Sur la dynamique absolue des systèmes rhéonomes

(O dynamice bezwzględnej układów reonomicznych)

par

Z. Horák

Introduction. Dans le travail *Sur les systèmes non holonomes* [1]), j'ai fait une théorie invariante des systèmes non holonomes et j'y ai montré que ma théorie s'applique encore aux systèmes rhéonomes (et en général non holonomes), si l'on prend le temps comme nouveau paramètre. Dans l'édition française de mon travail, je n'ai indiqué que les équations résultantes sous leur forme explicite, car leur signification invariante (géométrique) est évidente de ce qui précède, tandis que dans l'édition tchèque, j'ai écrit les équations du mouvement aussi sous leur forme condensée:

$$\overset{*}{I}_k = Q_k, \qquad \overset{*}{I}_{m+1} = Q_{m+1} + Q'_{m+1} \tag{1}$$

où les $\overset{*}{I}_k$, $\overset{*}{I}_{m+1}$ désignent les composantes du changement absolu de la quantité de mouvement, Q_k, Q_{m+1} celles de la force donnée, Q'_{m+1} la réaction.

Dans un travail récent [2]), A. Wundheiler reprend l'étude des systèmes rhéonomes. Il envisage l'space des configurations de tels systèmes comme un espace riemannien déformable („rhéonome"), définit le „tenseur dilatation" $W^i_{\cdot k}$ et le vecteur „force centrifuge absolue" S^i, de sorte qu'il arrive aux équations du mouvement:

$$\frac{\delta v^i}{dt} + W^i_{\cdot k}\, v^k = Q^i + S^i \tag{2}$$

où v^i signifie la vitesse „longitudinale", Q^i la force donnée, δ la différentielle

[1]) Z. Horák, Bull. Int. Acad. Tchèque, *XXIX* (1928) p. 1—18; ce n'est qu'une édition abrégée d'un mémoire tchèque publié simultanénent aux: Rozpravy II. tř. České akademie, *XXXVII*, No 15 (1928) p. 1—29.

[2]) A. Wundheiler, Rheonome Geometrie. Absolute Mechanik, Prace Mat. Fiz., *XL*, (1932) p. 97—142.

absolue dans un espace déformable. Au n⁰ 21 de son travail, Wundheiler remarque que mes équations — à l'égard de la clarté — n'ont pas rang avant les anciennes équations explicites. Cela concerne évidemment la forme explicite de mes équations, tandis que la forme (1) est plus simple qne celle des équations de Wundheiler (2).

Dans la suite, je vais montrer que mon interprétation des équations dynamiques admet une extension au cas des paramètres espace-temporels les plus généraux. On aboutit ainsi aux *équations (31), invariantes vis-à-vis des transformations espace-temporelles absolument quelconques*, et il faut faire ressortir que, malgré leur généralité illimitée, ces équations n'exigent que l'application de la géométrie riemanienne ordinaire. Dans le cas particulier de systèmes scléronomes, les équations (31) se réduisent à la forme (34) qui se prête à l'étude des *mouvements relatifs* ce que je montre par un exemple à la fin du présent travail.

À cette occasion, je me permets ci-dessous d'appeler attention sur divers résultats de mes travaux antérieurs, restés inconnus pendant quelques ans et retrouvés ensuite par d'autres auteurs.

C'est déjà dans ma Thèse [3]), publiée en 1924, que j'avais interprété l'espace des configurations d'un système non holonome comme une „*variété non holonome*" (§ 7) et aussi déduit les composantes de l'*accélération* dans une telle variété (formule 29) et cela pour les paramètres non holonomes les plus généraux. Au même lieu (p. 26), j'avais remarqué qu'il n'est pas difficile de généraliser les notions fondamentales de la géométrie infinitésimale pour le cas d'une variété non holonome. J'y avais souligné le fait que les systèmes non holonomes ne diffèrent pas essentiellement de ceux holonomes et déduit la formule (40) qui traduit une généralisation de la loi de Newton pour les systèmes non holonomes et qui est équivalente à l'équation (4) du présent travail. Dans ma Thèse, j'avais aussi signalé que les systèmes rhéonomes peuvent être subordonnés à l'étude des systèmes scléronomes, en prenant le temps comme nouveau paramètre, mais je n'ai indiqué les équations correspondantes que dans un autre travail [4]), publié en 1925 (formule 2).

