Sur l'équation différentielle $x'' + xA(t) = 0$

(O równaniu różniczkowem $x'' + xA(t) = 0$)

par

H. Milloux

Introduction.

Sous ce même titre, M. Biernacki a déjà publié un interessant article [1]), où il applique, à l'étude, pour les grandes valeurs de t, de l'allure des intégrales de l'équation différentielle, un théorème de Borel, complété par R. Nevanlinna, sur les fonctions croissantes. Son étude concerne principalement le cas où la fonction $A(t)$ croît et tend vers l'infini avec t.

Dans l'étude qui va suivre, où je complète et précise certains des résultats de M. Biernacki, je me suis placé exclusivement dans le cas où $A(t)$ tend vers l'infini en croissant. Utilisant un procédé employé par Fatou [2]), je montre le parti que l'on peut tirer, dans l'étude des intégrales $x(t)$, de la transformation

$$x = r\cos\varphi$$

r et φ étant liés par la relation

$$\varphi = \int \frac{c\,dt}{r^2}.$$

On est amené à déduire l'allure de *toutes* les intégrales $x(t)$ de l'allure *d'une* intégrale $r(t)$ de l'équation différentielle

$$r'' - \frac{c^2}{r^3} + rA(t) = 0.$$

---

[1]) Prace Mat. Fiz. t. XL, 1933, p. 163—171.

[2]) Fatou, Problème d'Agrégation 1926, et: Sur un critère de stabilité (C. R. Ac. des Sc., 2 déc. 1929).

En effet, on a alors

$$x = C r \cos(\varphi + h).$$

Réciproquement, les propriétés connues des intégrales $x(t)$ permettent d'obtenir des propriétés des intégrales $r(t)$. Suivant les besoins, nous utiliserons soit l'une soit l'autre des deux méthodes.

Je commence par étudier le cas où l'intégrale $r(t)$ décroît constamment. Je montre que, sauf pour des intervalles de temps t exceptionnels, on a:

$$r(t) = \sqrt{c}\,[A(t)]^{-\frac{1}{4}}[1 + \varepsilon(t)].$$

La fonction $\varepsilon(t)$, de signe quelconque, tend vers zéro avec $\frac{1}{t}$.

Ensuite, j'étudie le cas où l'intégrale $r(t)$ est indéfiniment oscillante, et d'abord les intervalles de temps qui séparent deux extrema consécutifs. On ne peut pas affirmer que l'intégrale $r(t)$ tend vers 0, mais on peut obtenir des limites supérieure et inférieure de la décroissance vers 0 des minima successifs de $r(t)$. Des propriétés des intégrales $x(t)$ s'en déduisent.

Je montre, en application de cette étude, et pour répondre à une question de M. Biernacki, que dans tous les cas, il existe une intégrale $x(t)$ tendant vers zéro lorsque t tend vers l'infini. Cette affirmation semble n'être intéressante que si $\overline{\lim}\, r(t)$ est positive, mais on peut la préciser dans d'autres cas [décroissance spéciale d'une des intégrales $x(t)$ par rapport aux autres]. Je fixe la loi de décroissance de l'intégrale exceptionnelle $x(t)$ tendant vers zéro dans un exemple simple où $\overline{\lim}\, r(t)$ est positive.

Enfin, je suppose que la fonction $A(t)$ obéit à certaines conditions, très larges d'ailleurs, de régularité, qu'elle est dérivable, et que sa dérivée satisfait à des conditions, également très larges, de régularité. Je montre que toutes les intégrales $x(t)$ tendent vers zéro (M. Biernacki l'avait déjà fait dans des conditions analogues), mais en précisant de plus que toute intégrale $r(t)$ tend vers zéro entre deux expressions de la forme $[A(t)]^{-0(1)}\cdot$ [$0(1)$ est une quantité positive, bornée et $\neq 0$].

1. Prenons l'équation différentielle en r, et partons d'une valeur r_0 rendant négative la quantité r_0'', en supposant, pour fixer les idées, r_0' nul. r décroît, et peut tendre vers zéro lorsque t augmente indéfiniment, en décroissant constamment, comme le montre l'exemple de

$$A(t) = c^2 t^4 - \frac{2}{t^2}$$

pour t assez grand: on a en effet la solutoin $r = \frac{1}{t}$.

L'origine peut-elle être atteinte au bout d'un temps fini? Supposons cette hypothèse vérifiée; $A(t)$ est alors inférieure à une constante positive K. On a donc

$$r'' > \frac{c^2}{r^3} - r k$$

d'où, en multipliant par r' (qui est négatif) et intégrant:

$$r'^2 + \frac{c^2}{r^2} + r^2 k < \frac{c^2}{r_0^2} + r_0^2 k$$

qui montre que r ne peut tendre vers zéro.

Dans l'hypothèse de la décroissance continue de l'intégrale $r(t)$, nous avons écarté le cas où cette intégrale tendrait vers une constante positive a; en effet, si t est assez grand, l'expression $\frac{c^2}{r^3} - r A(t)$ est, aux environs de a, très grande en valeur absolue et négative, d'où l'impossibilité.

2. Comparons, dans le cas de décroissance continue de $r(t)$, cette décroissance à la croissance de $A(t)$.

Nous étudierons en même temps les propriétés des intégrales $x(t)$ de la forme $r\cos(\varphi + h)$, les autres s'en déduisant par multiplication par une constante.

