Die Parametrixmethode in Anwendung auf hyperbolische Gleichungssysteme

(Mit 1 Abbildung)

(Metoda parametrysy w zastosowaniu do hiperbolicznych układów równań)

Von

Myron Mathisson

Die Methode der Parametrix, die ich für Differentialgleichungen von normalem hyperbolischem Typus entwickelt habe[1]), kann auf Systeme hyperbolischer Differentialgleichungen erweitert werde. Für die physikalishen Anwendungen ist eine solche Erweiterung von Wichtigkeit. So stößt man in der Relativitätsphysik mit ihren allgemein kovarianten Grundgleichungen gerade auf Gleichungssysteme, auch dort, wo die vorrelativistischen Theorien mit Gleichungen operierten, in denen die physikalischen Größen mit separierten oder leicht separierbaren Komponenten hervortraten. Z. B., ist die Wellengleichung für das elektronagmetische Potential

$$\text{(I)} \qquad \Box\, \varphi_i \equiv \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z^2}\right) = 0 \quad (i = 0, 1, 2, 3)$$

in der älteren Maxwellschen Theorie auf eine Skalargleichung für jede Komponente des Potentials zurückgeführt, nicht aber in der allgemeinen Relativitätstheorie, wo es die kovariante Differentiation das Varkommen aller Komponenten in jeder der vier Gleichungen

$$\text{(II)} \qquad \Box\, \varphi_i \equiv g^{\alpha\beta}\, \nabla_\alpha \nabla_\beta\, \varphi_i = 0$$

hervorruft.

---

[1]) Mathematische Annalen, Bd. 107, S. 400 und die Berichtigung dazu im selben Bande. Auf die Formeln aus jener Arbeit werden wir uns ohne weiteres durch Angabe ihrer Nummer berufen, die Formeln der vorliegenden Arbeit werden wir zur Untercheidung mit römischen Zahlen numerieren.

Wir wollen im Folgenden die tensorielle Schreibweise und die Bezeichnungen der oben angeführten Arbeit behalten. Die Gleichungen, die wir behandeln werden, bilden lineare Systeme von hyperbolischem Typus, das Letzte will sagen, das man in jedem Punkt der vierdimensionalen Welt (wir werden uns mit vier unabhängigen Veränderlichen begnügen) das Koordinatensystem so wählen kann, daß für jede Tensorkomponente der gesuchten Funktion in jenem Punkt die zweiten Ableitungen in der Form

$$\text{(III)} \qquad \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

vorkommen.

Die Fälle, die wir erörtern werden, sind nur Beispiele, Erweiterungen auf verwickeltere Tensorgrößen (anstatt der Vektorgrößen, mit denen wir uns begnügen) und auf mehr als 4 Veränderliche liegen auf der Hand[2]).

Im ersten Beispiel wird die Parametrixgleichung, über das eigentliche Thema hinaus, unter Zugrundelegung einer bestimmten Metrik, wirklich integriert.

Erstes Beispiel. Selbstadjungiertes System auf einer Krummen Fläche.

Eine Erweiterung auf Systeme von Differentialgleichungen ergibt sich von selbst, wenn man beachtet, daß in der Reziprozitätsbeziehung (10), anstatt eines Paares skalarer Funktionen φ, ψ, zwei Tensoren vorkommen können. Es gilt z. B.

$$\text{(IV)} \qquad \begin{cases} p_\alpha(\Box + \lambda)\varphi^\alpha - \varphi_\alpha(\Box + \lambda)p^\alpha = \nabla_\alpha w^\alpha, \\ w_i = p_\alpha \nabla_i \varphi^\alpha - \varphi_\alpha \nabla_i p^\alpha. \end{cases}$$

Man kann daher die Parametrixmethode auf die entsprechenden tensoriellen Gleichungen, z. B. auf die vektorielle Gleichung

$$\text{(V)} \qquad L_i(\varphi) \equiv (\Box + \lambda)\varphi_i = s_i \qquad (\lambda = \text{const})$$

ohne weiteres übertragen. In jeder der vier Gleichungen (V) kommen, zufulge der kovarianten Differentiationen, wie gesagt, alle vier φ_i vor, wenn die g_{ik} keine Konstanten sind: wir haben ein System von Differentialgleichungen vor uns. Auch auf das etwas allgemeinere System[3])

[2]) Was den Fall von mehr als 4 Veränderlichen anlangt, vgl. den letzten Paragraph, der oben zitierten Arbeit.

