Beiträge zur Theorie der Deformation

(Przyczynki do teorji odkształcenia)

von

J. A. Schouten und E. R. van Kampen

Einleitung.

In dieser Arbeit werden wir eine neue Methode skizzieren zur Behandlung von Deformationsproblemen in allgemeinen Mannigfaltigkeiten. Die Methode ist invariant. Sie geht aus von der Tatsache, daß es im Allgemeinen in einem dem Aufpunkte benachbarten Punkte eines Feldes drei Feldwerte gibt, den natürlichen, den pseudoparallelverschoben und den „mitgeschleppten". Es gibt also auch drei nicht invariante Differentiale, dagegen sind die drei Differenzen dieser Differentiale, die wir „kovariantes Differential", „Liesches Differential" und „scheinbares Differential" nennen, invariant. Wird nun irgend eine Deformation ausgeübt, so gibt es noch ein viertes nicht invariantes Differential und es entstehen drei invariante Variationen. die wir mit den Namen natürlich, geodätisch und absolut andeuten, Bei einem in Ruhe gelassenen Objekt ist die natürliche Variation Null, bei einem pseudoparallelverschobenen die geodätische und bei einem mitgeschleppten die absolute. Bei einem Deformationsproblem gibt es nun immer gewisse geometrische Objekte, deren Variation gegeben ist, und das Problem besteht darin, die Variation anderer Objekte, die von diesen Grundobjekten in gegebener Weise abhängen, zu bestimmen. Wenn die Grundobjekte entweder in Ruhe gelassen oder pseudoparallel verschoben oder mitgeschleppt werden (und dies ist fast immer der Fall), führt geschickte Anwendung der passenden invarianten Variationen zu einer überraschend einfachen und eleganten Lösungsmethode. Die Behandlung führt stets über die Grundformeln (2. 2), die das Kommutationsgesetz der invarianten Variationsoperatoren mit dem Operator ∇ der kovarianten Ableitung enthalten. Diese Formeln bilden den Kern der Methode.

Als Beispiel ist die Deformation einer V_n^m in V_n behandelt [1]). Grundobjekte sind hier die mitgeschleppten lokalen m-Richtungen und die in Ruhe gelassene Riemannsche Übertragung. Es ergibt sich u. a. ein Satz über Deformationen, bei denen sämtliche geodätische V_n^m geodätisch bleiben, und eine Verallgemeinerung des Begriffes der Minimal-V_n, die mit einem von Bompiani bewiesenen Theorem über Deformation einer Minimal-V_m zusammenhängt.

1. Zu einer Deformation gehörige invariante Differentiale und Variationen.

Ein Feld v^ν in L_n [2]) mit den Urvariablen ξ^ν und den Übertragungsparametern $\Gamma_{\lambda\mu}^\nu$ bestimmt eine infinitesimale Deformation $d\xi^\nu = v^\nu\, dt$, die „Verrückung". Das Feld v^ν ist oft nur in einem Teil von L_n definiert, z. B. über einer der Deformation unterworfenen X_m, $m < n$. Ist v^ν in einem Punkte mit den Koordinaten ξ^ν gegeben und liegt dieser Punkt im Definitionsbereich irgend eines geometrischen Objektes [3]), so kann man in $\xi^\nu + d\xi^\nu$ folgende Feldwerte dieses Objektes unterscheiden:

1. Der natürliche oder in Ruhe gelassene Feldwert, der dann und nur dann existiert, wenn sowohl ξ^ν als $\xi^\nu + d\xi^\nu$ in Definitionsbereiche des Objektes liegen.

Mit $\overset{1}{d}$ bezeichnen wir die Differenz der natürlichen Feldwerte in $\xi^\nu + d\xi^\nu$ und ξ^ν, z. B. für einen Skalar, einen Vektor, einen Affinor oder ein System von Übertragungsparametern:

---

[1]) Durch Spezialisierung lassen sich daraus die Formeln der Deformation einer V_m in V_n gewinnen. Es ist interessant diese zu vergleichen mit J. A. Schouten, Over infinitesimale vervormingen van een V_m in den V_n, Versl. Kon. Ak. v. Wet. 36 (1927) 1121—1131, englisch: Proc. Kon. Ak. v. Wet. 31 (1928) 208—218; es zeigt sich dann, daß infolge der hier angewandten Methode sämtliche Formen invariant geworden sind.

[2]) $X_n = n$-dimensionale Mannigfaltigkeit; $L_n = X_n$ mit einer linearen Übertragung; $V_n = L_n$ mit Riemannscher Übertragung; L_n^m bzw. $V_n^m = L_n$ bzw. V_n mit einem m-Richtungsfeld.

[3]) Unter einem geometrischen Objekt verstehen wir ein System von Bestimmungszahlen mit gegebener Transformationsweise. Ist die Transformationsweise linear homogen, so heißt das Objekt Größe, z. B. Vektor, Affinor, Dichte.

1.1
$$
\begin{aligned}
\overset{1}{d}p &= v^\mu\, dt\, \partial_\mu\, p \qquad \left(\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial \xi^\mu}\right)\\
\overset{1}{d}u^\nu &= v^\mu\, dt\, \partial_\mu\, u^\nu; \quad \overset{1}{d}w_\lambda = v^\mu\, dt\, \partial_\mu\, w_\lambda\\
\overset{1}{d}P^\nu_{\cdot\lambda} &= v^\mu\, dt\, \partial_\mu\, P^\nu_{\cdot\lambda}\\
\overset{1}{d}\Gamma_{\lambda\mu}^\nu &= v^\omega\, dt\, \partial_\omega\, \Gamma_{\lambda\mu}^\nu
\end{aligned}
$$

2. Der pseudoparallel verschobene Feldwert, der dann und nur dann existiert, wenn für das betreffende g. O. eine Übertragung in der Richtung von $d\xi^\nu$ vorliegt und außerdem ξ^ν (aber nicht notwendig $\xi^\nu + d\xi^\nu$) im Definitionsbereiche des Objektes liegt.

Mit $\overset{2}{d}$ bezeichnen wir die Differenz des nach $\xi^\nu + d\xi^\nu$ übertragenen Wertes und des natürlichen Wertes in ξ^ν, z. B.:

1.2
$$
\begin{aligned}
\overset{2}{d}p &= 0\\
\overset{2}{d}v^\nu &= -\Gamma_{\lambda\mu}^\nu\, u^\lambda\, v^\mu\, dt; \quad \overset{2}{d}w_\lambda = +\Gamma_{\lambda\mu}^\nu\, w_\nu\, v^\mu\, dt\\
\overset{2}{d}P^\nu_{\cdot\lambda} &= -\Gamma_{\alpha\mu}^\nu\, P^\alpha_{\cdot\lambda}\, v^\mu\, dt + \Gamma_{\lambda\mu}^\gamma\, P^\nu_{\cdot\gamma}\, v^\mu\, dt.
\end{aligned}
$$

3. Der mitgeschleppte Feldwert, der dadurch zustande kommt daß das Koordinatensystem mitgeschleppt wird und alle Objekte mitgehen, d. h. in Bezug auf dieses mitgeschleppte System die alten Bestimmungszahlen behalten. Der mitgeschleppte Feldwert existiert dann und nur dann, wenn ξ^ν im Definitionsbereiche des Objektes liegt, auch wenn dies mit $\xi^\nu + d\xi^\nu$ nicht der Fall ist und außerdem die partiellen Differentialquotienten der v^ν nach den ξ^ν bis zu einer genügend hohen Ordnung in ξ^ν bekannt sind. Um die Bestimmungszahlen in Bezug auf das gewöhnliche System in $\xi^\nu + d\xi^\nu$ zu erhalten, hat man also die alten Bestimmungszahlen zu transformieren wie bei dem Übergang von ξ^ν zum neuen System $\xi^{\nu'} \overset{*}{=} \xi^\nu + d\xi^\nu$, was bekanntlich mit Hilfe der intermediären Bestimmungszahlen des Einheitsaffinors

1.3
$$
\begin{aligned}
A_\lambda^{\nu'} &\overset{*}{=} \frac{\partial \xi^{\nu'}}{\partial \xi^\lambda} \overset{*}{=} A_\lambda^\nu + \partial_\lambda\, v^\nu\, dt,\\
A_{\lambda'}^\nu &\overset{*}{=} \frac{\partial \xi^\nu}{\partial \xi^{\lambda'}} \overset{*}{=} A_\lambda^\nu - \partial_\lambda\, v^\nu\, dt,
\end{aligned}
\qquad
A_\lambda^\nu \overset{*}{=} \begin{cases} 1 & (\nu = \lambda)\,^{1)} \\ 0 & (\nu \neq \lambda), \end{cases}
$$

---

[1]) Eine Gleichung, wird mit $\overset{*}{=}$ statt mit $=$ geschrieben, wenn sie nicht bei allen Transformationen zu holonomen oder nichtholonomen Systemen (und zwar für jeden einzeln Index für sich) invariant ist.