A la géométrie non holonome, esquissée dans ma Thèse, j'ai consacré un travail ultérieur [5]), où j'ai donné une définition précise d'une *variété non holonome générale* et établi les *formules d'une connexion linéaire la plus générale* dans cette variété. Par là, j'ai posé les fondements du *calcul différentiel absolu non holonome*, envisagé comme une théorie des invariants du groupe de *transformations non holonomes*.

Les résultats — purement mathématiques — de ce travail ont servi d'assise au travail cité au début [1]), où je suis revenu à l'étude détaillée des systèmes non holonomes et rhéonomes. J'y ai donné aussi une forme générale du principe d'Hamilton et des équations canoniques. Dans le même travail, j'ai introduit la notion de *variation covariante* qui joue un rôle important aussi dans une de mes Notes aux Comptes rendus (Acad. Sc. Paris *188* (1929), p. 614—616). Or, cette variation a été définie de nouveau par Wundheiler dans une Note aux Rend. Lincei, *XII* (1930) et elle figure aussi dans son mémoire cité plus haut [2]) (p. 128, 136).

[3]) Z. Horák, Le principe de la conservation de l'énergie et les équations de la Physique, Publ. Fac. Sc. Univ. Charles (Prague), No 25 (1924), en tchèque avec un résumé en français.

[4]) Z. Horák, L'établissement des lois physiques au moyen des principes énergétiques (en tchèque avec un résumé en français) Časopis. mat. a fys., *LV* (1925), p. 42—60.

[5]) Z. Horák, Sur une généralisation de la notion de variété, Publ. Fac. Sc. Univ. Masaryk, Brno No 86 (1927), p. 1—20. Ce travail que j'ai présenté en octobre 1926 est complètement indépendant des Notes de Vranceanu, publiées en novembre et décembre 1926 aux C. R. Acad. Sc. Paris et aux Rend. Lincei.

Notations. Dans la suite, je supprime conséquement les chiffres de sommation et je me sers des quatre espèce d'indices:

λ, μ, ν	prenant les valeurs:	$1, 2, \ldots n$;
$i, k, l, m; r,$	" " "	$1, 2, \ldots m$;
a, b, c, d	" " "	$0, 1, \ldots m$;
K	" " "	$1, 2, \ldots n-m$.

Je désigne par $\partial_\lambda, \partial_t, \partial_k, \partial_a$ les dérivées: $\frac{\partial}{\partial x^\lambda}, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial q^k} = B_k^\lambda \frac{\partial}{\partial x^\lambda}, \frac{\partial}{\partial q^a} = B_a^\lambda \frac{\partial}{\partial x^\lambda}$ et par $2A_{[kl]}$ la différence $A_{kl} - A_{lk}$.

1. Loi de Newton généralisée. Je commence par rappeler rapidement la loi générale que j'ai donnée dans mes travaux publiés en 1924 [3]) et 1928 [1]):

(I) *Le changement de la quantité de mouvement d'un système est égal à la force résultante.*

Si l'on ne considère que les systèmes *scléronomes* (holonomes ou non), la signification précise de la loi (I) est la suivante: L'espace des configurations d'un tel système est, en général, une variété riemannienne non holonome V_n^m (n est le nombre des paramètres holonomes x^λ soumis à $n-m$ liaisons non intégrables); la quantité de mouvement c'est un vecteur covariant de composantes

$$p_k = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k}$$

où T est la demi-force vive:

$$T = \tfrac{1}{2} a_{\lambda\mu} \dot{x}^\lambda \dot{x}^\mu = \tfrac{1}{2} b_{kl} \dot{q}^k \dot{q}^l,$$

b_{kl} étant le tenseur fondamental de la variété V_n^m; les q^k sont les paramètres

indépendants (en général non holonomes), dont les différentielles sont liées à celles des paramètres holonomes par les relations:

$$dx^\lambda = B^\lambda_l \, dq^l; \tag{3}$$

la force résultante est un vecteur dont les composantes covariantes égalent les forces généralisées de Lagrange: Q_k. Enfin, sous le nom de „changement", on entend le changement absolu, correspondant à la différentielle absolue (covariante) riemannienne δ, en général non holonome. Donc (I) s'exprime par la relation covariante:

$$\frac{\delta p_k}{dt} = Q_k, \tag{4}$$

où t signifie le temps absolu de Newton. D'après ce qui précède, on a

$$p_k = a_{kl} \dot{q}^l = v_k,$$

où $v^k = \dot{q}^k$ désignent les composantes contravariantes du vecteur *vitesse*. On peut alors écrire aussi

$$\frac{\delta v_l}{dt} = Q_l \tag{4 bis}$$

et remplacer (I) par la loi: *L'accélération d'un système est égale à la force résultante.*