[3]) Gleichungen (V) und (VI) sind die elektromagnetischen bzw. die Gravitationsgleichungen „auf De Sitterschem Hintergrunde". Vgl. die Arbeit des Verf. ZS. d. Phys. Bd. 67, S. 270, 1931.

$$\text{(VI)} \qquad L_{ik}(\psi) \equiv -\tfrac{1}{2}\Box\psi_{ik} + \frac{1}{a^2}(\psi^\alpha_\alpha g_{ik} - \psi_{ik}) = s_{ik} \qquad (\alpha = \text{const};\ \psi_{ik} = \psi_{ki})$$

läßt sich unsere Parametrixmethode ohne weiteres ausdehnen, da es die Reziprozitätsbeziehung

$$p^{\alpha\beta} L_{\alpha\beta}(\psi) - \psi^{\alpha\beta} L_{\alpha\beta}(p) = \nabla_i w^i; \quad w_i = p^{\alpha\beta}\nabla_i \psi_{\alpha\beta} - \psi^{\alpha\beta}\nabla_i p_{\alpha\beta}$$
$$(p_{ik} = p_{ki})$$

besteht, wobei $L_{\alpha\beta}(p)$ den mit p_{ik} anstatt ψ_{ik} gebildeten Differentialausdruck bedeutet.

Eine Rechnung, die derjenigen von § 4 der am Anfang zitierten Arbeit genau entspricht (eine Gleitlinie für den Scheitelpunkt des Nullkegels $\mathfrak{K}(s)$, die Vektorfelder k^i, a^i werden in derselben Weise eingeführt), ergibt als Bedingung für das Verschwinden des Integrals über den Kegel $\mathfrak{K}(O)$, im Falle der Gleichung (V), das Gleichungssystem

$$\text{(VII)} \qquad \Pi_i \equiv 2k^\nu \nabla_\nu p_i + (\nabla_\nu k^\nu) p_i = 0.$$

Anstatt der skalaren Parametrix von Gleichung (IX) soll jetzt der Parametrixvektor p_i bestimmt werden.

Wir wollen die Integration von (VII) für den Fall der De Sitterschen Welt durchführen. Diese ist als Fläche eines Hyperboloids im fünfdimensionalen euklidischen Raume gegeben[4]). Es sei die Maßbestimmung dieses Raumes

$$\text{(VIII)} \qquad dS^2 = \Omega(dX), \qquad \Omega(X) = \Omega_{ik} X^i X^k$$

(die Indizes von Ω_{ik} und X^i laufen die Werte von 0 bis 4 durch). Wir setzen voraus, daß man durch lineare Transformation

$$\Omega(dX) = dX^{0^2} - (dX^{1^2} + dX^{2^2} + dX^{3^2} + dX^{4^2})$$

gleichzeitig für den ganzen X-Raum erzielen kann. Es sei durch einen „in die Zukunft weisenden" Vektor die Richtung Vergangenheit → Zukunft für alle zeitartige Vektoren des X-Raums [d. h. für solche, die innerhalb des Kegels $\Omega(X - X_0) = 0$ liegen, wenn sie durch den Punkt (X_0) gehen] festgelegt. Wir wollen nun ein paar Hilfsformeln herleiten.

Ist Σ eine zeitartige Weltlinie im X-Raum mit der Maßbestimmung (VIII), so wird jedem Punkte $A(X)$ dieses Raums durch den in ihm konstruierten Zukunfskegel ein Punkt $O(X_0)$ auf der S-Linie zugeordnet: der Schnittpunkt

[4]) Vgl. H. Weyl, Raum, Zeit, Materie. 5. Aufl. Berlin, Springer, 1923. S. 292.

von S mit dem Zukunftskegel (Abb. 1). Zugleich wird jedem Punkte $A(X)$ ein Nullvektor des X-Raums, $OA = (l^i)$, zugeordnet. Es sei S die von einem festen Punkt P_0 in der Zukunftsrichtung gemessene Länge des Bogens $P_0\,O$. Jedem Punkte $A(X)$ ordnen wir den entsprechenden Skalar S zu. Es sei nun in Formel (7) $A(X)$ als Punkt 1, $O\,(X_0)$ als Punkt 2 gerechnet. Im Punkte A', der aus $A(X)$ durch die beliebige infinitesimale Verschiebung δX^i entspringt, führen wir die Kegelkonstruktion aus, wie in $A(X)$, und finden auf der S-Linie den Punkt O', der aus $O(X_0)$ durch eine Verschiebung $A^i(X_0)\,\delta S$ hervorgeht, wobei $A^i(X_0)$ die Geschwindigkeit in $O(X_0)$ ist:

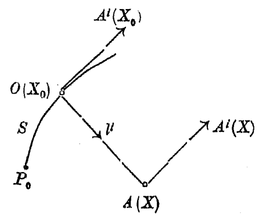

Abb. 1.

$$A^i(X_0) = \frac{d X^i}{d S} \quad \text{im Punkte } O(X_0) \quad (\Omega_{ik}\,A^i A^k = 1).$$

Nehmen wir als q^i in Formel (7) den Vektor l^i, so ist

$$l_i\,\delta X^i - l_i\,A^i(X_0)\,\delta S = 0.$$

(Das Herauf- und Herunterziehen der Indizes ist für Tensoren des X-Raumes in bezug auf die Ω_{ik} zu verstehen). Da $\delta S = \frac{\partial S}{\partial X^i}\delta X^i$ ist, so bekommen wir

$$\text{(IX)} \qquad \frac{\partial S}{\partial X^i} = \frac{l_i}{N}, \quad \text{wobei} \quad N = l_i\,A^i(X_0).$$

Das dem Punkte A' zugeordnete $l^i + \delta l^i$ läßt sich leicht durch l^i und δX ausdrücken:

$$l^i + \delta l^i - \delta X^i - l^i + A^i(X_0)\,\delta S = 0.$$

Daraus folgt, mit Rücksicht auf (IX),

$$\text{(X)} \qquad \frac{\partial l_i}{\partial X^k} = \Omega_{ik} - \frac{A_i(X_0)\,l_k}{N}.$$

Das De Sittersche Hyperboloid sei durch die Gleichung

$$\Omega(X) = -a^2 \qquad (a = \text{const})$$

gegeben. Die S-Linie wollen wir als die Gleitlinie auffassen; sie soll also auf dem Hyperboloid liegen. Es sei $A^i(X)$ derjenige Vektor, der aus $A(X_0)$ durch Parallelverschiebung auf dem Hyperboloid längs l^i entsteht [wir setzen also voraus, daß $A(X)$ zum Hyperboloid gehört]. Das Koordinatensystem

spezialisieren wir vorübergehend wie folgt: die X^4-Achse sei in der Richtung des Durchmessers gewählt, der durch $A(X)$ geht, die übrigen Achsen in der jenem Durchmesser konjugierten Diametralebene [die zur Tangentialebene des Hyperboloids in $A(X)$ parallel ist]. Auf dem Hyperboloid führen wir ein (vierdimensionales) Koordinatensystem (x^i) ein, das im Punkte $A(X)$ geodätisch ist. In der Umgebung von $A(X)$ soll (x^i) mit dem System (X^i) auf der Tangentialebene $(i = 0, 1, 2, 3)$ übereinstimmen. Um die Skalargröße $\nabla_\nu k^\nu$ zu bestimmen, genügt es, sie im System (x^i) für den beliebigen Punkt $A(X)$ zu berechnen.

Da $A^i(X)$ in der Tangentialebene liegt ebenso wie die geradlinige Erzeugende des Hyperboloids l^i, so ist

$$l^4 = A^4(X) = 0, \qquad k^i = -\frac{l^i}{l_\alpha A^\alpha(X)} \qquad (i = 0, 1, 2, 3).$$

Die Komponenten von a^i im Punkte $A(X)$ stimmen mit den entsprechenden $A^i(X)$-Komponenten überein. Für das $A^i(X)$-Feld gilt (Parallelverschiebung längs l^α auf dem Hyperboloid)

$$l^\alpha \frac{\partial A^i(X)}{\partial X^\alpha} = 0.$$

Mithin, nach (X),

$$\text{(XI)} \qquad l^\alpha \frac{\partial}{\partial X^\alpha}[l_\nu\,A^\nu(X)] = A^\nu(X)\,l^\alpha\left[\Omega_{\nu\alpha} - \frac{l_\alpha A_\nu(X_0)}{l_\mu A^\mu(X_0)}\right] = l_\nu\,A^\nu(X)$$

und

$$\text{(XI bis)} \qquad \nabla_\nu k^\nu = -\sum_{\alpha=0}^{3} \frac{\partial}{\partial X^\alpha}\left[\frac{l^\alpha}{l_\nu A^\nu(X)}\right] = -\frac{2}{N}\,{}^{5)}\,[N = l_\nu\,A^\nu(X) = l_\nu\,A^\nu(X_0)]\,.$$