und (wie z. B. bei den $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$) deren Ableitungen geschieht. Bezeichnen wir also mit $\overset{3}{d}$ die Differenz des nach $\xi^\nu + d\,\xi^\nu$ mitgeschleppten Wertes und des natürlichen Wertes in ξ^ν, so ist z. B.:

1.4
$$\begin{aligned}
\overset{3}{d}p \quad &= 0 \\
\overset{3}{d}u^\nu \quad &= u^\mu\,\partial_\mu\,v^\nu\,dt\,; \quad \overset{3}{d}w_\lambda = -\,w_\mu\,\partial_\lambda\,v^\mu\,dt \\
\overset{3}{d}P^{\nu}_{\cdot\lambda} &= P^{\mu}_{\cdot\lambda}\,\partial_\mu\,v^\nu\,dt - P^{\nu}_{\cdot\mu}\,\partial_\lambda\,v^\mu\,dt \\
\overset{3}{d}\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} &= \Gamma^{\gamma}_{\lambda\mu}\,\partial_\gamma\,v^\nu\,dt - \Gamma^{\nu}_{\alpha\mu}\,\partial_\lambda\,v^\alpha\,dt - \Gamma^{\nu}_{\lambda\beta}\,\partial_\mu\,v^\beta\,dt - \partial_\mu\,\partial_\lambda\,v^\nu\,dt.
\end{aligned}$$

Aus den drei Differentialen $\overset{1}{d}$, $\overset{2}{d}$, $\overset{3}{d}$, die selbst im Allgemeinen nicht invariant[1]) sind, lassen sich drei invariante Differentiale bilden:

1. Das zur Übertragung gehörige kovariante[2]) Differential $\delta = \overset{1}{d} - \overset{2}{d}$, das dann und nur dann existiert, wenn für das betreffende g. O. eine Übertragung vorliegt, und außer dem sowohl ξ^ν als $\xi^\nu + d\,\xi^\nu$ im Definitionsbereiche des Objektes liegen. Der Ausdruck $\delta\,\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ hat also keinen Sinn, da es für das g. O. $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ keine Übertragung gibt. Geben wir allgemein Division eines invarianten Differentials durch dt an durch Verwendung des Buchstabens D, so ist also z. B.:

1.5
$$\begin{aligned}
Dp\ &= v^\mu\,\partial_\mu\,p \\
D\,u^\nu &= v^\mu\,\partial_\mu\,u^\nu + \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}\,u^\lambda\,v^\mu; \quad D\,w_\lambda = v^\mu\,\partial_\mu\,w_\lambda - \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}\,w_\nu\,v^\mu \\
&= v^\mu\,\nabla_\mu\,u^\nu \qquad\qquad\qquad\qquad\quad = v^\mu\,\nabla_\mu\,w_\lambda.
\end{aligned}$$

2. Das Liesche Differential $\underset{L}{\delta} = \overset{1}{d} - \overset{3}{d}$, das dann und nur dann existiert, wenn sowohl ξ^ν als $\xi^\nu + d\,\xi^\nu$ im Definitionsbereiche des Objektes liegt, z. B.:

1.6
$$\begin{aligned}
\underset{L}{D}p \quad &= v^\mu\,\partial_\mu\,p \\
\underset{L}{D}v^\nu \quad &= v^\mu\,\partial_\mu\,u^\nu - u^\mu\,\partial_\mu\,v^\nu; \\
\underset{L}{D}w_\lambda \quad &= v^\mu\,\partial_\mu\,w_\lambda + w_\mu\,\partial_\lambda\,v^\mu \\
\underset{L}{D}\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} &= v^\omega\,\partial_\omega\,\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} - \Gamma^{\gamma}_{\lambda\mu}\,\partial_\gamma\,v^\nu + \Gamma^{\nu}_{\tau\mu}\,\partial_\lambda\,v^\tau + \Gamma^{\nu}_{\lambda\tau}\,\partial_\mu\,v^\tau + \partial_\mu\,\partial_\lambda\,v^\nu.
\end{aligned}$$

[1]) Unter einem invarianten Differential verstehen wir ein Differential mit der Eigenschaft, daß die Differentiale der Bestimmungszahlen selbst Bestimmungszahlen eines g. O. sind. Hat dieses Objekt dieselbe Transformationsweise wie das differenzierte Objekt, so heißt das Differential kogredient.

[2]) Der Ausdruck kovariant hat nur historische Bedeutung; die hier definierten drei Differentiale sind bei Anwendung auf Affinoren alle kogredient im in Fußn. [1]) definirten Sinne.

Das Liesche Differential ist also unabhängig von jeder Übertragung. Für Vektoren und Affinoren ist es kogredient, für andere geometrische Objekte braucht es dies nicht zu sein, $\underset{L}{\delta}\,\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ ist z. B. ein Affinor. Das Differential von Affinoren kann, obwohl unabhängig von der Übertragung, stets auch mit Hilfe von ∇ geschrieben werden, z. B.:

1.7
$$\begin{aligned}
\underset{L}{D}v^\nu &= v^\mu\,\nabla_\mu\,u^\nu - u^\mu\,\nabla_\mu\,v^\nu - 2\,S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\,\nu}\,u^\lambda\,v^\mu = v^\mu\,\nabla_\mu\,u^\nu - u^\mu\,v_{\mu}^{\cdot\,\nu} \\
\underset{L}{D}w_\lambda &= v^\mu\,\nabla_\mu\,w_\lambda + w_\mu\,\nabla_\lambda\,v^\mu + 2\,S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\,\nu}\,w_\nu\,v^\mu = v^\mu\,\nabla_\mu\,w_\lambda + w_\mu\,v_{\lambda}^{\cdot\,\mu}
\end{aligned}$$
$$S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\,\nu} = \Gamma^{\nu}_{[\lambda\mu]}$$

wo

1.8
$$v_{\mu}^{\cdot\,\nu} = \partial_\mu\,v^\nu + \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}\,v^\lambda$$

das kovariante Differentialquotient von v^ν in Bezug auf $\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}$ statt $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ ist. Die Form (1.7), die den Vektorcharakter des Differentials hervorhebt, läßt sich meistens besser verwenden als (1.6).

3. Das scheinbare Differential $\overset{2}{d} - \overset{3}{d}$, das dann und nur dann existiert, wenn für das betreffende g. O. eine Übertragung in der Richtung von $d\,\xi^\nu$ vorliegt und außerdem sowohl ξ^ν (aber nicht notwendig auch $\xi^\nu + d\,\xi^\nu$) im Definitionsbereiche des Objektes liegt. Es ist z. B.:

1.9
$$\begin{aligned}
\underset{S}{D}p \quad &= 0 \\
\underset{S}{D}u^\nu \quad &= -\,v_{\lambda}^{\cdot\,\nu}\,u^\lambda \\
\underset{S}{D}w_\lambda \quad &= +\,v_{\lambda}^{\cdot\,\nu}\,w_\nu \\
\underset{S}{D}P^{\nu}_{\cdot\lambda} &= -\,v_{\mu}^{\cdot\,\nu}\,P^{\mu}_{\cdot\lambda} + v_{\lambda}^{\cdot\,\mu}\,P^{\nu}_{\cdot\mu}.
\end{aligned}$$

Das scheinbare Differential von u^ν steht in Beziehung zur infinitesimalen Transformation mittels des von dem differenzierten Objekt unabhängigen Affinors $A^{\nu}_{\lambda} - v_{\lambda}^{\cdot\,\nu}\,dt$, die das mitgeschleppte Feld in das p. p. verschobene Feld überführt.

Im Allgemeinen nimmt ein Feld irgend eines geometrischen Objektes ψ infolge der Deformation in $\xi^\nu + d\,\xi^\nu$ einen Wert an, der weder der natürliche noch der pseudoparallelverschobene noch der mitgeschleppte ist. Einfache Beispiele liefern die Krümmungen einer über $d\,\xi^\nu$ verrückten Kurve in V_n, sowie erster und zweiter Fundamentaltensor einer verrückten V_{n-1} in V_n. Diesen Feldwert wollen wir den variierten nennen und allgemein mit $\psi + \overset{v}{d}\psi$ angeben. Es giebt dann drei invariante Variationen:

1. Die natürliche Variation $\overset{n}{\delta} = \overset{v}{d} - \overset{1}{d}$, die Differenz von va-

riiertem und natürlichem Feldwert, z. B.:

1.10
$$\begin{aligned}
\overset{n}{D} p &= \frac{\overset{v}{d}}{dt}\, p - v^{\mu}\, \partial_{\mu} p \\
\overset{n}{D} u^{\nu} &= \frac{\overset{v}{d}}{dt}\, u^{\nu} - v^{\mu}\, \partial_{\mu} u^{\nu} \\
\overset{n}{D} w_{\lambda} &= \frac{\overset{v}{d}}{dt}\, w_{\lambda} - v^{\mu}\, \partial_{\mu} w_{\lambda} \\
\overset{n}{D} \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} &= \frac{\overset{v}{d}}{dt}\, \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} - v^{\omega}\, \partial_{\omega} \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}.
\end{aligned}$$

Die natürliche Variation existiert dann und nur dann, wenn sowohl ξ^{ν} als $\xi^{\nu} + d\xi^{\nu}$ im Definitionsbereiche des Objektes liegen. Sie ist unabhängig von jeder Übertragung.