Choisissons l'intégrale $x(t)$ qui s'annule pour $t = t'$. Elle passe ensuite par un extremum x_n, pour $t = z_n$, puis s'annule à nouveau pour $t = t''$. Mettant cette intégrale sous la forme $x = r\sin\varphi$, on voit que la variation de φ est π.

De l'identité

$$x' = r'\sin\varphi + \frac{c}{r}\cos\varphi$$

on tire

$$|x'(t')| = \frac{c}{r(t')}; \qquad |x'(t'')| = \frac{c}{r(t'')}.$$

Or

$$x'^2(t') = 2\int_0^{x_n} x A(t)\, dx$$

et le deuxième membre est compris entre $A(t')x_n^2$ et $A(z_n)x_n^2$. De même, $x'^2(t'')$ est compris entre $A(z_n)x_n^2$ et $A(t'')x_n^2$. Donc $\frac{x'(t'')}{x'(t')}$, c'est-à-dire $\frac{r(t')}{r(t'')}$, est compris entre 1 et $\sqrt{\frac{A(t'')}{A(t')}}$.

Rappelons que l'intervalle de temps Δt séparant les deux zéros consécutifs de $x(t)$ est compris entre $\frac{\pi}{\sqrt{A(t'')}}$ et $\frac{\pi}{\sqrt{A(t')}}$. Or:

$$\int_{t'}^{t''} \frac{c\,dt}{r^2} = \pi.$$

En majorant ou minorant Δt et $\frac{1}{r^2}$, on obtient deux inégalités, qui, jointes aux bornes du rapport $\frac{r(t')}{r(t'')}$, fournissent le groupe d'inégalités:

$$(1) \qquad \begin{cases} \sqrt{c}\,[A(t'')]^{-\frac{3}{4}}[A(t')]^{\frac{1}{2}} \leqslant r(t'') \leqslant \sqrt{c}\,[A(t')]^{-\frac{1}{4}} \\ \sqrt{c}\,[A(t'')]^{-\frac{1}{4}} \leqslant r(t') \leqslant \sqrt{c}\,[A(t')]^{-\frac{3}{4}}[A(t'')]^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

3. Ces inégalités nous montrent que si l'intervalle t', t'' est *ordinaire* [1]), c'est-à-dire si le rapport $\frac{A(t'')}{A(t')}$ est de la forme $1+\varepsilon(t')$ $\left[\varepsilon(t')\right.$ tendant vers zéro avec $\left.\frac{1}{t'}\right]$, alors on a, dans tout cet intervalle:

$$r(t) = \sqrt{c}\,[A(t)]^{-\frac{1}{4}}\,[1+\varepsilon(t)].$$

Ici, la fonction $\varepsilon(t)$, tendant vers zéro avec $\frac{1}{t}$, est de signe non déterminé.

L'exemple cité au début du n⁰ 1 illustre ce cas de décroissance de $r(t)$, et de la valeur limite $\sqrt{c}$ de l'expression $r(t)\,[A(t)]^{-\frac{1}{4}}$.

4. *Conséquence pour les intégrales* $x(t)$. — Dans cet intervalle t' t'', toujours supposé ordinaire pour simplifier, la variation totale de φ est π, de sorte que $|\cos(\varphi+h)|$ passe toujours par la valeur 1. On voit par conséquent que l'on a:

$$\mathrm{Max}\,|x(t)| = \sqrt{c}\,[A(t)]^{-\frac{1}{4}}\,[1+\varepsilon(t)].$$

5. L'étude précédente s'applique encore au cas de décroissance de $r(t)$ à partir seulement d'une certaine valeur de t.

Nous pouvons donc passer maintenant à l'étude des intégrales $r(t)$ *indéfiniment oscillantes*.

---

[1]) Voir le mémoire cité de M. Biernacki.

$r(t)$ partant de la valeur r_0, avec une vitesse de départ nulle, on suppose toujours r_0'' négatif, de sorte que r décroît, jusqu'à une certaine valeur r_1 pour laquelle la vitesse s'annule à nouveau, pour changer de signe (r_1'' est positif); r se met à croître; il ne peut croître indéfiniment, comme le montre sans peine la valeur de r'' [ou les propriétés bien connues des intégrales $x(t)$]; r tend vers un nouveau maximum r_2 (atteint au bout d'un temps fini) puis décroît, et ainsi de suite.

Etudions la suite des extrema, et des temps correspondants $t_0\ t_1 \ldots t_{2n}\ t_{2n+1} \ldots$

Nous utiliserons principalement l'égalité

$$(2) \qquad r'^2 + \frac{c^2}{r^2} + 2\int^{r} r\,A(t)\,dr = C^{te}$$

tirée de l'équation différentielle en r, préalablement multipliée par r' puis intégrée.

6. *Relations d'inégalité entre deux extrema consécutifs* r_m *et* r_{m+1}. — Ces relations sont déjà formulées, dans le probléme d'Agrégation cité en note dans l'introduction, sous une forme plus générale, la fonction $A(t)$ étant seulement positive.