Pour obtenir la forme explicite des équations (4), il suffit d'y porter l'expression de la différentielle absolue. Si l'on désigne par w_l un vecteur covariant de la variété V_n^m, on aura: (Horák [5,1]), Schouten [6])

$$\delta w_l = dw_l - \Theta^i_{lk} w_i \, dq^k, \tag{5}$$

où

$$\begin{aligned} \Theta^i_{lk} = {} & \tfrac{1}{2} b^{ij} (\partial_k b_{lj} + \partial_l b_{jk} - \partial_j b_{kl}) + B'_\lambda \partial_{[k} B^\lambda_{l]} \\ & + b^{ij} (b_{ml} B^m_\lambda \partial_{[j} B^\lambda_{k]} + b_{mk} B^m_\lambda \partial_{[j} B^\lambda_{l]}), \qquad (B'_\lambda = b^{ij} a_{\lambda\nu} B^\nu). \end{aligned} \tag{6}$$

Donc l'accélération absolue se traduit par la formule

$$\frac{\delta v_l}{dt} = \frac{dv_l}{dt} - \tfrac{1}{2} \partial_l b_{ik} \dot{q}^i \dot{q}^k - 2 b_{jl} B'_\lambda \partial_{[k} B^\lambda_{i]} \dot{q}^i \dot{q}^k \tag{7}$$

que j'ai déduite déjà en 1924 [3]) (p. 29, formule 29) sous la forme

$$a_l = b_{kl} \ddot{q}^k + \begin{bmatrix} i\,k \\ l \end{bmatrix} \dot{q}^i \dot{q}^k + a_{\lambda\mu} \dot{x}^\mu \left(\frac{\partial B^\lambda_k}{\partial q^l} - \frac{\partial B^\lambda_l}{\partial q^k} \right) \dot{q}^k.$$

Tenant compte de la relation (7), on tire de (4 bis) les équations du mouvement données par l'auteur en 1924 [3]) et 1928 [1]):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^l} \right) - \partial_l T + 2 \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^\lambda} \partial_{[l} B^\lambda_{k]} \dot{q}^k = Q_l. \tag{8}$$

Ces équations — sous une forme légèrement plus spéciale — ont été déduites déjà par L. Boltzmann (Wiss. Abh., III, p. 692).

2. Extension aux systèmes rhéonomes. Considérons un système holonome à n paramètres indépendants holonomes x^λ, se mouvant sous l'action des forces généralisées X_λ, dont l'énergie cinétique est une fonction quadratique homogène des dérivées $\dot{x}^\lambda$

$$T = \tfrac{1}{2} a_{\lambda\mu} \dot{x}^\lambda \dot{x}^\mu, \tag{9}$$

les coefficients $a_{\lambda\mu}$ ne dépendant pas du temps. Si l'on préscrit au dit système les $n-m$ liaisons non holonomes et rhéonomes

$$\Phi^K_\lambda \, dx^\lambda + \Phi^K_t \, dt = 0, \qquad (K = 1, 2, \ldots, n-m) \tag{10}$$

les Φ^K_λ, Φ^K_t étant des fonctions des x^λ et de t, il est possible d'exprimer les dx^λ au moyen des m différentielles des paramètres non holonomes q^l

$$dx^\lambda = B^\lambda_l \, dq^l + B^\lambda_t \, dt. \tag{11}$$

Donc les dq^l satisfont aux conditions

$$\Phi^K_\lambda B^\lambda_l \, dq^l + (\Phi^K_\lambda B^\lambda_t + \Phi^K_t) \, dt = 0$$

et je suppose que les B^λ_l, B^λ_t soient choisis de la manière que

$$\Phi^K_\lambda B^\lambda_l = 0, \qquad \Phi^K_\lambda B^\lambda_t + \Phi^K_t = 0 \tag{12}$$

c'est à dire que les dq^l soient indépendants.