2. Die geodätische Variation $\overset{g}{\delta} = \overset{v}{d} - \overset{2}{d}$, die Differenz von variiertem und pseudoparallel verschobenem Wert, z. B.:

1.11
$$\begin{aligned}
\overset{g}{D} p &= \frac{\overset{v}{d}}{dt}\, p \\
\overset{g}{D} u^{\nu} &= \frac{\overset{v}{d}}{dt}\, u^{\nu} + \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}\, u^{\lambda} v^{\mu} \\
\overset{g}{D} w_{\lambda} &= \frac{\overset{v}{d}}{dt}\, w_{\lambda} - \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}\, w_{\nu}\, v^{\mu}.
\end{aligned}$$

Die geodätische Variation existiert dann und nur dann wenn für das betreffende Objekt eine Übertragung in der Richtung von $d\xi^{\nu}$ vorliegt und ausserdem ξ^{ν} (aber nicht notwendig auch $\xi^{\nu} + d\xi^{\nu}$) im Definitionsbereiche des Objektes liegt.

3. Die absolute Variation $\overset{a}{\delta} = \overset{v}{d} - \overset{3}{d}$, die Differenz von variiertem und mitgeschlepptem Wert, z. B.:

1.12
$$\begin{aligned}
\overset{a}{D} p &= \frac{\overset{v}{d}}{dt}\, p \\
\overset{a}{D} u^{\nu} &= \frac{\overset{v}{d}}{dt}\, u^{\nu} - u^{\mu}\, \partial_{\mu} v^{\nu} \\
\overset{a}{D} w_{\lambda} &= \frac{\overset{v}{d}}{dt}\, w_{\lambda} + w_{\mu}\, \partial_{\lambda} v^{\mu} \\
\overset{a}{D} \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} &= \frac{\overset{v}{d}}{dt}\, \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} - \Gamma^{\gamma}_{\lambda\mu}\, \partial_{\gamma} v^{\nu} + \Gamma^{\nu}_{\alpha\mu}\, \partial_{\lambda} v^{\alpha} + \Gamma^{\nu}_{\lambda\beta}\, \partial_{\mu} v^{\beta} + \partial_{\mu}\, \partial_{\lambda} v^{\nu}.
\end{aligned}$$

Die absolute Variation existiert dann und nur dann wenn ξ^{ν} (aber nicht notwendig auch $\xi^{\nu} + d\xi^{\nu}$) im Definitionsbereich des Objektes liegt und außerdem die partiellen Differentialquotienten der v^{ν} nach den ξ^{ν} bis zu einer genügend hohen Ordnung in ξ^{ν} bekannt sind. Sie ist unabhängig von jeder Übertragung.

Offenbar ist stets

1.13
$$\begin{aligned}
\overset{n}{D} &= \qquad\qquad = \overset{g}{D} - D \qquad = \overset{a}{D} - \underset{L}{D} \\
\overset{g}{D} &= \overset{n}{D} + D = \qquad\qquad = \overset{a}{D} - D \\
\overset{a}{D} &= \overset{n}{D} + \underset{L}{D} = \overset{g}{D} + \underset{S}{D} \\
& D - \underset{L}{D} + \underset{S}{D} = 0.
\end{aligned}$$

Ein Problem der Deformationstheorie hat immer folgende Form. Von gewissen geometrischen Objekten, den Grundobjekten, ist die Variation gegeben. Es ist die Variation zu bestimmen von anderen Objekten, die von den Grundobjekten in gegebener Weise abhängen. Die Grundobjekte werden meistens entweder in Ruhe gelassen oder pseudoparallel verschoben oder mitgeschleppt.

Für ein in Ruhe gelassenes Feld ist z. B.:

1.14
$$\begin{aligned}
&\overset{n}{D} p = 0; \quad \overset{g}{D} p = D p = v^{\mu} \nabla_{\mu} p\,; \quad \overset{a}{D} p = \underset{L}{D} p \\
&\overset{n}{D} u^{\nu} = 0; \quad \overset{g}{D} u^{\nu} = D u^{\nu} = v^{\mu} \nabla_{\mu} u^{\nu}; \quad \overset{a}{D} u^{\nu} = \underset{L}{D} u^{\nu} = v^{\mu} \nabla_{\mu} u^{\nu} - u^{\mu} v_{\mu}{}^{\nu} \\
&\overset{n}{D} w_{\lambda} = 0; \quad \overset{g}{D} w_{\lambda} = D w_{\lambda} = v^{\mu} \nabla_{\mu} w_{\lambda}; \quad \overset{a}{D} w_{\lambda} = \underset{L}{D} w_{\lambda} = v^{\mu} \nabla_{\mu} w_{\lambda} + w_{\mu} v_{\lambda}{}^{\mu} \\
&\overset{n}{D} \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} = 0; \qquad\qquad \overset{a}{D} \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} = \underset{L}{D} \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} = \nabla_{\mu} v_{\lambda}{}^{\nu} - R_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu}\, v^{\omega},
\end{aligned}$$

wo $R_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu}$ die zu den $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ gehörige Krümmungsgrösse ist.

Für ein pseudoparallel verschobenes Feld ist z. B.:

1.15
$$\begin{aligned}
\overset{n}{D} p &= -D p\,; \quad \overset{g}{D} p = 0; \quad \overset{a}{D} p = \underset{S}{D} p = 0 \\
\overset{n}{D} u^{\nu} &= -D u^{\nu}; \quad \overset{g}{D} u^{\nu} = 0; \quad \overset{a}{D} u^{\nu} = \underset{S}{D} u^{\nu} = -v_{\lambda}{}^{\nu} u^{\lambda} \\
\overset{n}{D} w_{\lambda} &= -D w_{\lambda}; \quad \overset{g}{D} w_{\lambda} = 0; \quad \overset{a}{D} w_{\lambda} = \underset{S}{D} w_{\lambda} = +v_{\lambda}{}^{\nu} w_{\nu}.
\end{aligned}$$

Für ein mitgeschlepptes Feld ist z. B.:

1.16
$$\begin{aligned}
\overset{n}{D} p &= -\underset{L}{D} p\,; \quad \overset{g}{D} p = -\underset{S}{D} p = 0; \quad \overset{a}{D} p = 0 \\
\overset{n}{D} u^{\nu} &= -\underset{L}{D} u^{\nu}\,; \quad \overset{g}{D} u^{\nu} = -\underset{S}{D} u^{\nu}\,; \quad \overset{a}{D} u^{\nu} = 0 \\
\overset{n}{D} w_{\lambda} &= -\underset{L}{D} w_{\lambda}\,; \quad \overset{g}{D} w_{\lambda} = -\underset{S}{D} w_{\lambda}\,; \quad \overset{a}{D} w_{\lambda} = 0 \\
\overset{n}{D} \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} &= -\underset{L}{D} \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}\,; \qquad\qquad \overset{a}{D} \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} = 0.
\end{aligned}$$

Als Beispiel geben wir eine Ableitung der Killingschen Gleichung. Ein Feld v^ν in V_n definiert dann und nur dann eine infinitesimale Bewegung der V_n in sich, wenn der mitgeschleppte Wert des Fundamentaltensors $a_{\lambda\mu}$ in $\xi^\nu + v^\nu\, dt$ dem natürlichen Wert dort gleich ist, d. h. also, wenn das Liesche Differential von $a_{\lambda\mu}$ verschwindet. Aus (1.7) folgt dann

1.17 $$0 = \underset{L}{D}\, a_{\lambda\mu} = a_{\omega\mu}\, \nabla_\lambda v^\omega + a_{\lambda\omega}\, \nabla_\mu v^\omega = 2\, \nabla_{(\mu} v_{\lambda)}\,.$$

2. Die invarianten Variationen einer kovarianten Ableitung.

Es gilt der Satz:

Die Ausdrücke

2.1 $$\begin{aligned} &\overset{n}{D}\, \nabla_\mu \psi - \nabla_\mu \overset{n}{D}\, \psi \\ &\overset{g}{D}\, \nabla_\mu \psi - \nabla_\mu \overset{g}{D}\, \psi \\ &\overset{a}{D}\, \nabla_\mu \psi - \nabla_\mu \overset{a}{D}\, \psi\,. \end{aligned}$$

worin ψ irgend ein geometrisches Objekt [1] ist, für welches eine Übertragung definiert ist, ändern sich nicht, wenn die Variation von ψ abgeändert wird bei Festhaltung der Variation der Übertragung.

Beweis.