Indiquons brièvement la démonstration, en conservant l'hypothèse de croissance de $A(t)$; la relation (2) appliquée à deux extrema consécutifs donne

$$\frac{c^2}{r_{m+1}^2} - \frac{c^2}{r_m^2} + 2\int_{r_m}^{r_{m+1}} r\,A(t)\,dr = 0$$

d'où l'on déduit aisément:

Deux extrema successifs r_m *et* r_{m+1} *de* $r(t)$ *sont tels que* $\frac{c}{r_m r_{m+1}}$ *est compris entre* $\sqrt{A(t_m)}$ *et* $\sqrt{A(t_{m+1})}$.

On voit que les maxima décroissent, ou exceptionnellement sont stationnaires dans le seul cas où $A(t)$ est constant dans l'intervalle des deux maxima. Les minima décroissent également, et *tendent vers* 0.

7. *Evaluation minimum de* $t_{2n}-t_{2n-1}$. $r(t)$ est alors une fonction croissante de t. En donnant à la constante qui figure dans l'égalité (2) la valeur du premier membre correspondant au maximum, on tire de cette égalité l'inégalité

$$r'^2 \leqslant \left[A(t_{2n}) - \frac{c^2}{r^2 r_{2n}^2}\right](r_{2n}^2 - r^2)$$

d'où en intégrant cette inégalité

$$t_{2n}-t_{2n-1}\geqslant\frac{1}{\sqrt{A(t_{2n})}}\left[\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arc\,tg}\sqrt{\frac{r_{2n-1}^2-\frac{c^2}{r_{2n}^2A(t_{2n})}}{r_{2n}^2-r_{2n-1}^2}}\right].$$

On peut simplifier cette inégalité en remplaçant l'Arc tg par la quantité plus grande Arc sin $\frac{r_{2n-1}}{r_{2n}}$. On constate alors que si r_{2n-1} est inférieur à $\frac{1}{2}r_{2n}$, on a:

$$t_{2n}-t_{2n-1}\geqslant\frac{0(1)}{\sqrt{A(t_{2n})}}.$$

On peut même préciser ce dernier point, en remarquant que le numérateur de l'argument de la tangente est inférieur à $r_{2n-1}\sqrt{1-\frac{A(t_{2n-1})}{A(t_{2n})}}$.

On peut en déduire que si t_{2n} est dans un intervalle ordinaire, et toujours à la condition que r_{2n-1} soit inférieur à $\frac{1}{2}r_{2n}$, le produit $(t_{2n}-t_{2n-1})\sqrt{A(t_{2n})}$ est supérieur à une quantité voisine de $\frac{\pi}{2}$, de même, d'ailleurs, que dans le cas où le rapport $\frac{r_{2n}}{r_{2n-1}}$ est très grand.

8. *Evaluation minimum de* $t_{2n+1}-t_{2n}$. — $r(t)$ est une fonction décroissante de t. En donnant à la constante qui figure dans l'égalité (2) la valeur du premier membre correspondant au minimum, on est conduit à poser

$$2\int_{r_{2n+1}}^{r} rA(t)\,dr=(r^2-r_{2n+1}^2)\,\alpha(t).$$

La fonction $\alpha(t)$ est croissante en t, décroissante par rapport à r. Sa valeur minimum est donc $\alpha(t_{2n})$; par suite, dans tout le mouvement, on a:

$$r'^2\leqslant(r^2-r_{2n+1}^2)\left[\frac{c^2}{r^2r_{2n+1}^2}-\alpha(t_{2n})\right].$$

L'égalité doit d'ailleurs avoir lieu pour $t=t_{2n}$. Or, pour cette valeur, r'^2 est nul; ceci nous donne la valeur exacte de $\alpha(t_{2n})$ et l'inégalité précédente s'écrit:

$$r^2r'^2\leqslant\frac{c^2}{r_{2n}^2r_{2n+1}^2}(r^2-r_{2n+1}^2)(r_{2n}^2-r^2)$$

d'où l'inégalité

$$t_{2n+1}-t_{2n}\geqslant\frac{\pi}{2}\frac{r_{2n}\,r_{2n+1}}{c}\geqslant\frac{\pi}{\sqrt{A(t_{2n+1})}}.$$

Cette inégalité entraîne la conséquence qu'un intervalle de temps fini ne comprend qu'un nombre fini d'oscillations de l'intégrale $r(t)$. Il n'en est pas de même si on abandonne l'hypothèse de la croissance de la fonction $A(t)$, comme le montre l'exemple où

$$r=2+(t-a)^5\sin\frac{1}{t-a}$$

l'équation différentielle en r permet de calculer $A(t)$ et de constater que cette fonction est positive aux environs de $t=a$. Mais elle n'est pas non-décroissante.

9. *Evaluation maximum de* $t_{2n}-t_{2n-1}$. Donnons à la constante du deuxième membre de l'égalité (2) la valeur du premier membre pour le minimum. De même qu'au n° 8, nous sommes conduits à poser

$$2\int_{r_{2n-1}}^{r} rA(t)\,dr=(r^2-r_{2n-1}^2)\,\beta(t).$$

La fonction $\beta(t)$ est une fonction croissante en t. La méthode du n° 8 s'applique d'une façon analogue et conduit à l'inégalité

$$t_{2n}-t_{2n-1}\leqslant\frac{\pi}{2}\cdot\frac{r_{2n-1}\,r_{2n}}{c}\leqslant\frac{\pi}{2\sqrt{A(t_{2n-1})}}.$$

