j-1} \leqq f < y_j)\}$$

sein; hierbei deuten $P(x)$ und $N(x)$ die positive bzw. negative Totalvariation von $\alpha(x)$ über (a, x) an und ist δ das Maximum der Intervalllängen $(y_j - y_{j-1})$.

§ 14. Zum Schluß wollen wir die Lebesgue-Radonsche Definition anwenden beim Beweise eines Satzes über den Grenzübergang unter dem Integralzeichen.

Hilfssatz. $\alpha(x)$ *sei von beschränkter Variation im abgeschlossenen Intervall* (a, b); $f(x)$ *sei in* (a, b) $\alpha(x)$-*meßbar* (J) *und Grenzfunktion einer Folge von Funktionen* $\{f_n(x)\}$, *welche in* (a, b) *ebenfalls* $\alpha(x)$-*meßbar* (J) *sein sollen. Bezeichnet man dann bei willkürlich positivem* ε *mit* $E(n, \varepsilon)$ *die Teilmenge von* (a, b), *in deren Punkten* (x):

$$|f_n(x) - f(x)| > \varepsilon$$

der $\alpha(x)$-Meßbarkeit (J) von Funktionen läßt er nicht die Möglichkeit der Existenz zu von den hier in Definition 11 zugelassenen Ausnahmepunkten. A. Rosenthal hat jedoch für $\alpha(x) \equiv x$ eine sogar stetige Funktion konstruiert, welche somit ein R.-S. Integral nach $\alpha(x) \equiv x$ hat (das mit dem gewöhnlichen R. Integral zusammenfällt) und dennoch nicht $\alpha(x)$-meßbar (J) im Lebesgueschen Sinne ist. (Man siehe Rosenthal, Neuere Untersuchungen über reelle Funktionen 1924, S. 1044 (Fuszn. 593)).

ist, so wird, wenn $V(x)$ *die Totalvariation von* $\alpha(x)$ *über* (a, x) *darstellt,*

$$\lim_{n \to \infty} \overline{m}_{V(x)}\{E(n, \varepsilon)\} = 0$$

sein.

Beweis. Aus der Definition 11 folgt, daß es bei willkürlich positivem ε ein positives $\eta < \varepsilon$ gibt mit der Eigenschaft, daß die Punktmengen $\{E(n, \eta)\}$ für jede natürliche Zahl n $\alpha(x)$-meßbar (J) sind.

Nun muß $\lim\limits_{n \to \infty} m_{V(x)}\{E(n, \eta)\} = 0$ sein.

Sonst existierte eine positive Zahl L und daneben eine unendliche Teilfolge $\{f_\nu(x)\}$ aus den $\{f_n(x)\}$, so daß für jedes ν

$$m_{V(x)}\{E(\nu, \eta)\} > L$$

wäre. Aus der Definition des inneren $V(x)$-Maßes geht hervor, daß es dann zu jedem ν eine Menge von endlich vielen abgeschlossenen Intervallen $\{i_\nu^{(k)}\}$ und von endlich vielen Unstetigkeitspunkten $\{x_\nu^{(k)}\}$ von $V(x)$ geben würde, welche sämtlich zu $E(\nu, \eta)$ gehörten und deren $V(x)$-Gesamtmaß (J) größer als $L/_2$ wäre.

Mittels $t = V(x)$ lassen sich die Punkte des abgeschlossenen Intervalls (a, b) abbilden auf die Punkte des abgeschlossenen Intervalls $[t_1 = V(a) = 0;\ t_2 = V(b)]$; dabei gehen die Funktionen $\{f_n(x)\}$, $f(x)$ über in Funktionen $\{\varphi_n(t)\}$, $\varphi(t)$ und es ist $\varphi(t) = \lim\limits_{n \to \infty} \varphi_n(t)$[35]. Die zu einem bestimmten ν gehörenden Intervalle $\{i_\nu^{(k)}\}$ und Punkte $\{x_\nu^{(k)}\}$ würden dabei abgebildet auf eine Menge K_ν der t-Achse, welche eine Teilmenge von endlich vielen, nicht übereinander greifenden und offenen Intervallen $\{v_\nu^{(j)}\}$ enthielte, deren Gesamtlänge ebenfalls $> L/_2$ wäre.

Nach einem Lemma von Arzelà, das sich ganz elementar ableiten läßt[36], würde es nun eine unendliche Teilfolge $\{\nu'\}$ aus der Foge $\{\nu\}$ geben und zu jedem ν' ein Intervall $v_{\nu'}^{(j_{\nu'})}$, derartig, daß die Intervalle $\{v_{\nu'}^{(j_{\nu'})}\}$ mindestens einen Punt τ gemeinsam hätten. In diesem Punkte könnten sodann die $\varphi_n(\tau)$-Werte nicht konvergent sein bei zunehmendem n. Wir gelangten somit zu einem Widerspruch.