Der Beweis braucht nur für den ersten Ausdruck geliefert zu werden, da die beiden andern aus diesem enstehen durch Addition der von jeder Variation unabhängigen Ausdrücke $D\, \nabla_\mu \psi - \nabla_\mu D\, \psi$ bzw. $\underset{L}{D}\, \nabla_\mu \psi - \nabla_\mu \underset{L}{D}\, \psi$. Wird nun die Variation von ψ geändert, so geht der Wert $\psi + \overset{v}{d}\, \psi$ in $\xi^\nu + d\,\xi^\nu$ etwa über in $\psi + \overset{v}{d}\, \psi + \chi\, dt$ und ändert sich die Variation der Übertragung nicht, so bleibt der Wert $\Gamma_{\lambda\mu}^\nu + \overset{v}{d}\, \Gamma_{\lambda\mu}^\nu$ dort derselbe. Infolgedessen ändern sich sowohl $\overset{n}{D}\, \nabla_\mu \psi$ als $\nabla_\mu \overset{n}{D}\, \psi$ um $\nabla_\mu \chi\, dt$ w. z. b. w.

Der Satz bleibt natürlich gelten, wenn die Übertragung nur in einem nicht notwendig n-dimensionalen Gebiet der L_n definiert ist. ψ kann dann nur ein geometrisches Objekt dieses Gebietes sein, und es ist die Änderung der Variation von ψ dadurch eingeschränkt, daß nur solche Variationen von ψ zulässig sind, bei denen ψ in dem Gebiet bleibt und nicht dem Wirkungsbereiche der Übertragung entzogen wird. Definieren wir z. B. die Übertragung in einer V_2 in V_3 durch die Festsetzung, daß der zweite Fundamentaltensor Tensor

[1] Die Indizes sind fortgelassen.

der Maßbestimmung wird, so sind alle Variationen eines Vektors der V_3 erlaubt, bei denen der variierte Vektor in der variierten V_2 liegt.

Was die Variation der Übertragung betrifft, gibt es zwei besonders wichtige Fälle, die Übertragung kann in Ruhe gelassen oder mitgeschleppt werden. Einer p. p. Verschiebung einer Übertragung kann man keine oder wenigstens keine von der Wahl des Feldes unabhängige Bedeutung beilegen. In Bezug auf die Variation des Feldes gibt es drei besonders wichtige Fälle: in Ruhe lassen, p. p. verschieben und mitschleppen. Um die Variation der invarianten Ableitung in den resultierenden sechs Fällen zu berechnen bedienen wir uns der leicht abzuleitenden Formeln

2.2 $$\begin{aligned}
&a \left\{ \begin{aligned} (D\, \nabla_\mu - \nabla_\mu D)\, p \; &= - v_{\mu}^{\cdot\varrho}\, \nabla_\varrho\, p \\ (D\, \nabla_\mu - \nabla_\mu D)\, u^\nu &= - v^\omega R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}\, u^\lambda - v_\mu^{\cdot\varrho}\, \nabla_\varrho\, u^\nu \\ (D\, \nabla_\mu - \nabla_\mu D)\, w_\lambda &= + v^\omega R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}\, w_\nu - v_\mu^{\cdot\varrho}\, \nabla_\varrho\, w_\lambda \end{aligned} \right. \\
&b \left\{ \begin{aligned} (\underset{L}{D}\, \nabla_\mu - \nabla_\mu \underset{L}{D})\, p \; &= 0 \\ (\underset{L}{D}\, \nabla_\mu - \nabla_\mu \underset{L}{D})\, u^\nu &= - v^\omega R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}\, u^\lambda + u^\lambda\, \nabla_\mu v_\lambda^{\cdot\nu} \\ (\underset{L}{D}\, \nabla_\mu - \nabla_\mu \underset{L}{D})\, w \; &= + v^\omega R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu}\, w_\nu - w_\nu\, \nabla_\mu v_\lambda^{\cdot\nu} \end{aligned} \right. \\
&c \left\{ \begin{aligned} (\underset{S}{D}\, \nabla_\mu - \nabla_\mu \underset{S}{D})\, p \; &= v_\mu^{\cdot\varrho}\, \nabla_\varrho\, p \\ (\underset{S}{D}\, \nabla_\mu - \nabla_\mu \underset{S}{D})\, u^\nu &= v_\mu^{\cdot\varrho}\, \nabla_\varrho\, u^\nu + u^\lambda\, \nabla_\mu v_\lambda^{\cdot\nu} \\ (\underset{S}{D}\, \nabla_\mu - \nabla_\mu \underset{S}{D})\, w_\lambda &= v_\mu^{\cdot\varrho}\, \nabla_\varrho\, w_\lambda - w_\nu\, \nabla_\mu v_\lambda^{\cdot\nu}. \end{aligned} \right.
\end{aligned}$$

Wird die Übertragung in Ruhe gelassen, so ist $\overset{n}{D}\, \nabla_\mu - \nabla_\mu \overset{n}{D}$ infolge des bewiesenen Satzes unabhängig von der Wahl des Feldes oder der Variation des Feldes ψ stets Null. Aus (1.13) und (2.2) ergibt sich also $(\overset{g}{D}\, \nabla_\mu - \nabla_\mu \overset{g}{D})\, \psi$ und $(\overset{a}{D}\, \nabla_\mu - \nabla_\mu \overset{a}{D})\, \psi$. In den drei oben unterschiedenen Fällen verschwindet ferner entweder $\overset{n}{D}\, \psi$ oder $\overset{g}{D}\, \psi$ oder $\overset{a}{D}\, \psi$, und die zwei anderen Größen folgen aus (1.14), (1.15) oder (1.16). Damit sind dann aber auch $\nabla_\mu \overset{n}{D}\, \psi$, $\nabla_\mu \overset{g}{D}\, \psi$ und $\nabla_\mu \overset{a}{D}\, \psi$ und somit $\overset{n}{D}\, \nabla_\mu \psi$, $\overset{g}{D}\, \nabla_\mu \psi$ und $\overset{a}{D}\, \nabla_\mu \psi$ bekannt. Wird dagegen die Übertragung mitgeschleppt, so verschwindet $(\overset{a}{D}\, \nabla_\mu - \nabla_\mu \overset{a}{D})\, \psi$ stets, unabhängig von der Wahl des Feldes und der Variation des Feldes und man verfährt m. m. in derselben Weise. Der Fall wo $(\overset{g}{D}\, \nabla_\mu - \nabla_\mu \overset{g}{D})\, \psi$ verschwindet ist uninteressant da sich, wie oben angedeutet wurde, die Variation der $\Gamma_{\lambda\mu}^\nu$ nicht so wählen läßt, daß diese Gleichung unbhängig von der Wahl des Feldes gilt.

Die Rechnung ergibt folgende Resultate, z. B. für den Fall, daß die

Übertragung in Ruhe gelassen und das Feld entweder in Ruhe gelassen oder p. p. verschoben wird:

Ü. in Ruhe, F. in Ruhe:

$$a \quad \overset{n}{D}\nabla_\mu p = 0;\quad \overset{n}{D}\nabla_\mu v^\nu = 0;\quad \overset{n}{D}\nabla_\mu w_\lambda = 0$$

$$\overset{g}{D}\nabla_\mu p = v^\omega \nabla_{\omega\mu} p$$

2.3 $$b \quad \overset{g}{D}\nabla_\mu u^\nu = v^\omega \nabla_{\omega\mu} u^\nu$$

$$\overset{g}{D}\nabla_\mu w_\lambda = v^\omega \nabla_{\omega\mu} v^\nu$$

$$\overset{a}{D}\nabla_\mu p = v^\omega \nabla_{\omega\mu} p + v_\mu^{\cdot\gamma}\nabla_\gamma p$$

$$c \quad \overset{a}{D}\nabla_\mu u^\nu = v^\omega \nabla_{\omega\mu} u^\nu + v_\mu^{\cdot\gamma}\nabla_\gamma u^\nu - v_\alpha^{\cdot\nu}\nabla_\mu u^\alpha$$

$$\overset{a}{D}\nabla_\mu w_\lambda = v^\omega \nabla_{\omega\mu} w_\lambda + v_\mu^{\cdot\gamma}\nabla_\gamma w_\lambda + v_\lambda^{\cdot\gamma}\nabla_\mu w_\gamma.$$

Ü. in Ruhe, F. p. p. verschoben:

$$\overset{n}{D}\nabla_\mu p = - v_\mu^{\cdot\gamma}\nabla_\gamma p - v^\omega \nabla_{\omega\mu} p$$

$$a \quad \overset{n}{D}\nabla_\mu u^\nu = - v^\omega R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} u^\lambda - v_\mu^{\cdot\gamma}\nabla_\gamma u^\nu - v^\omega \nabla_{\omega\mu} u^\nu$$

$$\overset{n}{D}\nabla_\mu w_\lambda = v^\omega R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} w_\nu - v_\mu^{\cdot\gamma}\nabla_\gamma w_\lambda - v^\omega \nabla_{\omega\mu} w_\lambda$$

$$\overset{g}{D}\nabla_\mu p = - v_\mu^{\cdot\gamma}\nabla_\gamma p$$

2.4 $$b \quad \overset{g}{D}\nabla_\mu u^\nu = - v^\omega R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} u^\lambda - v_\mu^{\cdot\gamma}\nabla_\gamma u^\nu$$

$$\overset{g}{D}\nabla_\mu w_\lambda = v^\omega R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} w_\nu - v_\mu^{\cdot\gamma}\nabla_\gamma w_\lambda$$

$$\overset{a}{D}\nabla_\mu p = 0$$

$$c \quad \overset{a}{D}\nabla_\mu v^\nu = - v^\omega R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} u^\lambda - v_\alpha^{\cdot\gamma}\nabla_\mu u^\alpha$$

$$\overset{a}{D}\nabla_\mu w_\lambda = v^\omega R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} w_\nu + v_\lambda^{\cdot\gamma}\nabla_\mu w_\gamma.$$