Man ersieht aus (XI), daß

$$k^\nu\,\nabla_\nu\,N = -1$$

ist. Statt (VII) haben wir somit auf dem Hyperboloid

$$\text{(XII)} \qquad \tfrac{1}{2}\,\Pi_i = \frac{1}{N}\,k^\nu\,\nabla_\nu\,(N p_i) = 0.$$

Das heißt aber, daß $N p_i$ durch Parallelverschiebung eines Vektors auf dem Hyperboloid längs der Nullinie l^i erzeugt wird. Für alle l^i-Richtungen eines $\mathfrak{K}(O)$-Kegels wollen wir eine gemeinsame Anfangsgröße wählen: die Geschwindigkeit $A^i(X_0)$ der Gleitlinie im Punkte $O(X_0)$, als den Wert von $N p_i$ im

[5] Diese Beziehung beweist, daß die Formel (27) für eine 4-dimensionale Welt konstanter Krümmung wirklich besteht. Vgl. die Anmerkung in der unter [1]) zitierten Berichtigung.

Punkte $O(X_0)$. Dann haben wir in fünfdimensionaler, von den Koordinatensystemen auf dem Hyperboloid unabhängiger Schreibweise für p_i den Vektor

$$P^i(X_0, X) = \frac{A^i(X)}{N}. \tag{XIII}$$

Für $(X) \to (X_0)$ ist $1/N$ von der Gestalt $1/r$: P^i ist wirklich ein Parametrixvektor. Mit $A^i(X)$ zugleich ist er ein Tangentialvektor des Hyperboloids und läßt sich als (vierdimensionaler) p^i-Vektor darstellen, sobald ein (verdimensionales) Koordinatensystem auf dem Hyperboloid in bezug auf das (X)-System festgelegt wird.

In ganz analoger Weise bestimmt man den Parametrixtensor der Gleichung (VI), indem man die entsprechende Parametrixgleichung, ebenso wie die p^i-Gleichung, direkt auf dem Hyperboloid integriert. Es ergibt sich für die fünfdimensionale Darstellung der Parametrix p^{ik}

$$P^{ik}(X_0, X) = \frac{A^i(X)\,A^k(X)}{N}. \tag{XIII bis}$$

Die gefundenen Ausdrücke für den Parametrixvektor und- tensor sind von irgendeiner Wahl des 4-dimensionalen Koordinatensystems auf dem Hyperboloïd unabhängig. Trifft man einmal diese Wahl, so wird man jene Ausdrücke auf das gewählte Koordinatensystem umrechnen. Unsere koordinatenunabhängige Behandlungsweise hat den Vorteil, von den Singularitäten der Abbildung auf die 4 Koordinaten unabhängig und für das ganze Hyperboloid durch dieselbe Formel bestimmt zu sein. Will man das Singulärwerden der Abbildung an manchen Stellen vermeiden, so muß man wohl darauf gefaßt sein, das Hyperboloïd stückweise auf verschiedene Koordinaten zu beziehen, die sich teilweise überdecken.

Was das eigentliche Ziel der Parametrixmethode, den Übergang zu Integralgleichungen, anbetrifft, wollen wir darauf an der Hand des folgenden Beispiels näher eingehen.

Zweites Beispiel. Ein nicht selbstadjungiertes System mit separierbarer Parametrixgleichung.

Das eben behandelte Beispiel einer Vektorgleichung ist ein selbstadjungierter Sonderfall ($A^\lambda = 0$) der folgenden Gleichung:

$$J_i(\psi) \equiv \Box\,\psi_i + A^\lambda \nabla_\lambda \psi_i + B^{\lambda}_{i\cdot}\,\psi_\lambda = T_i. \tag{XIV}$$

Der zu $J_i(\psi)$ adjungierte Differentialausdruck ist

$$G_i(\psi) \equiv \Box\,\psi_i - \nabla_\lambda (A^\lambda \psi_i) + B^{\lambda}_{\cdot i}\,\psi_\lambda, \tag{XIV bis}$$

und die Reziprozitätsbeziehung, mit

$$w_\lambda = \varphi^\alpha \nabla_\lambda \psi_\alpha - \psi^\alpha \nabla_\lambda \varphi_\alpha + A_\lambda \varphi^\alpha \psi_\alpha, \tag{XV}$$

lautet

$$\nabla_\lambda w^\lambda = \varphi^\alpha J_\alpha(\psi) - \psi^\alpha G_\alpha(\varphi). \tag{XV bis}$$