Pour rendre possible l'application de la loi (I) même aux systèmes rhéonomes, j'introduis un nouveau paramètre q^0 avec la condition supplémentaire

$$q^0 = t. \tag{13}$$

Cette condition peut être regardée comme nouvelle liaison et par suite remplacée par une force de liaisons de composantes Q'_l, Q'_0. Cela fait, tous les paramètres $q^0, q^1, \ldots q^m$ sont indépendants et l'on a

$$dx^\lambda = B^\lambda_a \, dq^a, \tag{14}$$

$$T = \tfrac{1}{2} b_{ab} \dot{q}^a \dot{q}^b, \qquad p_a = b_{ab} \dot{q}^b, \qquad b_{ab} = B^\lambda_a B^\mu_b a_{\lambda\mu}.$$

Un peut alors traiter le système comme un système non holonome et scléronome, à $m+1$ degrés de liberté, se mouvant dans l'espace non holonome

[6]) J. A. Schouten, Über nichtholonome Übertragungen in einer L_n, Math. Zeitschr. **30** (1929), p. 149—172.

des configurations V_n^{m+1} sous l'action de la force donnée et de la réaction Q'_a. A ce point de vue, la loi (4) s'applique d'elle-même ce qui donne

$$\frac{\delta p_a}{dt} = Q_a + Q'_a \tag{15}$$

où Q_a désigne la projection de la force donnée sur l'espace V_n^{m+1}:

$$Q_a = B_a^\lambda X_\lambda. \tag{16}$$

Les équations (15), $m+1$ en nombre, représentent une relation entre les vecteurs covariants de l'espace V_n^{m+1} et déterminent, à l'aide de (13), complètement le mouvement du système. Car, en raison de la forme particulière de la liaison (13), la force Q'_a se réduit à la composante unique Q'_0 ($Q'_k = 0$), de sorte que (15) offre les $m+1$ équations indépendantes

$$\frac{\delta p_l}{dt} = Q_l, \qquad \frac{\delta p_0}{dt} = Q_0 + Q'_0 \tag{17}$$

suffisant avec (13) pour calculer les $m+1$ paramètres q^a et la réaction Q'_0 en fonction du temps. Pour déterminer le mouvement seul du système, il suffit de considérer les m équations spatiales

$$\frac{\delta p_l}{dt} = Q_l. \tag{17 bis}$$

où l'on a posé $q^0 = t$.

Il est facile d'avoir la forme explicite de (17):

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q^l}\right) - \partial_l T + 2\frac{\partial T}{\partial \dot x^\lambda}\partial_{[l} B^\lambda_{k]}\dot q^k + 2\frac{\partial T}{\partial \dot x^\lambda}\partial_{[l} B^\lambda_{l]} = Q_l, \\ &\frac{d}{dt}(b_{l0}\dot q^l + b_{00}) - \partial_t T + 2\frac{\partial T}{\partial \dot x^\lambda}\partial_{[t} B^\lambda_{k]}\dot q^k = Q_0 + Q'_0. \end{aligned} \tag{18}$$

Ces équations figurent dans mes travaux antérieurs [4], [1], tandis que leur forme implicite (17) ne se trouve que dans l'édition tchèque du second travail.

3. Espace-temps des configurantions. Le temps joue, dans nos raisonnements, deux rôles différents: premièrement c'est la variable indépendante t de nos équations différentielles, deuxièmement il représente sous la notation q^0 le „paramètre temporel" du système. Cela suggère d'appeler *espace-temps des configurations* la variété riemannienne à $m+1$ dimensions V_n^{m+1} et de plus de mettre les équations (15) encore sous une autre forme. En les multipliant par $\dot q^a$ et faisant la somme, on obtient

$$\dot q^a \frac{\delta p_a}{dt} = Q_a \dot q^a + Q'_a \dot q^a = Q_k \dot q^k + Q_0 + Q'_0.$$