3. Deformation einer V_n^m.

Als Beispiel soll die Deformation einer V_n^m in V_n behandelt werden. Eine V_n^m ist eine V_n in welcher ein m-Richtungsfeld definiert ist. Der Definitionsbereich dieses Feldes sei eine $V_{m'}$, $m' > m$, deren m'-Richtung in jedem Punkte die m-Richtung des Feldes enthält. In jedem Punkte des Feldes wählen wir m beliebige Maßvektoren $\underset{a}{e}^\nu$, $(a,\dots,g = 1,\dots,\mathrm{m})$ in der m-Richtung und $n-m$ beliebige Maßvektoren $\underset{p}{e}^\nu$, $(p,\dots,u = \mathrm{m}+1,\dots,\mathrm{n})$ in der zu dieser

senkrechten $(n-m)$-Richtung. Die zu diesen n Vektoren $\underset{i}{e}^\nu$, $(h,\dots,m = 1,\dots,\mathrm{n})$ reziproken Vektoren seien $\overset{k}{e}_\lambda$ [1]. Das holonome System der zu den Urvariablen ξ^ν der V_n gehörigen Maßvektoren $\underset{\lambda}{e}^\nu$, $\overset{\nu}{e}_\lambda$ sei mit (ν) bezeichnet, das nichtholonome System der Maßvektoren $\underset{i}{e}^\nu$, $\overset{k}{e}_\lambda$ dagegen mit (k) und das System $\underset{a}{e}^\nu$, $\overset{c}{e}_\lambda$ in den lokalen R_m mit (c). Wir führen jetzt die Größen

3.1 $$B_\lambda^\nu = \overset{b}{e}_\lambda \underset{b}{e}^\nu \qquad C_\lambda^\nu = \overset{q}{e}_\lambda \underset{q}{e}^\nu$$

ein, deren Summe A_λ^ν ist. Offenbar bestimmen das m-Richtungsfeld und B_λ^ν sich gegenseitig eindeutig, m. a. w. eine V_n^m ist durch das Feld von B_λ^ν bestimmt. Durch Überschiebung mit B und C wird jeder Vektor zerlegt in zwei Komponenten, eine in und eine senkrecht zur lokalen m-Richtung. Verschwindet die zweite Komponente, so nennen wir den Vektor Vektor der V_n^m oder in V_n^m liegend. Allgemeiner ist ein Affinor der V_n^m ein Affinor, dessen sämtliche Überschiebungen mit C_λ^ν verschwinden. Ein Affinor, der bei Überschiebung mit C_λ^ν über einen oder einige aber nicht über jeden Index verschwindet heißt verbindend und mit den erstgenannten Indizes in V_n^m liegend. Jeder Vektor v^ν bzw. w_λ der V_n^m hat m Bestimmungszahlen in Bezug auf (c), die wir mit v^c bzw. w_a bezeichnen. Für die Bestimmungszahlen der Maßvektoren $\underset{a}{e}^\nu$, $\overset{c}{e}_\lambda$ gilt natürlich

3.2 $$\underset{a}{e}^c \overset{*}{=} \overset{c}{e}_a \overset{*}{=} \delta_a^c.$$

Die Ausdrücke

3.3 $$B_a^\nu = \overset{b}{e}_a \underset{b}{e}^\nu \qquad B_\lambda^c = \overset{b}{e}_\lambda \underset{b}{e}^c$$

sind intermediäre Bestimmungszahlen von B_λ^ν, die sich mit dem einen Index auf (c), mit dem anderen auf (ν) beziehen. Sie bewirken den Übergang zwischen Bestimmungszahlen von Affinoren der V_n^m in bezug auf (c) und auf (ν):

3.4 $$v^c = B_\nu^c v^\nu;\quad v^\nu = B_c^\nu v^c \qquad w_a = B_a^\lambda w_\lambda;\quad w_\lambda = B_\lambda^a w_a.$$

Ist ein Vektor der V_n nicht auch Vektor der V_n^m, so entsteht bei Überschiebung mit B seine V_n^m-Komponente.

[1] Im Gegensatz zu den lateinischen Indizes $h,\dots,m$ stehen die griechischen Indizes für *cursiv* gedruckte Indizes $1,\dots,n$.

Die Ausdrücke

3.5 $$B^c_a = B^\mu_a \, B^c_\mu \overset{*}{=} \delta^c_a$$

sind die Bestimmungszahlen von B in bezug auf (c).

Offenbar haben Affinoren der V_n dann und nur dann Bestimmungszahlen in bezug auf (c), wenn sie gleichzeitig Affinoren der V^m_n sind. Intermediäre Bestimmungszahlen existieren für Affinoren der V^m_n und für verbindende Affinoren, bei letzteren können Indizes aus der Reiche $a, \ldots, g$ nur dort auftreten, wo die Affinoren in V^m_n liegen. Indizes aus der Reihe $h, \ldots, m$ können natürlich bei allen Affinoren an jeder Stelle vorkommen. Es gibt also folgende drei Arten von Affinoren:

1. A. der V_n mit Indizes $\varkappa, \ldots, \tau$ oder $h, \ldots, m$
2. A. der V^m_n mit Indizes $\varkappa, \ldots, \tau$ oder $h, \ldots, m$ oder $a, \ldots, g$
3. verbindende A. mit Indizes $\varkappa, \ldots, \tau$; $h, \ldots, m$ oder an bestimmten Stellen auch $a, \ldots, g$.

Die m-Richtungen sind bekanntlich dann und nur dann V_m-bildend, wenn die $n - m$ kovarianten Vektoren $\overset{p}{e}_\lambda$ es sind, d. h. wenn

3.6 $$B^{\sigma\varrho}_{\mu\lambda} \, \partial_{[\sigma} \overset{p}{e}_{\varrho]} \overset{h}{=} 0; \qquad p = \mathrm{m} + 1, \ldots, \mathrm{n}.$$

Dieses Gleichungssystem läßt sich leicht umformen in folgende Bedingung für B^ν_λ:

3.7 $$0 = Z_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\,\nu} \overset{h}{=} B^{\sigma\varrho}_{\mu\lambda} \, \partial_{[\sigma} B^\nu_{\varrho]} \overset{h}{=} - B^{\sigma\varrho}_{\mu\lambda} \, (\partial_{[\sigma} \overset{p}{e}_{\varrho]}) \, \underset{p}{e}^\nu.$$

Das Verschwinden des Anholonomitätsaffinors $Z_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\,\nu}$ ist also n. u. h. für die Holonomität der V^m_n. Wird im holonomen Falle $m' = m$, so haben wir den Fall der isolierten V_m in V_n, das System (c) läßt sich dann so wählen daß

3.8 $$B^\nu_a = \frac{\partial \xi^\nu}{\partial \eta^a},$$

wo die η^a Koordinaten der V_m sind.

Der Fundamentaltensor $a_{\lambda\mu}$ der V_n erzeugt in V^m_n einen Fundamentaltensor

3.9 $$b_{ab} = B^{\lambda\mu}_{ab} \, a_{\lambda\mu}$$

aus dem in üblicher Weise ein kontravarianter Tensor entsteht. Letzterer hängt folgendermaßen mit B^c_λ zusammen:

3.10 $$B^c_\lambda = b^{cb} \, B^\mu_b \, a_{\lambda\mu}.$$

Im Falle der V_m in V_n kann man bekanntlich von (3.8) ausgehen und (3.9, 10) zusammen mit

3.11 $$B^\nu_\lambda = B^\nu_b \, B^b_\lambda$$

zur Definition von B^c_λ und B^ν_λ verwenden.

