icm©

Remarques sur les fonctions de plusieurs variables réelles

(Uwagi o funkcjach wielu zmiennych rzeczywistych)

Par

W. Sierpiński

M. Bieberbach a signalé en 1931 [1]) le théorème que toute fonction de deux variables réelles se laisse représenter par superposition de fonction d'une seule variable réelle et de la fonction $s(x, y) = x + y$. Ce théorème a été démontré récemment par M. A. Lindenbaum [2]).

Le but de cette Note est de donner une démonstration tout à fait élémentaire de ce théorème remarquable ainsi que de la proposition de M. Bieberbach concernant la réduction des fonctions de trois variables aux fonctions de deux variables, et de faire quelques remarques qui s'y rattachent.

1. Considérons tout d'abord le problème suivant:

À laquelle condition nécessaire et suffisante doit satisfaire la fonction de deux variables réelles $\varphi(x, y)$ pour qu'il existe pour toute fonction de deux variables réelles $f(x, y)$ une fonction $g(t)$ d'une seule variable réelle (fonction qui dépend de la fonction f), telle que

(1) $$f(x, y) = g(\varphi(x, y))$$

pour tous les nombres réels x et y?

Je prouverai que cette condition est que la fonction $\varphi(x, y)$ soit à valeurs distinctes (c'est-à-dire que l'égalité $\varphi(x_1, y_1) = \varphi(x_2, y_2)$ entraîne toujours: $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$).

---

[1]) *Journ. f. r. u. a. Math.* 165, p. 92.

[2]) *Fundam. Math.* t. XX (1933), p. 26.

En effet, soit $\varphi(x,y)$ une fonction donnée de deux variables réelles et supposons qu'il existe pour toute fonction $f(x,y)$ de deux variables réelles une fonction $g(t)$ d'une variable réelle t, telle qu'on a la formule (1) pour tous les nombres réels x et y. Admettons que x_1, y_1, x_2 et y_2 sont quatre nombres réels, tels qu'on a soit $x_1 \neq x_2$, soit $y_1 \neq y_2$ et que

$$\varphi(x_1, y_1) = \varphi(x_2, y_2). \tag{2}$$

Il existe évidemment une fonction de deux variables réels $f(x, y)$, telle que

$$f(x_1, y_1) \neq f(x_2, y_2) \tag{3}$$

(p. e. la fonction $f(x,y) = x$, si $x_1 \neq x_2$, et la fonction $f(x,y)$, si $y_1 \neq y_2$).

D'après notre hypothèse, il existe une fonction $g(t)$ d'une variable réelle t, telle qu'on a pour x et y réels la formule (1), donc en particulier

$$f(x_1, y_1) = g(\varphi(x_1, y_1)) \quad \text{et} \quad f(x_2, y_2) = g(\varphi(x_2, y_2))$$

ce qui donne, d'après (2): $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$, contrairement à (3).

La fonction $\varphi(x,y)$ est donc nécessairement à valeurs distinctes et notre condition est nécessaire.

Soit maintenant $\varphi(x,y)$ une fonction donnée quelconque de deux variables réelles à valeurs distinctes. Soit $f(x,y)$ une fonction donnée quelconque de deux variables réelles. Définissons la fonction $g(t)$ d'une variable réelle t comme il suit.

Soit t un nombre réel donné. S'il n'existe aucun système x, y de deux nombres réels, tel que $\varphi(x,y) = t$, posons $g(t) = 0$.

S'il existe un système x, y de deux nombres réels, tel que $\varphi(x,y) = t$ il existe un seul, la fonction $\varphi(x,y)$ étant à valeurs distinctes. Les nombres x et y sont donc dans ce cas bien déterminés par le nombre t. Nous poserons $g(t) = f(x,y)$.

Il est évident qu'on a l'égalité (1) quels que soient les nombres réels x et y (Puisque si, x et y étant deux nombres réels données quelconques, on pose $t = \varphi(x,y)$, on a, d'après la définition de la fonction g, $g(t) = f(x,y)$, et les égalités $t = \varphi(x,y)$ et $g(t) = f(x,y)$ donnent l'égalité (1)). Notre condition est donc suffisante.

Notre assertion est ainsi démontrée et nous pouvons énoncer ce

Théorème 1: *Si $\varphi(x,y)$ est une fonction de deux variables réelles à valeurs distinctes (et seulement dans ce cas) il existe pour toute fonction de deux variables réelles $f(x,y)$ une fonction d'une variable réelle $g(t)$, telle qu'on a pour tous les nombres x et y réels l'égalité* (1).

Or, comme on sait, il existe des fonctions $\varphi(x,y)$ de deux variables réelles à valeurs distinctes qui sont de la forme

$$\varphi(x,y) = \varphi_1(x) + \varphi_2(y),$$

où φ_1 et φ_2 sont des fonction (d'une variable réelle) de 1re classe de Baire [1])

En posant $s(x,y) = x + y$ on a donc

$$\varphi(x,y) = s(\varphi_1(x), \ \varphi_2(y))$$

et il s'en suit la proposition de M. Bieberbach que toute fonction de deux variables réelles se laisse représenter par superposition de fonctions d'une seule variable et de la fonction $s(x,y) = x + y$.

Quant aux fonctions de deux variables réelles à valeurs distinctes, il est à remarquer qu'elles ne peuvent être continues (même par rapport à chaque variable séparément) [2]).

De notre théorème 1 résulte encore que toute fonction de deux variables réelles est une fonction d'une variable réelle d'une fonction fixe de deux variables réelles (qui peut être fixée comme une fonction de première classe de Baire [3])). La généralisation aux fonctions de plusieurs variables réelles n'offre pas de difficultés.