D'autre part — comme la différentielle absolue du tenseur fondamental est nulle — il vient

$$\dot q^a \delta p_a = \dot q^a \delta(b_{ab}\dot q^b) = b_{ab}\dot q^a \delta \dot q^b = \tfrac{1}{2}\delta(b_{ab}\dot q^a \dot q^b) = dT$$

d'où l'on tire

$$\frac{dT}{dt} = Q_k \dot q^k + Q_0 + Q'_0. \tag{19}$$

Si l'on définit donc le vecteur des $m+1$ composantes Q_l, $\frac{dT}{dt} - Q_k \dot q^k$ comme *force espace-temporelle*, désigné par $\overline{Q}_a$, on arrive à l'extension espace-temporelle de la loi (I):

$$\frac{\delta p_a}{dt} = \overline{Q}_a \tag{20}$$

où

$$\overline{Q}_k = Q_k, \qquad \overline{Q}_0 = \frac{dT}{dt} - Q_k \dot q^k.$$

Le vecteur $\overline{Q}_a$ rappelle la quadri-force de Minkowski, définie d'une manière analogue dans la théorie de la Relativité. Les équations (20) sont évidemment covariantes vis-à-vis des transformations non holonomes du type

$$dq^k = B^k_r\, dq^r + B^k_t\, dt, \qquad dt = dt \tag{21}$$

qui laissent invariant le temps t. C'est le groupe de transformations *cinématiques*, considéré par Wundheiler et par suite les équations (20) sont absolues au même sens que les équations (2) de Wundheiler lesquelles sont cependant plus complexes.

Mais la méthode que je viens d'exposer admet une généralisation qui offre des équations du mouvement covariantes vis-à-vis des transformations espace-temporelles les plus générales. Pour le montrer, reprenons le système rhéonome envisagé au n° 2. Si l'on remplace les liaisons (10) par une force de liaisons de composantes X'_λ les équations du mouvement s'écrivent, comme on sait, sous la forme [7])

$$\frac{\delta I_\lambda}{dt} = X_\lambda + X'_\lambda \tag{22}$$

où $I_\lambda = \frac{\partial T}{\partial \dot x^\lambda}$. Pour distinguer les deux rôles du temps, intervenant d'une part comme paramètre temporel et d'autre comme variable indépendante, désignons au premier cas le temps par x^0. Les liaisons se traduisent alors par

[7]) Cela découle aussi par spécialisation des équations (4) pour un système holonome.

les relations

$$\Phi_\lambda^K dx^\lambda + \Phi_0^K dx^0 = 0$$

et, tenant compte de ces équations, les différentielles dx^λ, dx^0 peuvent être exprimées linéairement au moyen des $m+1$ différentielles dq^a:

(23) $$dx^\lambda = B_a^\lambda dq^a, \qquad dx^0 = B_a^0 dq^a$$

ce qui entraîne

$$(\Phi_\lambda^K B_a^\lambda + \Phi_0^K B_a^0) dq^a = 0$$

et nous allons choisir les B_a^λ, B_a^0 de façon que l'on ait pour toutes les valeurs des K et a

(24) $$\Phi_\lambda^K B_a^\lambda + \Phi_0^K B_a^0 = 0.$$

Or, comme le travail virtuel de la force X'_λ, réalisant les liaisons (10), est nul, ses composantes sont de la forme

$$X'_\lambda = \Lambda_K \Phi_\lambda^K$$

où les Λ_K désignent les coefficients indéterminés de Lagrange. Si l'on porte ces valeurs dans les équations (22) multipliées par B_a^λ, on aura

$$B_a^\lambda \frac{\delta I_\lambda}{dt} = B_a^\lambda X_\lambda + \Lambda_K \Phi_\lambda^K B_a^\lambda.$$