[35]) Zu einem Punkt t, der Bildpunkt eines Intervalls u der x-Achse ist, auf dem $V(x)$ konstant bleibt, gehören unendlich viele konvergente $\{\varphi_n(t)\}$-Folgen, jede für sich korrespondierend zu einem bestimmten Pnnkte x von u.

[36]) Es lautet: „Wenn irgendeine Folge von Intervallmengen aus einem beschränkten Gebiete vorgelegt ist, deren Maße durchweg oberhalb einer wesentlich positiven Schranke liegen, so gibt es mindestens einen Punkt, der unendlich vielen dieser Intervallmengen angehört". Siehe Arzelà, Rend. Acc. Lincei (4) 1 (1885), S. 262—266 oder Bieberbach, Math. Ztschr. 2 (1918), S. 155—157.

Also wird $\lim\limits_{n\to\infty} m_{V(x)}\{E(n,\eta)\}=0$ und umsomehr $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{m}_{V(x)}\{E(n,\varepsilon)\}=0$ sein müssen.

Satz XIX. $\alpha(x)$ sei von beschränkter Variation im abgeschlossenen Intervall (a, b). Wenn es dann eine Folge von Funktionen $\{f_n(x)\}$ gibt, welche in (a, b) gleichmäßig beschränkt und $\alpha(x)$-meßbar (J) sind und mit zunehmendem n nach einer Funktion $f(x)$ konvergieren, welche in (a, b) $\alpha(x)$-meßbar (J) ist, so wird

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,d\alpha(x)$$

sein.

Beweis. Aus der gleichmäßigen Beschränktheit der $\{f_n(x)\}$ und der Konvergenz dieser Folge nach $f(x)$ folgt, daß es eine positive Zahl G gibt mit der Eigenschaft, daß

(38) $$|f(x)-f_n(x)|<G$$

ist in jedem Punkte x von (a, b) und für jede natürliche Zahl n.

Bei willkürlich positivem η gibt es, nach dem obigen Hilfssatze, eine natürliche Zahl N, derartig, daß für jedes ganze, aber fest gewählte $n \geqq N$ die Punkte (x) von (a, b), in welchen

(39) $$|f(x)-f_n(x)|\leqq\frac{\eta}{2V(b)}$$

nicht gilt, eine Menge $E(n,\eta)$ bilden mit

(40) $$\overline{m}_{V(x)}\{E(n,\eta)\}<\frac{\eta}{2G};$$

hierbei ist $V(x)$ die Totalvariation von $\alpha(x)$ über (a, x).

Bei jedem $n\geqq N$ läßt sich die zugehörige Menge $E(n,\eta)$ einschließen in eine Menge von endlich vielen, nicht übereinander greifenden und offenen Intervallen $\{v_n^{(k)}\}$, deren $V(x)$-Gesamtmaß (J) auch noch kleiner als $\frac{\eta}{2G}$ ist.

Es sei $\{\varepsilon_j\}$ eine Folge von positiven, mit zunehmendem j nach Null konvergierenden Zahlen. Zu jedem ε betrachten wir für die Funktion $f(x)-f_n(x)$ eine $\varepsilon_j^{(n)}$-Summe über (a, b) in bezug auf $\alpha(x)$; dabei soll jeder Punkt, der Endpunkt eines der Intervalle $\{v_n^{(k)}\}$ ist, eins oder, im Falle daß $\alpha(x)$ in diesem Punkte unstetig ist, zwei Teilungspunkte der zugehorigen $\varepsilon_j^{(n)}$-Teilung liefern[37]).

[37]) Außerdem sei hierbei für die Punkte x_{j-1}, x_j, ξ_j (man siehe die Definition 4):
$$x_{j-1}<\xi_j<x_j.$$

Aus (38), (39) und (40) folgt dann, daß für jedes ε_j der absolute Wert der $\varepsilon_j^{(n)}$-Summe kleiner als

$$G\cdot\frac{\eta}{2G}+\frac{\eta}{2V(b)}\cdot V(b)=\eta$$

sein muß. Aber dann muß, nach Definition 5, für den betrachteten Wert von n auch

$$\left|\int_a^b [f(x)-f_n(x)]\,d\alpha(x)\right|<\eta$$

sein. Damit ist der Satz bewiesen.

Es wäre nicht schwer weitere bekannte Sätze über Grenzfunktionen beim Riemannschen Integral[38]), unter Anwendung der Definition des $\alpha(x)$-Maßes (J), zu übertragen auf R.-S. Integrale.

Auch bemerken wir, daß die drei Definitionen des (verallgemeinerten) R.-S. Integrals von Funktionen einer Veränderlichen sich derartig abändern lassen, daß sie für Funktionen beliebig vieler Veränderlicher gelten.

[38]) Man vergleiche Ridder, Comptes rendus Soc. Sci Varsovie 22 (1929), S. 118—142.