10. *Evaluation maximum de* $t_{2n+1}-t_{2n}$. Donnons à la valeur de la constante de l'égalité (2) la valeur du premier membre pour le maximum. On en déduit l'inégalité

$$r'^2\geqslant(r_{2n}^2-r^2)\left[A(t_{2n})-\frac{c^2}{r^2r_{2n}^2}\right]$$

qui n'est bien entendu, interessante que si la quantité entre crochets est positive. Posons

$$r_\alpha=\frac{c}{r_{2n}\sqrt{A(t_{2n})}}.$$

Il vient, entre t_{2n} et t_α:

$$r^2r'^2\geqslant A(t_{2n})\left[(r_{2n}^2-r^2)(r^2-r_\alpha^2)\right]$$

d'où, en intégrant

$$(3) \qquad t_\alpha - t_{2n} \leqslant \frac{\pi}{2\sqrt{A(t_{2n})}}.$$

Que peut-on dire de l'intervalle de temps $t_\alpha t_{2n+1}$? Le rapport des deux termes composant r'', c'est-à-dire $\frac{c^2}{r^4 A(t)}$, est supérieur à $\frac{c^2}{r_\alpha^4 A(t_{2n+1})}$, c'est-à-dire $\frac{r_{2n}^4 A^2(t_{2n})}{c^2 A(t_{2n+1})}$. Supposons pour le moment ce dernier rapport supérieur à 2. Dans tout l'intervalle considéré, on a

$$r'' > \tfrac{1}{2}\frac{c^2}{r^3}$$

d'où multipliant par la quantité négative r' et intégrant:

$$r'^2 > \frac{c^2(r^2 - r_{2n+1}^2)}{2r^2 r_{2n+1}^2}.$$

Intégrant à nouveau:

$$t_{2n+1} - t_\alpha < \frac{r_{2n+1}}{c}\sqrt{2(r_\alpha^2 - r_{2n+1}^2)} < \frac{r_{2n+1}}{r_{2n}}\sqrt{\frac{2}{A(t_{2n})}}.$$

Cette inégalité, jointe à l'inégalité (3), nous permet d'énoncer le résultat suivant:

Soit t'_{2n+1} la valeur de t déterminée par l'égalité

$$(4) \qquad t'_{2n+1} - t_{2n} = \frac{1}{\sqrt{A(t_{2n})}}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{r_{2n+1}}{r_{2n}}\sqrt{2}\right] = \frac{0(1)}{\sqrt{A(t_{2n})}}.$$

Si l'on a l'inégalité

$$(5) \qquad A(t'_{2n+1}) < \frac{r_{2n}^4}{2c^2}[A(t_{2n})]^2$$

alors t_{2n+1} est inférieur à t'_{2n+1}.

11. *Comparaison entre les intégrales $x(t)$ et une intégrale $r(t)$.* Nous nous placerons dans un intervalle $t'\,t''$ limité par deux zéros consécutifs d'une intégrale $x(t)$, de sorte que $\varphi(t'') - \varphi(t')$ est égal à π. Nous supposerons que cet intervalle est *ordinaire*, de même, pour éviter toute difficulté, que les intervalles voisins. Nous pourrons nous borner à l'étude des intégrales de la forme $x = r\cos(\varphi + h)$.

1. *Cas. Dans l'intervalle envisagé, l'intégrale $r(t)$ possède un maximum r_{2n}.* φ étant déterminé à une constante additive près, on peut supposer φ nul lorsque r est maximum.

Les intégrales $x = r\sin(\varphi + h)$ satisfont alors à l'inégalité

$$\mathrm{Max}\,|x(t)| \geqslant r_{2n}|\sin h|$$

qui n'est interessante que si $|\sin h|$ n'est pas trop petit.

De toutes façons

$$\mathrm{Max}\,|x(t)| \geqslant \mathrm{Min}\, r(t) \geqslant r_{2n-1} = \frac{(1+\varepsilon)c}{r_{2n}\sqrt{A(t)}}.$$

[Il ne peut manifestement pas, d'après les limitations de $t_{2n} - t_{2n-1}$, $t_{2n-1} - t_{2n-2}$ et $t_{2n-2} - t_{2n-3}$, y avoir deux minima antécédents dans l'intervalle de temps envisagé]. ε est une petite quantité de signe quelconque.

Démontrons que l'expression $\frac{(1+\varepsilon)c}{r_{2n}\sqrt{A(t)}}$ est atteinte pour le Max. d'une certaine intégrale $x(t)$.

Considérons en effet le cas de $h = 0$. Alors $x(t_{2n})$ est nul, et l'on a, en dérivant $r\sin\varphi$:

$$x'(t_{2n}) = \frac{c}{r_{2n}}.$$

Rappelons que les maxima de $|x(t)|$ entourant un zéro et la valeur de $|x'(t)|$ pour ce zéro sont tels que leur rapport est de la forme $\sqrt{A(t)}(1+\varepsilon)$.

Il vient alors:

$$\mathrm{Max}\,|x(t)| = \frac{c(1+\varepsilon)}{r_{2n}\sqrt{A(t)}}.$$

2. *Cas. Dans l'intervalle $t'\,t''$, l'intégrale $r(t)$ possède un minimum r_{2n-1}.* Considérons l'intégrale $x = r\sin\varphi$ en nous arrangeant de façon que φ soit nul pour le minimum de r. Alors $x(t_{2n-1})$ est nul et

$$x'(t_{2n-1}) = \frac{c}{r_{2n-1}}.$$

Un calcul analogue au précédent nous donne:

$$\mathrm{Max}\,|x(t)| = r_{2n}(1+\varepsilon)$$

(ε est ici évidemment négatif).