Le premier membre de cette équation est la projection du vecteur $\frac{\delta I_\lambda}{dt}$ sur l'espace-temps des configurations qui est égale au vecteur $\frac{\delta p_a}{dt}$ où l'on entend sous δp_a la différentielle absolue correspondant à la connexion riemannienne non holonome, induite dans l'espace-temps des configurations V_n^{m+1}. Si l'on désigne comme auparavant par Q_a la projection $B_a^\lambda X_\lambda$ de la force X_λ sur V_n^{m+1}, les équations du mouvement deviennent en vertu de (24)

$$\frac{\delta p_a}{dt} = Q_a - \Lambda_K \Phi_0^K B_a^0$$

et si l'on pose

(25) $$\Lambda_0 = \Lambda_K \Phi_0^K,$$

il s'en suit

(26) $$\frac{\delta p_a}{dt} = Q_a + \Lambda_0 B_a^0.$$

Le deuxième terme du second membre de cette équation est la projection de la force de liaisons sur l'espace V_n^{m+1}. Pour calculer le coefficient inconnu Λ_0, multiplions les équations (26) par $\dot q^a$ et faisons la somme

$$\dot q^a \frac{\delta p_a}{dt} = Q_a \dot q^a + \Lambda_0 B_a^0 \dot q^a.$$

J'ai exposé antérieurement que

$$\dot q^a \frac{\delta p_a}{dt} = \frac{dT}{dt}$$

et donc par égard de (23)

(27) $$\frac{dT}{dt} = Q_a \dot q^a + \Lambda_0 \dot x^0.$$

Or, en raison de la notation adoptée, $x^0 = t$ de sorte que la deuxième relation (23) s'écrit

(28) $$dt = B_a^0 dq^a$$

et en outre $\dot x^0 = 1$ ce qui rend possible de tirer de l'équation (27) la valeur de Λ_0. Mais je vais d'abord modifier légèrement les notations. D'après (28), la différentielle du temps absolu s'exprime d'une manière invariante par le produit scalaire du déplacement réel du système par le vecteur covariant B_a^0 que nous allons appeler *vecteur de temps* et désigner désormais par t_a de façon que l'on ait

(29) $$dt = t_a dq^a.$$

Conséquemment nous supprimerons aussi l'indice 0 dans le symbole Λ_0. Alors l'équation (27) donne

(30) $$\Lambda = \frac{dT}{dt} - Q_a \dot q^a$$

et (26) devient

(31) $$\frac{\delta p_a}{dt} = Q_a + \Lambda t_a.$$

L'expression (30) prouve que Λ est un invariant et les équations (31) sont par suite covariantes vis-à-vis des transformations *quelconques* de paramètres espace-temporels q^a. Avec une des relations supplémentaires (29) ou (30) elles suffisent bien pour déterminer les $m+1$ paramètres et l'invariant Λ en fonction du temps t.

En somme, nous avons donc obtenu les *équations du mouvement indépendantes du repérage de l'espace-temps des configurations*. Elles sont valables pour n'importe quels systèmes scléronomes ou rhéonomes et en même temps holonomes ou non. [En ce qui concerne les systèmes libres, voir le numéro 5]. Il reste à remarquer que les équations (31) peuvent s'écrire aussi sous la forme des équations (20)

$$\frac{\delta p_a}{dt} = \overline{Q}_a$$

si l'on introduit la force espace-temporelle définie par les composantes

$$\overline{Q}_a = Q_a + \left(\frac{dT}{dt} - Q_a \dot{q}^a\right) t_a. \tag{32}$$

Dans ce cas général, bien entendu, l'analogie entre $\overline{Q}_a$ et la quadri-force n'est plus que peu marquée.

4. Systèmes scléronomes. Ces systèmes sont caractérisés par disparition de tous les coefficients Φ_t^K, désignés ultérieurement par Φ_0^K d'où l'on tire, par égard de (25), la condition nécessaire

$$\Lambda = 0 \tag{33}$$

remplie indépendamment du choix de la force donnée Q_a [8]). Cette condition est aussi suffisante, supposée être satisfaite pour n'importe quelles forces données. En effet, si l'expression linéaire (25) doit s'annuler pour toutes les forces, c'est-à-dire pour un nombre infini de valeurs des Λ_K, tous les Φ_0^K disparaîssent nécessairement. Donc les équations du mouvement (31) se réduisent, en cas d'un système scléronome (holonome ou non), à la loi newtonienne

$$\frac{\delta p_a}{dt} = Q_a \tag{34}$$

étendue cette-fois pour les paramètres espace-temporels les plus généraux.