2. Théorème 2: *Si $\varphi(x,y)$ est une fonction de deux variables réelles à valeurs distinctes (et seulement dans ce cas) il existe pour toute fonction $f(x,y,z)$ de trois variables réelles une fonction $g(u,v)$ de deux variables réelles u et v, telle que*

[1]) Il suffit évidemment de démontrer l'existence d'une telle fonction $\varphi(x,y)$ définie pour $0 \leqslant x < 1$ et $0 \leqslant y < 1$. Telle est p. e. la fonction $\varphi(x,y) = \varphi_1(x) + \varphi_2(y)$, où

$$\varphi_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E\, 2^n x - 2\, E\, 2^{n-1} x}{2^{2n}} \quad \text{et} \quad \varphi_2(y) = \tfrac{1}{2}\, \varphi_1(y),$$

où Et désigne l'entier le plus grand ne dépassant pas t (Cf. A. Lindenbaum, ***Fund. Math.***, t. XX, p. 27).

[2]) Voir p. e. mon livre *Leçons sur les nombres transfinis*, Paris 1926, p. 73.

[3]) On voit aussi sans peine qu'on peut fixer $\varphi(x,y)$ comme une fonction de 1re classe (à valeurs distinctes), dont l'ensemble de valeurs est de mesure nulle. La fonction $g(t)$ (qui dépend de f) définie comme plus haut est dans ce cas toujours mesurable. Donc: *toute fonction de deux variables réelles* (mesurable on non) *est une fonction mesurable d'une variable réelle d'une fonction de Baire (fixe) de deux variables réelles* (Cf. la Communication de M. S. Ruziewicz au 2me Congrès des Mathématiciens Roumains à Turnu Severin, 1932).

icm©

$$(4) \qquad f(x,y,z) = g(x, \varphi(y,z))$$

pour tous les nombres réels x, y *et* z[1].

La nécessité de notre condition (que $\varphi(x,y)$ est à valeurs distinctes) se démontre sans aucune difficulté: nous prouverons donc seulement sa suffisance.

Soit donc $\varphi(x,y)$ une fonction donnée de deux variables réelles à valeurs distinctes.

Soit $f(x,y,z)$ une fonction donnée quelconque de trois variables réelles. Définissons la fonction $g(u,v)$ de deux variables réelles u et v comme il suit.

Soit (u,v) un système donné de deux nombres réels. S'il n'existe pas un système de deux nombres réels (y,z), tel que $v = \varphi(y,z)$, posons $g(u,v) = 0$. S'il existe un système (y,z) de deux nombres réels, tel que $v = \varphi(y,z)$, ce système est unique, la fonction φ étant à valeurs distinctes. Les nombres y et z sont donc dans ce cas bien déterminées par le nombre v. Posons $g(u,v) = f(u,y,z)$. Il est évident qu'on a pour tous les nombres réels x, y et z l'égalité (4). Le théorème 2 est ainsi démontré.

Du théorème 2 et de l'existence des fonctions de deux variables réelles à valeurs distinctes résulte que *les fonctions de trois variables réelles se réduisent par superposition aux fonctions de deux variables réelles.*

Pareillement comme le théorème 2, on démontre sans peine le

Théorème 3: *Si* $\varphi(x,y)$ *est une fonction de deux variables réelles à valeurs distinctes (et seulement dans ce cas) il existe pour toute fonction* $f(x,y,z,t)$ *de quatre variables réelles une fonction* $g(u,v)$ *de deux variables réelles, telle que*

$$f(x,y,z,t) = g(\varphi(x,y), \ \varphi(z,t))$$

pour tous les nombres réels x, y, z *et* t.

(La fonction $g(u,v)$ peut être définie comme il suit. S'il existe (pour les nombres u et v donnés) deux systèmes de nombres réels (x,y) et (z,t), tels que $u = \varphi(x,y)$ et $v = \varphi(z,t)$, les nombres x, y, z et t sont bien déterminés par les nombres u et v (puisque φ est une fonction à valeurs distinctes) et on pose $g(u,v) = f(x,y,z,t)$. Dans le cas contraire on pose $g(u,v) = 0$).

Du théorème 3 résulte que *toute fonction de quatre variables réelles se réduit par superposition aux fonctions de deux variables réelles.*

Généralement on peut démontrer que *toute fonction d'un nombre fini de variables réelles se réduit par superpositions aux fonctions de deux variables réels.* Cela résulte sans peine par l'induction du théorème suivant, dont la démonstration est tout à fait analogue à celle du théorème 2:

[1]) Cf. L. Bieberbach l. c., p. 89—90.

Théorème 4: *Si* $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *est une fonction de* n *variables réelles à valeurs distinctes (et seulement dans ce cas) il existe pour toute fonction* $f(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})$ *de* $n+1$ *variables réelles une fonction* $g(u,v)$ *de deux variables réelles, telle que*

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) = g(x_1, \varphi(x_2, x_3, \dots, x_{n+1}))$$

pour tous les nombres réels $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$.

Streszczenie.

Autor podaje dowody elementarne twierdzenia L. Bieberbacha, że każda funkcja dwuch zmiennych rzeczywistych daje się otrzymać przez superponowanie funkcji jednej zmiennej rzeczywistej, oraz funkcji $s(x,y) = x + y$, jakoteż twierdzenia Bieberbacha dotyczącego sprowadzania funkcyj trzech zmiennych do funkcyj dwuch zmiennych, a wreszcie czyni różne uwagi z tem związane.