La valeur de φ correspondant à ce max. étant φ_{2n}, on a:

$$\mathrm{Max}\,|r\sin(\varphi + h)| > r_{2n}(1+\varepsilon)|\sin(\varphi_{2n} + h)|$$

inégalité qui n'est intéressante que si $\sin(\varphi_{2n}+h)$ n'est pas trop petit. De toutes façons

$$\operatorname{Max}|x(t)| > \operatorname{Min.} r(t) = r_{2n-1},$$

car $|\sin(\varphi+h)|$ passe nécessairement par la valeur 1; et pour l'intégrale

$$x = r\cos\varphi$$

qui passe par un maximum pour $t = t_{2n-1}$ [x' est nul] on a:

$$\operatorname{Max}|x(t)| = r_{2n-1}.$$

Remarque. Dans ces deux cas, nous avons admis implicitement qu'il n'y avait qu'un max. ou un min. dans l'intervalle $t'\,t''$. D'après les limitations des temps séparant deux extrema, il pourrait y en avoir 2, mais pas plus; et d'ailleurs, comme l'intervalle est ordinaire, le rapport de ces deux max. (ou de ces deux min.) est très voisin de l'unité, de sorte que tous les résultats obtenus subsistent.

En résumé, dans les deux premiers cas, *les maxima des intégrales $x(t)$ sont de l'ordre de grandeur du maximum de l'intégrale $r(t)$ soit dans l'intervalle de temps considéré* (s'il y a un maximum) *soit dans les environs les plus immédiats de cet intervalle* (s'il n'y a pas de max., mais s'il y a un min.), *et ceci pour presque toutes les intégrales $x(t)$. Il existe toujours une intégrale $x(t)$, qu'on pourrait appeler intégrale minimum, et dont le max. est de l'ordre de grandeur du minimum de l'intégrale $r(t)$ soit dans l'intervalle de temps considéré, soit dans les intervalles voisins.*

3. *Cas. Dans l'intervalle $t'\,t''$, l'intégrale $r(t)$ est monotone.* Elle ne peut être croissante, en raison de la limitation effectuée au n° 9 et de la valeur de $t''-t'$ [1]). Elle est donc décroissante. Ce qui a été dit aux n° 2 et 3 dans le cas de la décroissance continue de l'intégrale $r(t)$ s'applique sans modification ici, de sorte que dans tout l'intervalle:

$$r(t) = [1+\varepsilon(t)]\sqrt{c}\,[A(t)]^{-\frac{1}{4}}$$

et, pour *toutes les intégrales* $x(t)$:

$$\operatorname{Max}|x(t)| = (1+\varepsilon)\sqrt{c}\,[A(t)]^{-\frac{1}{4}}$$

$\left[\varepsilon\right.$, positif ou négatif, tend vers 0 avec $\left.\frac{1}{t}\right]$.

12. Pour résumer cette étude (jointe à celle du n° 3 et du n° 4) *constatons que pour toutes les intégrales $x(t) = r\cos(\varphi+h)$, sauf peut-être une,*

[1]) C'est d'ailleurs une conséquence immédiate des inégalités du n° 2.

on a l'inégalité

$$\overline{\lim}\,|x(t)|\,[A(t)]^{\frac{1}{4}} \geqslant \sqrt{c}$$

Il ne peut y avoir une exception que dans le cas où l'intégrale $r(t)$ est indéfiniment oscillante, le rapport d'un max. au min. précedent tendant vers l'infini avec l'indice de ce max. Dans ce cas, si par ex.:

$$\lim .\, r_{2n}[A(t_{2n})]^{\alpha} = 0\ (1) \qquad (\text{avec } 0 < \alpha \leqslant \tfrac{1}{4})$$

on a

$$\overline{\lim}\ |x(t)|\,[A(t)]^{\alpha} > 0$$

sauf peut-être pour une intégrale satisfaisant à

$$\overline{\lim}\ |x(t)|\,[A(t)]^{\frac{1}{2}-\alpha} > 0$$

Dans tous les cas, d'ailleurs, on a évidemment:

$$\overline{\lim}\,|x(t)|\,[A(t)]^{\frac{1}{4}} \geqslant 0\ (1).$$

13. Appliquons encore l'étude précédente au cas où il existe une integrale $x_1(t)$ satisfaisant à la condition

$$\overline{\lim}\,|x_1(t)| > 0$$

Je vais démontrer, en réponse à une question que m'a posée M. Biernacki, qu'il existe toujours une intégrale $x(t)$ tendant vers zero.