La relation (33) traduit, en vertu de (30), le théorème de force vive

$$\frac{dT}{dt} = Q_a \dot{q}^a \tag{35}$$

restant valable encore pour les paramètres espace-temporels quelconques mais pour les systèmes scléronomes seuls. Pour les systèmes *rhéonomes*, ce théorème prend la forme plus générale

$$\frac{dT}{dt} = \overline{Q}_a \dot{q}^a$$

dans laquelle la force espace-temporelle tient la place de la force donnée. On s'assure du reste par comparaison des équations (32) et (35) que ces deux forces se confondent dans le cas d'un système scléronome.

5. Systèmes libres. Mouvement relatif. Au numéro précédent, nous avons supposé, sans le signaler expressément, que tous les Φ_t^K s'annullent mais que les coefficients Φ_λ^K ne soient pas égaux à zéro simultanément. Or, s'il n'y a point de liaisons, si le système est complètement *libre*, les deux nombres

[8]) La valeur de Λ dépend, en général, de la force donnée.

n et m sont égaux, tous les coefficients Φ_λ^K, Φ_t^K s'annullent et les B_a^λ, B_a^0 sont arbitraires. Dans ces conditions, les équations (23) n'expriment qu'une transformation non holonome de $n+1$ paramètres x^λ, x^0. Mais la conséquence la plus importante de la supposition particulière faite plus haut concerne le tenseur fondamental. À savoir, l'énergie cinétique est une forme définie positive des dérivées $\dot{x}^\lambda$ et par suite le rang de la forme

$$T = \tfrac{1}{2} b_{ab} \dot{q}^a \dot{q}^b$$

est égal à n, tandis que les paramètres $\dot{q}^a$ sont au nombre de $n+1$. Donc le rang du tenseur fondamental b_{ab} est plus petit de l'unité que le nombre des dimensions de l'espace-temps. Cette circonstance exclut l'application directe de la géométrie riemannienne ordinaire qui suppose, comme on sait, le déterminant $|b_{ab}|$ différent de zéro. Néanmoins, il est bien possible de généraliser le calcul absolu même pour ce cas particulier, comme l'a montré récemment E. Bortolotti [9]).

Sans entrer dans les détails, je vais exposer quelques de ses résultats qui nous seront utiles. Le rang du tenseur b_{ab} étant n, il existe un système ω^a de solutions de $n+1$ équations

$$b_{ab}\,\omega^a = 0 \tag{36}$$

défini à un facteur arbitraire près. Les ω^a sont les composantes contravariantes du *vecteur nul* dont toutes les composantes covariantes disparaîssent. En général, les composantes covariantes ξ_b d'un vecteur sont définies univoquement mais les composantes contravariantes, déterminées par l'équation

$$\xi^a b_{ab} = \xi_b, \tag{37}$$

s'écrivent

$$\xi^a = \overset{*}{\xi}{}^a + \omega^a$$

où $\overset{*}{\xi}{}^a$ désigne une solution quelconque de (37). D'une manière analogue, Bortolotti définit les symboles de Christoffel de seconde espèce par la relation

$$\left\{ {a\,b \atop c} \right\} b_{cd} = \left[{a\,b \atop d} \right] = \tfrac{1}{2}(\partial_a b_{bd} + \partial_b b_{ad} - \partial_d b_{ab}) \tag{38}$$

qui rend possible de définir la différentielle absolue par la même expression comme dans le cas d'un espace riemannien ordinaire. Pour un vecteur covariant, p_a par exemple, on aura donc

$$\delta p_a = dp_a - \left\{ {a\,b \atop c} \right\} p_c\, dq^b$$

[9]) E. Bortolotti, Sulle forme differenziali quadratiche specializzate, Rend. Lincei *XII*, (1930), p. 541—547. — Calcolo assoluto rispetto a una forma differenziale quadratica specializzata, Rend. Lincei, *XIII* (1931), p. 19—25.

ou aussi en raison de (38)

$$\frac{\delta p_a}{dt} = \frac{dp_a}{dt} - \begin{bmatrix} a\,b \\ c \end{bmatrix} \dot{q}^b \dot{q}^c$$

de sorte que les *équations du mouvement* (34) *sont déterminées sans aucune équivoque*. Les dernières formules ne sont valables que si les paramètres q^a sont holonomes. Or, dans le cas d'un système libre, cette supposition est toujours admissible car un tel système est nécessairement holonome. On pourrait d'ailleurs, au moyen d'une transformation non holonome, généraliser les dites formules encore pour les paramètres non holonomes.