Anstatt Gleichung (30), werden wir jetzt durch ganz analoge Rechnungen auf eine Vektogleichung geführt, die vom Parametrixvektor φ^i erfüllt werden soll:

$$\Pi_i(\varphi) \equiv 2\,k^\alpha \nabla_\alpha \varphi_i + (\nabla_\alpha k^\alpha - A_\alpha k^\alpha)\,\varphi_i = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, 3). \tag{XVI}$$

Durch einen einfachen Ansatz lassen sich die Vektorkomponenten im letzten Gleichungssystem separieren, so daß in jeder Gleichung nur eine Komponente vorkommt. Man setze nämlich

$$\varphi^i = \varphi\, b^i, \tag{XVI bis}$$

wo b^i ein Vektor ist, der am Scheitelpunkt des $\mathfrak{K}(O)$-Kegels vorgeschrieben ist und in jedem Punkt $A(x)$ der Kegelmantelfläche als Resultat der Parallelverpfanzung längs der $\mathfrak{K}(O)$-Erzeugenden (auf dem Wege OA) definiert wird. Dann ist

$$k^\nu \nabla_\nu b^i = 0,$$

b_i kann in (XVI) wie eine Konstante vor das Differentiationszeichen herausgeholt werden, und man erhält für das φ in (XVI bis) die Gleichung (30).

Der Parametrixvektor φ^i gestattet den Übergang zu Integralgleichungen, der sich in voller Analogie zum skalaren Fall vollzieht. Anstatt Gleichung (35) erhalten wir diesmal

$$4\pi\, b^\lambda(x_0)\,\psi_\lambda = -\int_{\vartheta_2} G_\lambda[\varphi\, x_0, x]\,\psi^\lambda(x)\,dV + \int_{\vartheta_2} \varphi_\lambda(x_0, x)\,T^\lambda(x)\,dV. \tag{XVII}$$

Der Vektor $b^i(x_0)$ im Punkte $O(x_0)$ ist ganz beliebig. Da also die Integralgleichung das Skalarprodukt $\psi_\lambda \underset{\mu}{b}^\lambda$ von ψ_λ mit vier linearunabhängigen Vektoren $\underset{\mu}{b}^\lambda$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) in jedem Punkt bestimmt, so kennt man auch ψ^λ in jedem Punkt. Mann kann, nach Festlegung des Koordinatensystems, als die vier Vektoren $\underset{\mu}{b}^\lambda(x_0)$ die kontravarianten Maßvektoren $\underset{\mu}{e}^\lambda$ wählen [6]), mit den Komponenten

$$\underset{\mu}{e}^\lambda(x_0) = \begin{cases} 1 & \text{für } \lambda = \mu, \\ 0 & \text{„} \quad \lambda \neq \mu. \end{cases}$$

[Die aus ihnen durch Parallelübertragung entstehenden Vektoren $\underset{\mu}{e}^\lambda(x)$ sind, natürlich, nicht mehr die Maßvektoren in $A(x)$]. Dann ist

$$\underset{\mu}{b}^\lambda(x_0)\,\psi_\lambda(x_0) = \psi_\mu(x_0),$$

---

[6]) Vgl. Schouten, Der Ricci-Kalkül (Berlin 1924) S. 13.

und (XVII) wird zu einem System von 4 Fredholmschen Gleichungen, mit je einer Komponente linker Hand (auf der rechten Seite werden, im allgemeinen, alle vier ψ_λ vorkommen).

Drittes Beispiel. Nicht separierbare Parametrixgleichung. Etwas anders gestaltet sich die Rechnung, wenn es das Gleichungssystem

(XVIII) $$J_i'(\psi) \equiv \Box\, \psi_i + A^\lambda \nabla_i \psi_\lambda + B_i^{\cdot\lambda} \psi_\lambda = T_i$$

zur Integration vorliegt. Der adjungierte Ausdruck ist dann

$$G_i'(\psi) \equiv \Box\, \psi_i - \nabla_\lambda (A_i \psi^\lambda) + B^\lambda_{\cdot i} \psi_\lambda,$$

die Reziprozitätsbeziehung

(XIX) $$\nabla_\lambda w^\lambda = \varphi^\alpha J_\alpha(\psi) - \psi^\alpha G_\alpha'(\varphi)$$

mit

$$w_\lambda = \varphi^\alpha \nabla_\lambda \psi_\alpha - \psi^\alpha \nabla_\lambda \varphi_\alpha + A^\alpha \varphi_\lambda \psi_\alpha .$$