La condition imposée entraîne

$$\overline{\lim}\, r(t) > 0$$

Toute intégrale $r(t)$ est donc indéfiniment oscillante; de plus, dans tout intervalle $t'\,t''$ séparant deux zéros consécutifs de $x_1(t)$, le max. de $|x_1(t)|$ est borné inférieurement; il en est donc de même de la borne sup. de $r(t)$. Dans la discussion du n° 11, le 3° cas est à rejeter. Designons par $t_1 t_2 \ldots t_n \ldots$ les zéros consécutifs de $x_1(t)$. Dans tout intervalle ordinaire $t_n t_{n+1}$, il y a un max. ou un min. de $r(t)$. Il existe donc une intégrale $x_n(t)$ telle que

$$\operatorname{Max.}|x_n(t)| = (1+\varepsilon)\operatorname{Min.} r(t)$$

Soit r_{2p-1}, ce minimum qui d'ailleurs peut n'étre atteint par r que dans les intervalles de temps contigüs. Comme les max. de r décroissent, et sont bornes inférieurement, ils tendent vers une constante positive a. On en deduit que

$$r_{2p-1} = \frac{(1+\varepsilon)c}{a}\,[A(t)]^{-\frac{1}{2}}$$

d'où

$$\operatorname{Max.}|x_n(t)| = (1+\varepsilon)\frac{c}{a}\,[A(t)]^{-\frac{1}{2}}$$

$x_n(t)$ est de la forme $r\cos(\varphi+k_n)$. On peut supposer k_n compris entre 0 et π; les k_n ont au moins une valeur limite k. Si l'intégrale $r\cos(\varphi+k)$ ne tendait pas vers zéro, dans un intervalle $t_n t_{n+1}$ supposé ordinaire, on aurait

$$\text{Max.}\,|r\cos(\varphi+k)|>0\,(1)$$

Or, $r\cos(\varphi+k)-r\cos(\varphi+k_n)$ est évidemment très petit, ce qui conduit à la contradiction. Remarquons que les k_n ne peuvent avoir plus d'une valeur limite, car sinon deux intégrales distinctes, et par suite toutes les intégrales $x(t)$, tendraient vers zéro.

14. Illustrons ce cas d'un exemple, où l'intégrale minimum $x_n(t)$ est la même dans tous les intervalles $t_n t_{n+1}$.

Partons de la valeur $x_1=1$ avec $x_1'=0$, pour $t_0=0$, et donnons à $A(t)$ une valeur quelconque positive A_0 qu'elle conservera un certain temps, jusqu'à ce que $x_1(t)$ soit à nouveau extremum, c'est-à-dire jusque $t_1=\dfrac{\pi}{\sqrt{A_0}}$. Dans l'intervalle, $x_1(t)=\cos\left(\sqrt{A_0}\,t\right)$. A partir de t_1, faisons $A(t)=A_1>A_0$ jusque $t_2=\dfrac{\pi}{\sqrt{A_1}}+t_1$, et ainsi de suite. Les extrema de $x_1(t)$ sont ± 1. L'intervalle $t_n t_{n+1}$ a pour longueur $\dfrac{\pi}{\sqrt{A_n}}$; $A(t)$ y est constant et égal à A_n. La suite des A_n est choisie de façon que $\Sigma\dfrac{1}{\sqrt{A_n}}$ soit divergente, et que A_n tende vers l'infini ($Ex: A_n=n^2$).

Soit maintenant $r(t)$ une intégrale telle que $r(0)=1$ $r'(0)=0$. On peut choisir c de façon que r_0'' soit négatif. $r(t)$ decroit, et, tant que t est inférieur à $\dfrac{\pi}{\sqrt{A_0}}$ on a:

$$r'^2+\frac{c^2}{r^2}=c^2+(1-r^2)A_0$$

d'où l'on déduit que r décroit jusque $\dfrac{c}{\sqrt{A_0}}$, valeur inférieure à 1, atteinte au bout du temps $\dfrac{\pi}{2\sqrt{A_0}}$.

A ce moment, $x_1(t)$ est nul; posant $x_1=r\cos\varphi$, (qui correspond aux conditions initiales) il vient $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$; $x_1'(t)$ est égal à $-\dfrac{1}{\sqrt{A_0}}$ et à $-\dfrac{c}{r}$ ce qui permet d'effectuer une vérification du calcul de r. Désignons par r_1 ce minimum de r.

Ensuite, $r(t)$ croît à nouveau, et l'on a d'après l'égalité (2):

$$r^2r'^2=A_0(r^2-r_1^2)\left(\frac{c}{A_0r_1^2}-r^2\right)=A_0(r^2-r_1^2)\,(1-r^2)$$

Au bout de ce nouveau temps $\dfrac{\pi}{2\sqrt{A_0}}$ r atteindra un nouveau max. r_2, évidemment égal à 1. $x(t)$ a atteint, de son côté, la valeur -1. Donc $\varphi=\pi$.

L'étude des propriétés de $r(t)$ dans les intervalles suivants s'effectue de la même manière que dans l'intervalle t_0t_1 et l'on peut énoncer la propriété: *Il existe une intégrale $r(t)$ atteignant ses max. r_{2n} égaux à 1 toutes les fois que $x_1(t)$ est extremum, c'est-à-dire en $t_0\ t_1\ldots\ t_n\ldots$; ses minima r_{2n+1} sont atteints aux milieux des intervalles $t_n\ t_{n+1}$ et sont égaux à $\dfrac{c}{\sqrt{A_n}}$; les valeurs de $x_1(t)$ correspondantes sont nulles.*

Propriétés des intégrales $x(t)$. — Soit l'intégrale (qu'on pourrait appeler *minimum*):

$$x_2(t)=r\sin\varphi$$

qui part de la valeur 0; $x_2'(0)=\dfrac{c}{r_0}=c$.