Die Übertragung der V_n induziert eine Übertragung in der V^m_n vermöge der Forderung, daß das neue kovariante Differential die V^m_n-Komponente des kovarianten Differentials der V_n sei:

3.12 $$\nabla'_\mu \, v^\nu = B^{\sigma\nu}_{\mu\tau} \, \nabla_\sigma \, v_\nu.$$

Schreibt man diese Gleichung in Bezug auf das System (c) und sind Γ^k_{ij} die Parameter der Übertragung der V_n in bezug auf das nicht holonome System (k):

3.13 $$\Gamma^k_{ij} = A^{k\lambda\mu}_{\nu ij} \, \Gamma^\nu_{\lambda\mu} + A^k_\varrho \, \partial_j A_i^\varrho,$$

so ergibt sich

3.14 $$\nabla'_b \, v^c = B^c_a \, \partial_b \, v^a + \Gamma^c_{ab} \, v^a; \quad \partial_b = B^\mu_b \, \partial_\mu$$

woraus fur die Parameter Γ'^c_{ab} der induzierten Übertragung folgt

3.15 $$\Gamma'^c_{ab} \overset{*}{=} \Gamma^c_{ab}.$$

Charakteristisch für die bisher verwendeten Formeln mit ∇ und ∇' ist, daß ihre Bedeutung nicht davon abhängt, welche von den jeweils erlaubten Arten von Indizes verwendet sind. Diese Eigenschaft gilt nicht mehr für die Formeln, die den von B. van der Waerden und E. Bortolotti eingeführten Operator D [1]) enthalten, der definiert wird durch die Formeln

3.16 $$\begin{aligned} D_\mu p &= \nabla_\mu p \\ D_\mu u^\nu &= \nabla_\mu u^\nu \quad ; \quad & D_\mu w_\lambda &= \nabla_\mu w_\lambda \\ D_\mu u^k &= A^k_\nu \nabla_\mu u^\nu ; & D_\mu w_i &= A^\lambda_i \nabla_\mu w_\lambda \\ D_\mu p^c &= B^c_\nu \nabla_\mu p^\nu ; & D_\mu q_a &= B^\lambda_a \nabla_\mu q_\lambda \end{aligned}$$

3.17 $$\begin{aligned} D_j p &= \nabla_j p \\ D_j u^\nu &= B^\mu_j \nabla_\mu u^\nu ; & D_j w_\lambda &= B^\mu_j \nabla_\mu w_\lambda \\ D_j u^k &= \nabla u^k \quad ; & D_j w_i &= \nabla_j w_i \\ D_j p^c &= B^c_k \nabla_j p^k \quad ; & D_j q_a &= B^i_a \nabla_j q_i \end{aligned}$$

3.18 $$\begin{aligned} D_b p &= B^\mu_b \nabla_\mu \\ D_b u^\nu &= B^\mu_b \nabla_\mu u^\nu ; & D_b w_\lambda &= B^\mu_b \nabla_\mu w_\lambda \\ D_b p^c &= B^{\mu c}_{b\nu} \nabla_\mu p^\nu ; & D_b q_a &= B^{\mu\lambda}_{ba} \nabla_\mu q_\lambda \end{aligned}$$

[1]) Eine ausführliche Darstellung der D-Symbolik mit Litteraturangaben findet sich in J. A. Schouten und E. R. van Kampen, Zur Einbettungs- und Krümmungstheorie nichtholonomer Gebilde, Math. Ann. 103 (1930) 752—783, S. 771 u. f.

(wo u^{ν} und w_{λ} Vektoren der V_n und p^c und q_a Vektoren der V_n^m sind) und durch die Forderung, daß die formalen Regeln der Differentiation für Summen, für Produkte und für die drei möglichen Arten von Überschiebungen entsprechend den drei Arten von Indizes $\varkappa, \ldots, \tau$; $h, \ldots, m$ und $a, \ldots, g$ gelten. Der prinzipielle Unterschied zwischen D-Formeln und Formeln mit ∇ und ∇' besteht darin, daß bei letztern die Indizes $a, \ldots, g$, die nur dort auftreten können, wo der Ausdruck durch Überschiebung mit C annuliert wird, stets durch Indizes $\varkappa, \ldots, \tau$ oder $h, \ldots, m$ ersetzt werden können, ohne daß die Formeln ihre Bedeutung ändern, während in einer D-Formel die Ersetzung der Indizes $a, \ldots, g$ durch andere nicht ohne Änderung der Bedeutung möglich ist. Ist z. B. p^{ν} ein Vektor der V_n^m, so ist $D_b\, p^{\nu}$ ein Affinor, der mit ν nicht in V_n^m zu liegen braucht, während $D_b\, p^c$ ein Affinor der V_n^m ist.

Bei Verwendung der D-Symbolik ergeben sich recht einfache Formeln für B_a^{ν}:

3.19 $$B_a^{\nu} = D_a\, \xi^{\nu}$$

für den (ersten) Krümmungsaffinor der V_n^m:

3.20 $$H_{\dot{b}\dot{a}}{}^{\nu} = D_b\, B_a^{\nu} = D_b\, D_a\, \xi^{\nu}$$

und für den Anholonomitätsaffinor

3.21 $$Z_{\dot{b}\dot{a}}{}^{\nu} = H_{[ba]}{}^{\nu} = D_{[b}\, B_{a]}^{\nu} = D_{[b}\, D_{a]}\, \xi^{\nu}.$$

Die V_n^m soll nun in folgender Weise deformiert werden. Die m-Richtungen sollen bei der Verrückung $v^{\nu}\, dt$ mitgeschleppt werden, während das Feld $a_{\lambda\mu}$ und die Übertragung der V_n in Ruhe bleiben[1]). Es ist also infolge (1.14)

3.22
$$\begin{aligned}
&\alpha \quad && \overset{n}{D}\, a_{\lambda\mu} = \overset{g}{D}\, a_{\lambda\mu} = 0 \\
&\beta \quad && \overset{a}{D}\, a_{\lambda\mu} = \underset{L}{D}\, a_{\lambda\mu} = \underset{S}{D}\, a_{\lambda\mu} = 2\, v_{(\lambda\mu)}; \quad \overset{a}{D}\, a^{\mu\nu} = -\, 2\, v^{(\mu\nu)} \\
&\gamma \quad && \overset{n}{D}\, \Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} = 0 \\
&\delta \quad && \overset{a}{D}\, \Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} = \underset{L}{D}\, \Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} = \nabla_{\mu}\, v_{\dot{\lambda}}{}^{\nu} - R_{\dot{\omega}\dot{\mu}\dot{\lambda}}{}^{\nu}\, v^{\omega}.
\end{aligned}$$

Einfachheitshalber schleppen wir die Vektoren $\underset{a}{e}^{\nu}$, die ja doch innerhalb der

---

[1]) Das Feld v^{ν} wird außerhalb des Definitionsbereiches $V_{m'}$ des m-Richtungfeldes irgendwie fortgesetzt gedacht, damit der Ausdruck $v_{\dot{\lambda}}{}^{\mu}$ und seine Ableitungen in jedem Punkte dieser $V_{m'}$ Sinn haben. Die Art der Fortsetzung von v^{ν} außerhalb $V_{m'}$ hat nur Einfluß auf die Resultate der Operationen $\overset{a}{D}$ und $\overset{n}{D}$, nicht aber auf die der Operation $\overset{g}{D}$.

lokalen m-Richtung frei wählbar sind, ebenfalls mit, sodaß

3.23 $$\overset{a}{D}\, \underset{a}{e}^{\nu} = 0.$$

Wenn p^{ν} bzw. q_{λ} ein Vektor der V_n^m ist, so liegt dennoch im Allgemeinen $\overset{a}{D}\, p^{\nu}$ bzw. $\overset{a}{D}\, q_{\lambda}$ nicht in V_n^m. Die Ausdrücke $\overset{a}{D}\, p^c$ und $\overset{a}{D}\, q_a$ hätten also keinen Sinn. Definieren wir aber

3.24
$$\begin{aligned}
\overset{a}{D}\, p^c &= B_{\nu}^c\, D\, p^{\nu} \\
\overset{a}{D}\, q_a &= B_a^{\lambda}\, D\, q_{\lambda}
\end{aligned}$$

und fordern wir Gültigkeit der formalen Differentiationsregeln in bezug auf Summen, Produkte und Überschiebungen, so bekommt $\overset{a}{D}$ die Eigenschaften eines D-Operators von v. d. Waerden-Bortolotti. Für Vektoren der V_n^m, die bei der Deformation in V_n^m bleiben hat $\overset{a}{D}\, p^c$ bzw. $\overset{a}{D}\, q_a$ die Bedeutung des gewöhnlichen Differentials dividiert durch dt, da die absolute Variation der Maßvektoren $\underset{a}{e}^c$ und $\overset{c}{e}_a$ der V_n^m verschwindet:

3.25 $$\overset{a}{D}\, \underset{b}{e}^c = 0; \qquad \overset{a}{D}\, \overset{c}{e}_b = 0.$$

Aus (3.23) und (3.25) folgt

3.26 $$\overset{a}{D}\, B_a^{\nu} = \overset{a}{D}\, \overset{b}{e}_a\, \underset{b}{e}^{\nu} = 0.$$

und aus dieser Gleichung, (3.22) und (3.9) folgt

3.27 $$\overset{a}{D}\, b_{ab} = B_{a\,b}^{\lambda\mu}\, \overset{a}{D}\, a_{\lambda\mu} = 2\, B_{a\,b}^{\lambda\mu}\, v_{(\lambda\mu)}.$$