On voit que nos équations s'appliquent même aux systèmes libres ce qui admet l'introduction de paramètres espace-temporels aussi dans ce cas particulier. On arrive ainsi à l'étude des *mouvements relatifs* qui se traduisent par des équations de la forme (34), indépendamment du mouvement du système de coordonnées.

Pour en donner un exemple, considérons un point de masse égale à l'unité, se mouvant dans un plan fixe sous l'action d'une force dont les composantes, dans un système fixe de coordonnées rectangulaires Oxy, sont X, Y. Cherchons les équations du mouvement relatives à un système de coordonnées rectangulaires $O\xi\eta$ tournant autour de O. La solution est donnée par les équations (34) où il faut poser

$$q^1 = \xi, \quad q^2 = \eta, \quad q^0 = \tau\,(= t); \quad n = 2, \quad m + 1 = 3.$$

Or, on a

$$x = \xi \cos\alpha - \eta \sin\alpha$$
$$y = \xi \sin\alpha + \eta \cos\alpha,$$

α étant une fonction de τ dont la dérivée $\frac{d\alpha}{d\tau}$ nous désignerons par ω. Par différentiation, il vient

$$(39) \qquad \begin{aligned} dx &= \cos\alpha\, d\xi - \sin\alpha\, d\eta - \omega\, y\, d\tau \\ dy &= \sin\alpha\, d\xi + \cos\alpha\, d\eta + \omega\, x\, d\tau, \end{aligned}$$

d'où l'on tire les coefficients B_a^λ intervenant dans (14). La force vive

$$2T = \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 - 2\omega\,\eta\,\dot{\xi}\,\dot{\tau} + 2\omega\,\xi\,\dot{\eta}\,\dot{\tau} + r^2\omega^2\dot{\tau}^2$$

où

$$r^2 = x^2 + y^2 = \xi^2 + \eta^2, \quad \dot{\tau} = 1$$

et les équations (34) deviennent

$$(40) \qquad \begin{cases} \dfrac{\delta p_\xi}{dt} = \ddot{\xi} - \dot{\omega}\,\eta - 2\omega\,\dot{\eta} - \omega^2\xi = Q_\xi \\ \dfrac{\delta p_\eta}{dt} = \ddot{\eta} + \dot{\omega}\,\xi + 2\omega\,\dot{\xi} - \omega^2\eta = Q_\eta \\ \dfrac{\delta p_\tau}{dt} = \omega\,(\xi\,\ddot{\eta} - \eta\,\ddot{\xi}) + r^2\omega\,\omega + 2\omega^2 r\,\dot{r} = Q_\tau. \end{cases}$$

Les deux premières équations déterminent le mouvement relatif, les Q_ξ, Q_η étant les composantes de la force donnée dans le système mobile. On voit que les accélérations relative et d'entraînement, réunies avec celle complémentaire (crrespondant à la force centrifuge composée) donnent le changement absolu de la quantité de mouvement. Les forces fictives ne sont pas des vecteurs de l'espace-temps, mais avec l'accélération relative, elles forment le vecteur espace-temporel $\frac{\delta p_a}{dt}$. Donc la notion d'accélération absolue au sens de la géométrie riemannienne se confonde, dans ce cas, avec celle de l'accélération absolue au sens mécanique. Pour comprendre aussi la signification de la dernière équation (40), remplaçons Q_τ par son expression

$$Q_\tau = B_\tau^x X + B_\tau^y Y = \omega\,(x\,Y - y\,X)$$

ce qui donne

$$\xi\,\ddot{\eta} - \eta\,\ddot{\xi} + \frac{d}{dt}(r^2\omega) = x\,Y - y\,X.$$

Cela veut dire que le moment de la force donnée, par rapport à l'axe de rotation, égale la somme du moment de l'accélération relative plus le double de l'accélération aréolaire. On déduit cette relation de (39), en tenant compte des équations du mouvement $\ddot{x} = X$, $\ddot{y} = Y$.

Il n'est pas inutile peut-être de souligner le fait que c'est l'application du calcul absolu qui rend possible de résumer les trois équations (40) dans une relation espace-temporelle (34), traduisant une loi dynamique générale et indépendante du choix du système de coordonnées.