L'intégrale $x_2(t)$ croît, atteint son max. $\dfrac{x_2'(0)}{\sqrt{A_0}}=r_1$ pour $t=\dfrac{\pi}{2\sqrt{A_0}}$, puis décroit, repasse à l'origine pour $t=t_1$, ensuite passe par le minimum $-r_3$, s'annule à nouveau, et ainsi de suite. Les max. de $|x_2(t)|$ sont obtenus pour les milieux des intervalles $t_n\ t_{n+1}$ et ils sont égaux aux minima de r. On en déduit

$$\overline{\lim}\ |x_2(t)|\sqrt{A(t)}=1$$

Quant aux autres intégrales $x(t)$, elles sont de la forme $\alpha x_1+\beta x_2$ et leurs propriétés sont *asymptotiques* de celles de l'intégrale $x_1(t)$.

15. L'exemple précédent montre que, dans certains cas, l'intégrale $r(t)$ ne tend pas vers zéro.

Proposons-nous, en introduisant quelques précisions, de montrer que si la fonction $A(t)$ obéit à certaines conditions de régularité, l'intégrale tend vers zéro; le raisonnement employé permettra de limiter cette décroissance en fonction de $A(t)$.

M. Biernacki (mémoire cité) a déja fait une étude analogue pour les intégrales $x(t)$, mais dans des conditions plus restrictives que celles que nous imposons ici.

Considérons, comme plus haut, les valeurs de t pour lesquelles l'une des intégrales $x(t)$ s'annule: $t_0\, t_1 \ldots\, t_n\, t_{n+1} \ldots$ et choisissons 3 intervalles consécutifs (à partir de t_n) en les supposant ordinaires.

D'après la discussion qui a été faite plus haut (n^{os} 3 et 11), ou bien dans ces intervalles, on a

$$r(t) = 0(1)\sqrt{c}\,[A(t)]^{-\frac{1}{4}}$$

ou bien il y a un extremum de $r(t)$ (ou plusieurs extrema) dans chaque intervalle ordinaire. Dans les 3 intervalles consécutifs, il y a au moins 2 max. ou 2 min.; on pourra supposer qu'il y a au moins 2 max.

D'autre part, le rapport d'un max. à un min. peut être supposé assez grand, sinon $r(t)$ est encore égal à $0(1)\sqrt{c}\,[A(t)]^{-\frac{1}{4}}$; on pourra, pour fixer les idées, supposer que $\dfrac{r_{2p}}{r_{2p+1}}$ est supérieur à 4.

On a:

$$(6)\qquad \begin{aligned} \frac{c^2}{r_{2p+1}^2} - \frac{c^2}{r_{2p}^2} &= 2\int_{r_{2p+1}}^{r_{2p}} r\,A(t)\,dr \\ \frac{c^2}{r_{2p+1}^2} - \frac{c^2}{r_{2p+2}^2} &= 2\int_{r_{2p+1}}^{r_{2p+2}} r\,A(t)\,dr \end{aligned}$$

r_{2p+1} est inférieur ou égal à r_{2p}; nous nous proposons de limiter supérieurement le rapport de ces deux quantités, rapport d'ailleurs très voisin de l'unité.

Notons que $t_{2p+1} - t_{2p}$, comme nous l'avons vu au n° 8, est au moins égal à $\dfrac{\pi}{2\sqrt{A(t_{2p+1})}}$. Un calcul simple analogue au calcul du n° 8 établit que le temps effectué par r, dans son mouvement décroissant, pour aller de $\dfrac{r_{2p+2}}{2}$ [qui est très près de $\dfrac{r_{2p}}{2}$, et supérieur à une quantité voisine de $2\,r_{2p+1}$ d'après l'hypothèse faite plus haut] à r_{2p+1} est encore de la forme $\dfrac{0(1)}{\sqrt{A(t)}}$.

Posons

$$B(t) = A\left[t + \frac{0(1)}{\sqrt{A(t)}}\right] - A(t)$$

En retranchant les deux égalités (6), il vient

$$\frac{c^2}{r_{2p+2}^2} - \frac{c^2}{r_{2p}^2} = 2\int_{r_{2p+1}}^{r_{2p}} r\,A(t)\,dr - 2\int_{r_{2p+1}}^{r_{2p+2}} r\,A(t)\,dr < -\,0(1)\,B(t)\,r_{2p}^2 + 2\int_{r_{2p+2}}^{r_{2p}} r\,A(t)\,dr$$

Le 1. membre étant positif, on en déduit l'inégalité

$$r_{2p}^2 - r_{2p+2}^2 > 0(1)\,\frac{B(t)}{A(t)}\,r_{2p}^2$$

qui peut s'écrire

$$(7)\qquad \log\frac{r_{2p+2}}{r_{2p}} < -\,0(1)\,\frac{B(t)}{A(t)}$$

Supposons maintenant, pour fixer les idées, *que tous les intervalles sont ordinaires, que la fonction* $A(t)$ *est dérivable, et que sa dérivée* $A'(t)$ *est telle que le rapport de ses valeurs extrêmes dans l'un quelconque des intervalles ordinaires est de la forme* $0(1)$. Alors

$$\frac{B(t)}{A(t)} = 0(1)\int_{t_n}^{t_{n+2}} \frac{A'(t)}{A(t)}\,dt = 0(1)\,\mathrm{Log}\,\frac{A(t_{n+2})}{A(t_n)}$$

d'où l'on déduit aisément, par suite de l'inégalité (7):

$$\text{Max. } r(t) \text{ dans } t_n\; t_{n+1} \;<\; [A(t_n)]^{-0(1)}$$

Donc *pour les fonctions* $A(t)$ *satisfaisant aux conditions qui viennent d'être énumérées, l'intégrale* $r(t)$ *tend vers zéro* [de même que les intégrales $x(t)$] *plus rapidement qu' une certaine puissance négative de* $A(t)$, *mais, d'après ce que nous avons vu dans les propriétés générales de* $r(t)$ *au n° 11, moins rapidement qu'une autre puissance négative de* $A(t)$ (ou, plus simplement, en raison de la valeur du produit $r_{2n}\, r_{2n+1}$).