Ebenso folgt

3.28
$$\begin{aligned}
&\overset{a}{D}\, B_{\lambda}^c = 2\, B_{\tau}^c\, c_{\lambda\sigma}\, v^{(\sigma\tau)}; \quad (c_{\lambda\varrho} = C_{\lambda\varrho}^{\varkappa\mu}\, a_{\varkappa\mu}) \\
&\overset{a}{D}\, B_{\lambda}^{\nu} = 2\, B_{\tau}^{\nu}\, c_{\lambda\sigma}\, v^{(\sigma\tau)}; \quad \overset{a}{D}\, C_{\lambda}^{\nu} = -\, 2\, B_{\tau}^{\nu}\, c_{\lambda\sigma}\, v^{(\sigma\tau)} \\
&\overset{a}{D}\, B_a^c = 0 \\
&\overset{a}{D}\, b_{\lambda\mu} = 2\, v_{(\mu\lambda)} - 2\, C_{\mu\lambda}^{\sigma\varrho}\, v_{(\sigma\varrho)}; \quad \overset{a}{D}\, c_{\lambda\mu} = 2\, C_{\mu\lambda}^{\sigma\varrho}\, v_{(\sigma\varrho)} \\
&\overset{a}{D}\, b^{\mu\nu} = 2\, v^{(\sigma\tau)}\, B_{\sigma\tau}^{\mu\nu} \quad ; \quad \overset{a}{D}\, c^{\mu\nu} = -\, 2\, v^{(\mu\nu)} + 2\, v^{(\sigma\tau)}\, B_{\sigma\tau}^{\mu\nu}.
\end{aligned}$$

Werden $\overset{g}{D}\, p^c$ und $\overset{g}{D}\, q_a$ in derselben Weise definiert:

3.29
$$\begin{aligned}
\overset{g}{D}\, p^c &= B_{\nu}^c\, \overset{g}{D}\, p^{\nu} = \overset{a}{D}\, p^c - B_{\nu}^c\, \underset{S}{D}\, p^{\nu} = \overset{a}{D}\, p^c + B_{\nu}^c\, v_{\dot{\lambda}}{}^{\nu}\, p^{\lambda} \\
\overset{g}{D}\, q_a &= B_a^{\lambda}\, \overset{g}{D}\, q_{\lambda} = \overset{a}{D}\, q_a - B_a^{\lambda}\, \underset{S}{D}\, q_{\lambda} = \overset{a}{D}\, q_a - B_a^{\lambda}\, v_{\dot{\lambda}}{}^{\nu}\, q_{\nu},
\end{aligned}$$

so lassen sich aus

3.30 $$\overset{g}{D} B^{\nu}_{\lambda} = \overset{a}{D} B^{\nu}_{\lambda} - \underset{s}{D} B^{\nu}_{\lambda} = B^{\varrho}_{\lambda} C^{\nu}_{\tau} v_{\varrho}^{\cdot\,\tau} + B^{\nu}_{\tau} C^{\varrho}_{\lambda} v^{\tau}_{\cdot\,\varrho}$$

und (3.22 α) folgende Folgerungen gewinnen

3.31 $$\begin{aligned} \overset{g}{D} B^{\nu}_{a} &= B^{\varrho}_{a} C^{\nu}_{\tau} v_{\varrho}^{\cdot\,\tau} \\ \overset{g}{D} B^{c}_{\lambda} &= B^{c}_{\tau} C^{\varrho}_{\lambda} v^{\tau}_{\cdot\,\varrho} \\ \overset{g}{D} B^{c}_{a} &= 0 \\ \overset{g}{D} b_{ab} &= 0 \\ \overset{g}{D} b_{\lambda\mu} &= 2 B^{\varrho}_{(\lambda} C^{\sigma}_{\mu)} v_{\varrho\sigma}\,; \qquad \overset{g}{D} c_{\lambda\mu} = -2 B^{\varrho}_{(\lambda} C^{\sigma}_{\mu)} v_{\varrho\sigma} \\ \overset{g}{D} b^{\mu\nu} &= 2 B^{(\mu}_{\sigma} C^{\nu)}_{\tau} v^{\sigma\tau}\,; \qquad \overset{g}{D} c^{\mu\nu} = -2 B^{(\mu}_{\sigma} C^{\nu)}_{\tau} v^{\sigma\tau}. \end{aligned}$$

Aus dem Satze des § 2 und (2.2) ergibt sich:

3.32 $$\overset{n}{D} \nabla_{\mu} - \nabla_{\mu} \overset{n}{D} = 0$$

3.33 $$\begin{aligned} (\overset{g}{D} \nabla_{\mu} - \nabla_{\mu} \overset{g}{D})\, p &= - v_{\mu}^{\cdot\,\varrho} \nabla_{\varrho} p \\ (\overset{g}{D} \nabla_{\mu} - \nabla_{\mu} \overset{g}{D})\, u^{\nu} &= - v^{\omega} K_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\,\nu} u^{\lambda} - v_{\mu}^{\cdot\,\varrho} \nabla_{\varrho} u^{\nu} \\ (\overset{g}{D} \nabla_{\mu} - \nabla_{\mu} \overset{g}{D})\, w_{\lambda} &= v^{\omega} K_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\,\nu} w_{\nu} - v_{\mu}^{\cdot\,\varrho} \nabla_{\varrho} w_{\lambda} \end{aligned}$$

3.34 $$\begin{aligned} (\overset{a}{D} \nabla_{\mu} - \nabla_{\mu} \overset{a}{D})\, p &= 0 \\ (\overset{a}{D} \nabla_{\mu} - \nabla_{\mu} \overset{a}{D})\, u^{\nu} &= - v^{\omega} K_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\,\nu} u^{\lambda} + u^{\lambda} \nabla_{\mu} v_{\lambda}^{\cdot\,\nu} = - v^{\nu}_{\cdot\,\lambda\mu} u^{\lambda} \\ (\overset{a}{D} \nabla_{\mu} - \nabla_{\mu} \overset{a}{D})\, w_{\lambda} &= + v^{\omega} K_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\,\nu} w_{\nu} - w_{\nu} \nabla_{\mu} v_{\lambda}^{\cdot\,\nu} = v^{\nu}_{\cdot\,\lambda\mu} w_{\nu}\,, \end{aligned}$$

wo

3.35 $$\begin{aligned} v_{\nu\lambda\mu} &= - \nabla_{\lambda} \nabla_{\nu} v_{\mu} + \nabla_{\nu} \nabla_{\lambda} v_{\mu} - \nabla_{\mu} \nabla_{\lambda} v_{\nu} \\ &= - \nabla_{\lambda} \nabla_{(\nu} v_{\mu)} + \nabla_{\nu} \nabla_{(\lambda} v_{\mu)} - \nabla_{\mu} \nabla_{(\lambda} v_{\nu)} \end{aligned}$$

ein Affinorfeld ist, das infolge der zweiten Identität für $K_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\,\nu}$ symmetrisch in $\lambda\mu$ ist und nur vom Felde $\nabla_{(\mu} v_{\lambda)}$, nicht aber von $\nabla_{[\mu} v_{\lambda]}$ abhängt.

Infolge (3.34) ist die absolute Variation des Krümmungsaffinors

3.36 $$\begin{aligned} \overset{a}{D} H_{ba}^{\cdot\cdot\,\nu} &= \overset{a}{D} B^{\mu\lambda}_{ba} \nabla_{\mu} B^{\nu}_{\lambda} = B^{\mu\lambda}_{ba} \overset{a}{D} \nabla_{\mu} B^{\nu}_{\lambda} \\ &= - B^{\mu\lambda}_{ba} C^{\nu}_{\tau} v^{\tau}_{\cdot\,\lambda\mu} - 2 v_{(\sigma\tau)} b^{\nu\sigma} H_{ba}^{\cdot\cdot\,\tau}, \end{aligned}$$

woraus unter Berücksichtigung von (3.29) und (1.9) hervorgeht, daß

3.37 $$\begin{aligned} \overset{g}{D} H_{ba}^{\cdot\cdot\,\nu} = &- B^{\mu\lambda}_{ba} C^{\nu}_{\tau} v^{\tau}_{\cdot\,\lambda\mu} - 2 v_{(\sigma\tau)} b^{\nu\sigma} H_{ba}^{\cdot\cdot\,\tau} - B^{\lambda}_{b} v_{\lambda}^{\cdot\,\mu} H_{\mu a}^{\cdot\cdot\,\nu} \\ &- B^{\lambda}_{a} v_{\lambda}^{\cdot\,\mu} H_{b\mu}^{\cdot\cdot\,\nu} + v_{\lambda}^{\cdot\,\nu} H_{ba}^{\cdot\cdot\,\lambda}. \end{aligned}$$

Alternation über ba ergibt wegen der Symmetrie von $v^{\tau}_{\cdot\,\lambda\mu}$ in $\lambda\mu$:

3.38 $$\overset{g}{D} Z_{ba}^{\cdot\cdot\,\nu} = - 2 v_{(\sigma\tau)} b^{\nu\sigma} Z_{ba}^{\cdot\cdot\,\tau} - 2 B^{\mu\lambda}_{[ba]} v_{\mu}^{\cdot\,\varrho} Z_{\varrho\lambda}^{\cdot\cdot\,\nu} + v_{\lambda}^{\cdot\,\nu} Z_{ba}^{\cdot\cdot\,\lambda}$$

und daraus geht hervor, daß eine holonome V^{m}_{n} bei Deformation durch Mitschleppen der lokalen m-Richtungen holonom bleibt, was ja auch geometrisch evident ist. Eine geodätische Linie der V^{m}_{n} ist charakterisiert durch die Gleichung