Rechnungen, die denjenigen des vorigen Falles parallel laufen, führen auf folgendes Gleichungssystem für den Parametrixvektor:

(XX) $$H_\alpha'(\breve{\varphi}) \equiv 2\, k^\lambda \nabla_\lambda \breve{\varphi}_\alpha + (\nabla_\lambda k^\lambda)\, \breve{\varphi}_\alpha - A_\alpha k^\lambda \breve{\varphi}_\lambda = 0 .$$

Das ergibt für die Große $k_\alpha \breve{\varphi}^\alpha$

$$H(k_\alpha \breve{\varphi}^\alpha) \equiv 2\, k^\lambda \nabla_\lambda (k_\alpha \breve{\varphi}^\alpha) + (\nabla_\lambda k^\lambda - A_\lambda k^\lambda)\, k_\alpha \breve{\varphi}^\alpha = 0.$$

Folglich kann man für $k_\alpha \breve{\varphi}^\alpha$ die Funktion φ, die skalate Parametrix von Gleichung (30), nehmen.

Wir suchen eine Lösung von (XX) in der Form

(XXI) $$\breve{\varphi}_\alpha = f\, C_\alpha,$$

wo f die Gleichung

(XXI bis) $$\frac{df}{dr} + (\nabla_\lambda k^\lambda) f = 0 \qquad \left(\frac{d}{dr} = k^\lambda \nabla_\lambda\right)$$

erfüllt. Es sei q^α ein Vektor, der vom Scheitelpunkt $O(x_0)$ des $\mathfrak{K}(O)$-Kegels aus sich die Kegelerzeugende entlang parallel verpflanzt. Dann ist q^α bezüglich der Operation $\frac{d}{dr}$ als eine Konstante zu betrachten, mit der man (XX) multiplizieren und dann verjüngen kann. Berücksichtigt man die Gleichungen (XXI) und (XXI bis), so ist (XX) folgender Bestimmungsgleichung für C_α äquivalent:

$$\frac{d\,(q_\alpha C^\alpha)}{dr} - \tfrac{1}{2} (p_\alpha A^\alpha)\, e^{\frac{1}{2}\int_0^r A_\lambda k^\lambda dr} = 0,$$

woher

$$q_\alpha C^\alpha = q_\alpha a^\alpha - \tfrac{1}{2} \int_0^r q_\alpha A^\alpha e^{\frac{1}{2}\int_0^r A_\lambda k^\lambda dr} dr.$$

Hier ist a^α das a^λ-Feld, das im § 1 der am Anfang zitierten Arbeit eingeführt wurde. Da der q^α-Vektor in $O(x_0)$ beliebig ist, können wir aus der letzten Gleichung die vier Komponenten von C^α bestimmen. Die Bedingung $K_\alpha \breve{\varphi}^\alpha$ ist erfüllt, denn es ist $(q^\lambda = k^\lambda)$

$$\tfrac{1}{2} \int_0^r k_\alpha A^\alpha e^{\frac{1}{2}\int_0^r A_\lambda k^\lambda dr} dr = e^{\frac{1}{2}\int_0^r A_\lambda k^\lambda dr} - 1,$$

weher, wegen $k\ \ a^\alpha = -1$,

$$\breve{\varphi}_\alpha k^\alpha = f k_\alpha C^\alpha = f e^{\frac{1}{2}\int_0^r A_\lambda k^\lambda dr},$$

und das ist eine Lösung von (30).

In der Umgebung von $O(x_0)$ verhält sich $\breve{\varphi}^i$ wie φ^i der Formel (XVI bis), mit a^i anstatt b^i. Der Übergang zu einem System von Integralgleichungen, die zu (XVII) ganz analog sind, liegt auf der Hand.

Streszczenie.

Metoda parametrysy daje się rozciągnąć na układy równań typu hiperbolicznego. To zostało zilustrowane na kilku przykładach równań wektorowych. Jeden z przykładów zawiera efektywne określenie parametrysy dla równania falowego na powierzchni De Sittera, a więc daje możność efektywnego sprowadzenia równania hiperbolicznego na powierzchni krzywej stałej krzywizny do równania całkowego Fredholma.