Streszczenie.

Autor bada równanie różniczkowe $x''(t) + A(t)\,x(t) = 0$ w przypadku, gdy $A(t)$ jest funkcją nienależącą dla $t > t_0$ i $A(t) \to +\infty$ gdy $t \to +\infty$, uzupełniając i ogólniając niektóre wyniki M. Biernackiego (Prace Mat. Fiz. tom XL, 1933, str. 163 — 171) przyczem posługuje się metodą naszkicowaną przez P. Fatou. Metoda owa polega na tem, że wnioskujemy o własnościach wszystkich całek danego równania różniczkowego z własności jednej tylko całki szczególnej równania różniczkowego

$$r'' - \frac{c^2}{r^3} + A(t)\,r = 0 \qquad (c \text{ jest stałą dodatnią}),$$

które otrzymuje się z równania różniczkowego danego przez podstawienia:

$$x = r\cos\varphi, \qquad \varphi = c\int\frac{dt}{r^2}.$$

W szczególności otrzymuje autor wyniki następujące:

1° Jest $\overline{\lim_{t\to+\infty}} x\sqrt[4]{A(t)} > 0$ dla każdej całki, z wyjątkiem conajwyżej dla jednej [1]. Podany jest przykład, w którym ta granica wyższa jest dla każdej całki skończona i różna od 0, w innym przykładzie istnieje całka wyjątkowa, dla której $\lim_{t\to+\infty} x\sqrt[4]{A(t)} = 0$.

2° Istnieje często „całka szczególna minimalna", która dąży do 0 szybciej od wszystkich innych. I tak np. całka ogólna nie zawsze dąży do 0 gdy $t \to +\infty$, zawsze jednak istnieje całka szczególna $x_1(t)$ która do 0 dąży, przyczem $\overline{\lim_{t\to+\infty}} x_1\sqrt{A(t)} > 0$ i może być skończona.

3° Jeśli wszystkie przedziały pomiędzy zerami całek są „zwykłe", funkcja $A(t)$ różniczkowalna, a stosunek maximum do minimum pochodnej $A'(t)$ w przedziale ograniczony, to każda całka dąży do 0, gdy $t \to +\infty$, szybciej niż $[A(t)]^{-\alpha}$ $(0 < \alpha < \frac{1}{4})$ ale wolniej niż $[A(t)]^{\alpha-\frac{1}{2}}$.

[1] Nie odróżniamy od siebie dwóch całek linjowo zależnych.

Über vollständige Systeme partieller Differentialgleichungen.

(O zupełnych układach równań różniczkowych cząstkowych).

Von

A. Hoborski.

§ 1. Es sei ein System von partiellen Differentialgleichungen:

$$(1) \qquad X_k f = \sum_{i=1}^{n} \xi_k^i \cdot \frac{\partial f}{\partial x^i} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, q)$$

gegeben, wobei $\underset{\sim}{q} < \underset{\sim}{n}$ ist. Die unabhängigen Variabeln schreiben wir mit oberen Indizes $(x^1, x^2, \ldots x^n)$ versehen; die ξ_k^i $(i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots q)$ hängen nur von $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ ab. Die Gleichungen (1) sollen linear unabhängig sein, wir setzen daher voraus, dass die Matrix

$$(2) \qquad \| \xi_k^i \|$$

vom Range q ist in einem n-dimensionalen Gebiete G. Weiter nehmen wir an, daß das System (1) in G vollständig ist, es existieren also $\binom{q}{2} \cdot q$ Funktionen ω_{kj}^s $(k, j, s = 1, 2, \ldots, q;\ k < j)$ von $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ im Gebiete G so, daß für die Klammerausdrücke folgende Relationen:

$$(3) \qquad (X_k, X_j) f = \sum_{s=1}^{q} \omega_{kj}^s \cdot X_s f \qquad (k, j = 1, 2, \ldots, q;\ k < j)$$

zutreffen, wenn f eine im Gebiete G zweimal stetig differenzierbare Funktion und ξ_k^i $(i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, q)$ in G stetig differenzierbar sind.

Auf meine Veranlassung hat Herr M. Taffet die Existenz der $(n-q)$ unabhängigen Lösungen des vollständigen Systems (1) untersucht und hat einen interessanten, bis jetzt noch nicht veröffentlichten Satz gefunden, der ungefähr folgendes außagt: Gehören die Funktionen ξ_k^i der Klaße C^q an im Punkte $(\overset{}{\underset{\circ}{x}}{}^1, \underset{\circ}{x}{}^2, \ldots, \underset{\circ}{x}{}^n)$ und seiner Umgebung und ist daselbst z. B. die Determinante

$$\left| \begin{matrix} \xi_k^j \\ j, k = 1, 2, \ldots, q \end{matrix} \right|$$