3.39 $$i^{b} D_{b} i^{c} = 0$$

für den Einheitsvektor i^{c} in der Tangente. (3.39) ist gleichwertig mit

3.40 $$0 = i^{\mu} \nabla_{\mu} i^{\nu} - i^{\mu} C^{\nu}_{\tau} \nabla_{\mu} i^{\tau} = i^{\mu} \nabla_{\mu} i^{\nu} - i^{\mu} i^{\varrho} \nabla_{\mu} B^{\nu}_{\varrho} = i^{\mu} \nabla_{\mu} i^{\nu} - i^{b} i^{a} H_{ba}^{\cdot\cdot\,\nu}.$$

Eine V^{m}_{n} heißt geodätisch, wenn jede in V^{m}_{n} geodätische Linie auch in V_{n} geodätisch ist. Dieser Eall tritt also dann und nur dann ein, wenn

3.41 $$H_{(ba)}^{\cdot\cdot\,\nu} = 0$$

ist. Aus (3.37) geht also hervor, daß eine geodätische V^{m}_{n} bei der Deformation geodätisch bleibt, wenn $B^{\mu\lambda}_{ba} C^{\nu}_{\tau} v^{\tau}_{\cdot\,\lambda\mu}$ verschwindet. Da aber dieser Ausdruck dann und nur dann für jede Wahl von B verschwindet [1]), wenn $v_{\nu\lambda\mu}$ sich in der Form

3.42 $$v_{\nu\lambda\mu} = a_{\nu(\lambda} P_{\mu)}$$

schreiben läßt, wo P_{μ} ein beliebiger Vektor ist, folgt der Satz:

Bei einer über die ganze V_{n} definierten Verrückung $v^{\nu}\,dt$ bleiben sämtliche geodätische V^{m}_{n} dann und nur dann geodätisch, wenn v^{ν} einer Differentialgleichung von der Form

3.43 $$\nabla_{\lambda} \nabla_{(\varrho} v_{\mu)} - \nabla_{\varrho} \nabla_{(\lambda} v_{\mu)} + \nabla_{\mu} \nabla_{(\lambda} v_{\varrho)} = a_{\varrho(\lambda} P_{\mu)}$$

mit beliebigem P_{μ} genügt [2]).

Eine infinitesimale Bewegung in V_{n} ist charakterisiert durch die Killingsche Gleichung

3.44 $$\nabla_{(\mu} v_{\lambda)} = 0.$$

Da (3.43) mit $P_{\mu} = 0$ eine Folge von (3.44) ist, bleibt die geodätische Eigenschaft jedenfalls bei allen Bewegungen erhalten, was auch geometrisch evident ist.

---

[1]) Der Ricci-Kalkül S. 59 Aufg. 4.

[2]) Felder der V_{n}, die der Gleichung $\nabla_{\omega} \nabla_{\mu} v_{\lambda} = 0$ genügen mit der Nebenbedingung, daß v_{λ} ein Gradientfeld ist, sind untersucht von P. Schirokow (1926, Russisch). Solche Felder sind nur in besonderen V_{n} möglich. Ob die Gleichung (3.43) in jeder beliebigen V_{n} Lösungen zuläßt, ist eine offene Frage.

Für $m = n - 1$ und $v^\nu = \psi n^\nu$, wo n^ν der Einheitsvektor senkrecht zur lokalen $(n-1)$-Richtung ist geht (3.37) über in

3.45
$$\overset{g}{D} H_{\dot{b}\dot{a}}{}^{\nu} = - B_{ba}^{\mu\lambda} n^\nu n^\tau n^\varrho K_{\tau\lambda\mu\varrho} \psi + n^\nu D_b D_a \psi + B_c^\nu h_{ba} D^c \psi + \psi h_b{}^\tau h_{\tau a} n^\nu,$$

wo h_{ba} (bei einer V_m in V_n der zweite Fundamentaltensor) definiert ist durch

3.46
$$h_{ba} = - H_{\dot{b}\dot{a}}{}^{\nu} n_\nu = B_{ba}^{\mu\lambda} \nabla_\mu n_\lambda .$$

Aus (3.45) folgt noch

3.47
$$\overset{g}{D} h_{ba} = B_{ba}^{\mu\lambda} n^\tau n^\varrho K_{\tau\lambda\mu\varrho} \psi - D_b D_a \psi - h_b{}^\tau h_{\tau a} \psi$$
$$\overset{g}{D} n^\nu = - b^{\nu\tau} \nabla_\tau \psi .$$

Aus der ersten Gleichung geht hervor, daß die Änderung von h_{ba} bei einer geodätischen V_n^{n-1} nur von der Krümmungsgröße der V_n und $D_b D_a \psi$ abhängt und in einer V_n konstanten Krümmung nur von $D_b D_a \psi$, aus der zweiten, daß bei einer allgemeinen V_n^{n-1} die lokale $(n-1)$-Richtung dann und nur dann pseudoparallel verschoben wird, wenn die Ableitung von ψ in jeder in dieser $(n-1)$-Richtung enthaltenen Richtung verschwindet.

Für den Krümmungsvektor der V_n^m

3.48
$$T^\nu = \frac{1}{m} b^{ba} H_{\dot{b}\dot{a}}{}^{\nu} \text{ [1]}$$

ergibt sich aus (3.37) und (3.34)

3.49
$$\overset{g}{D} T^\nu = - \frac{2}{m} v^{(\lambda\mu)} H_{\dot{\mu}\dot{\lambda}}{}^{\nu} + \frac{1}{m} C^{\nu\tau} (\nabla_\mu \nabla_\lambda v_\tau) b^{\lambda\mu} - \frac{1}{m} C^{\nu\tau} K_{\dot{\tau}\dot{\lambda}\dot{\mu}}{}^{\varrho} v_\varrho b^{\lambda\mu} + v_{\dot{\sigma}}{}^{\tau} C_\tau^\nu T^\sigma - v^\tau_{\cdot\sigma} B_\tau^\nu T^\sigma .$$

Verschwindet T^ν, so heißt die V_n^m **minimal**. Die geometrischen Eigenschaften einer Minimal-V_m sind bekannt, die einer Minimal-V_n^m ergeben sich aus folgender Betrachtung. Das Volumelement der lokalen R_m ist

3.50
$$d\overset{m}{\tau} = (d\eta)^1 \ldots (d\eta)^{\mathrm{m}} \sqrt{b}$$

[1] Wir schreiben T^ν statt D^ν, um Verwechslung mit den Differentiationssymbolen D auszuschließen.

wo die

3.51
$$(d\eta)^c = B_c^\mu d\xi^\mu$$

die Bestimmungszahlen des Linienelementes in bezug auf das nichtholonome System (c) sind und b die Determinante der Matrix von b_{ab} ist. Bei der Deformation $v^\nu dt$ ist also

3.52
$$\begin{aligned} \overset{a}{D} d\overset{m}{\tau} &= (d\eta)^1 \ldots (d\eta)^{\mathrm{m}} \overset{a}{D} \sqrt{b} \\ &= (d\eta)^1 \ldots (d\eta)^{\mathrm{m}} \cdot \tfrac{1}{2} b^{1/2} b_{ab} \overset{a}{D} b_{ab} \\ &= b^{\lambda\mu} (\nabla_\mu B_\lambda^\varrho v_\varrho + \nabla_\mu C_\lambda^\varrho v_\varrho) d\overset{m}{\tau} \\ &= (D_b B_\lambda^b v^\lambda - T^\mu v_\mu) d\overset{m}{\tau} . \end{aligned}$$

Das Volumeleent bleibt also bei einer Verrückung $v^\nu dt$ **senkrecht** zur lokalen m-Richtung dann und nur dann invariant wenn $T^\mu v_\mu$ verschwindet. Das Verschwinden von T^ν ist also notwendig und hinreichend dafür, daß das Volumelement bei **jeder** infinitesimalen Verrückung senkrecht zur lokalen m-Richtung invariant bleibt [1]. Dies ist die Verallgemeinerung der Minimaleigenschaft der V_m.

Die Minimaleigenschaft bleibt infolge (3.49) dann und nur dann bei Deformation erhalten, wenn

3.53
$$b^{\mu\lambda} C_\tau^\nu v^\tau{}_{\cdot\lambda\mu} + 2 v^{(\mu\lambda)} H_{\dot{\mu}\dot{\lambda}}{}^{\nu} = 0.$$

[1] Daß eine Minimal-V_m auch in dieser Weise geometrisch charakterisiert werden kann, wurde zuerst von Bompiani bewiesen; Studi sugli spazi curvi, Atti del R. I. Veneto 80.2 (20/21) 1113—1145, S. 1141.