Résumé de la communication de M. Nicolas Lusin: „Sur les classes des constituantes des complémentaires analytiques“ [1])

(Streszczenie komunikatu p. Mikołaja Łuzina „Sur les classes des constituantes des complémentaires analytiques“ przedstawionego na Kongresie międzynarodowym matematyków w Zurychu dnia 5 września 1932 r.)

présenté par

M. W. Sierpiński

au Congrès International des Mathématiciens à Zurich le 5 septembre 1932.

Mon ami, M. Nicolas Lusin qui n'a pas pu venir à ce Congrès, m'a chargé de présenter ici un résumé de sa communication „Sur les classes des constituantes des complémentaires analytiques“.

Les recherches de M. Lusin sont en connexion avec le fameux *problème du continu* qui, comme on sait, consiste à déterminer le rang que la puissance du continu tient dans l'échelle des alephs.

On sait d'ailleurs que tous les efforts de résoudre ce problème, en restant sur le terrain des idées de G. Cantor et des analystes tels que MM. Jacques Hadamard et Felix Hausdorff, on été vains. Les derniers travaux de M. David Hilbert qui poursuivent le même but, abandonnent déjà ce terrain d'idées. Pour montrer que la proposition „la puissance du continu est $\aleph_1$“ est non contradictoire dans le domaine de l'Analyse mathématique, M. Hilbert établit une correspondance univoque et réciproque entre les *définitions* mêmes des nombres irrationnels d'une part et des nombres transfinis de deuxième classe d'autre part.

Ainsi sa méthode diffère sensiblement de l'ordre d'idées indiqué, où l'on cherchait d'établir l'existence (ou l'absence) d'une correspondance entre les

[1]) À paraître dans les *Annali della R. Scuola Norm. Sup. di Pisa*, 1933.

nombres mêmes irrationnels et transfinis sans se préoccuper de la manière dont *nous* concevons ces nombres.

Mais, même si le problème du continu était suffisamment résolu sur le terrain du *non-contradictoire*, la question purement mathématique resterait entière:

> *reconnaître si l'on peut construire une correspondance biunivoque effective entre les nombres irrationnels et les nombres transfinis de seconde classe sans faire intervenir les définitions de ces nombres.*

A ce point de vue on voit bien que non seulement nous ne connaissons pas une telle correspondance, mais nous ne pouvons même pas nommer $\aleph_1$ points du continu. Le problème de la recherche d'un ensemble *effectif* ayant $\aleph_1$ points est en ce moment une *forme affaiblie* du problème du continu et il est aussi loin d'être résolu.

On rencontre dans cette voie plusieurs autres problèmes qui sont des formes *de plus en plus affaiblies* du même problème du continu.

M. Henri Lebesgue a donné en 1905 une méthode extrêmement remarquable de *construire effectivement* $\aleph_1$ ensembles de points sans parties communes deux à deux. L'étude ultérieure de cette méthode a conduit MM. Souslin et Lusin à la découverte des ensembles analytiques et projectifs.

C'est par cette voie de M. Henri Lebesgue que M. Lusin et moi (en 1922) avons décomposé le continu en $\aleph_1$ ensembles mesurables B. Si chacune de ces constituantes contenait un seul point ou bien au plus une infinité dénombrable, le problème du continu serait résolu.

C'est par cette raison qu'il serait intéressant de déterminer la nature et les classes de ces constituantes.

Pour donner l'idée des recherches de M. Lusin et exposer son résultat, il est nécessaire de s'en servir de la théorie des ensembles analytiques. Mais j'essayerai de le présenter d'une façon aussi élémentaire que possible.

Prenons un ensemble plan fermé H et coupons le par les parallèles à l'axe d'ordonnées. α étant un nombre ordinal de première ou de deuxième classe de Cantor, désignons par E_α l'ensemble de tous les nombres réels a, pour lesquels la droite $x=a$ rencontre l'ensemble plan H en un ensemble de points dont les ordonnées, si l'on les ordonne d'après leur grandeurs, forment un ensemble bien ordonné du type α. Désignons par $P(H)$ la projection de l'ensemble H sur l'axe OX et posons

$$(1) \qquad E = P(H) - \sum_{\alpha<\Omega} E_\alpha .$$

E est un ensemble analytique le plus général. On dit qu'il s'obtient comme criblé au moyen du crible H. De (1) résulte la décomposition de son complémentaire

$$(2) \qquad CE = CP(H) + \sum_{\alpha<\Omega} E_\alpha$$

en $\aleph_1$ ensembles, dont on démontre qu'ils sont tous mesurables B. On démontre dans la théorie des ensembles analytiques que la condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble E soit mesurable B est que parmi les ensembles E_α il y en a un ensemble au plus dénombrable d'ensembles non vides. Il en résulte immédiatement que chaque complémentaire analytique non mesurable B se décompose en $\aleph_1$ constituantes mesurables B et la recherche d'un complémentaire analytique dont les constituantes sont toutes *dénombrables* donnerait aussi la solution du problème du continu affaibli.

Une forme encore plus affaiblie du problème du continu est celle, où l'on cherche $\aleph_1$ ensembles mesurables B dont les classes sont bornées.

Nous voyons que les recherches dans cette voie présentent un vif intérêt puisqu'on y rencontre l'essence du mystère et des difficultés du problème du continu lui-même.

Dans une note que nous avons publié avec M. Lusin l'année passée, nous avons construit un complémentaire analytique dont les classes de composantes ne sont pas bornées par aucun nombre ordinal de deuxième classe. Maintenant M. Lusin a réussi de construire un complémentaire analytique. dont les classes de constituantes croissent *d'une manière* monotone jusqu'à Ω, Cela nous donne une nouvelle démonstration de l'existence des ensembles mesurables B de toutes classes, sans pratiquer un raisonnement de proche en proche.

L'idée de la construction de M. Lusin est basée sur la nouvelle notion des *cribles maxima*. Le crible H est appelé crible maximum si, dans le développement (2) correspondant, pour chaque $\alpha < \Omega$, la classe de la constituante E_α est supérieure ou égale à la classe de la constituante correspondante pour tout autre crible. L'existence des cribles maxima résulte de l'existence des ensembles fermés universels.

En exposant ces résultats de M. Lusin, je me permis d'y apporter quelques modifications concernant les développements techniques de la démonstration, pour faciliter la comprendre. M Lusin utilise l'espace de Baire de 0 dimensions et des cribles un peu plus compliqués que les cribles fermés. Mais cela ne change du tout l'idée de sa démonstration.