Sur l'équation différentielle $x'' + A(t)x = 0$ [1])

(O równaniu różniczkowem $x'' + A(t)x = 0$)

par

M. Biernacki

§ 1. Nous allons étudier l'allure des intégrales de l'équation

$$(1) \qquad x''(t) + A(t)\,x(t) = 0$$

pour les grandes valeurs positives de t, *en supposant que* $A(t) > 0$ *dès que* $t > t_0$. Il est bien connu que si $A(t)$ ne tend pas trop rapidement vers 0 lorsque $t \to +\infty$ toute intégrale de (1) est oscillante. Nous allons voir que si $A'(t) > 0$ pour $t > t_0$ une telle intégrale $x(t)$ jouit d'autres propriétés de la sinusoïde.

Désignons par $t_1, t_2, \ldots t_n \ldots$ les zéros de $x(t)$ qui sont plus grands que t_0 $(t_0 < t_1 < t_2 < \ldots)$. L'intervalle (t_n, t_{n+1}) contient un zéro et un seul de la dérivée $x'(t)$, nous le désignons par z_n. Enfin nous posons pour abréger:

$$u_n = \frac{z_n - \dfrac{t_n + t_{n+1}}{2}}{t_{n+1} - t_n}.$$

Si $A'(t) > 0$ pour $t > t_0$ les propositions suivantes ont lieu:

1) toute intégrale de (1) reste bornée lorsque $t \to +\infty$,

2) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{t_{n+2} - t_{n+1}}{t_{n+1} - t_n} = 1$ (il n'est pas probable que l'on puisse remplacer $\overline{\lim}$ par lim),

---

[1]) J'ai exposé les principaux résultats de ce travail au Congrès International des Mathématiciens à Zürich, en septembre 1932.

3) on a $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ lorsque n ne parcourt pas certains indices „exceptionnels" (il n'est d'ailleurs pas probable que l'on ait $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ sans aucune restriction),

4) dans bien de cas (cf. les énoncés V et VI) toute intégrale de (1) tend vers zéro lorsque $t \to +\infty$.

Ces résultats deviennent en partie intuitifs si on les interprète en considérant une masse concentrée en un point M et qui est attirée par un centre fixe O avec une force dont le quotient par la distance OM est une fonction donnée $A(t)$ du temps.

M. P. Fatou a étudié [2]) l'équation (1) en supposant que $A(t)$ reste comprise entre deux constantes positives et il a montré, en utilisant une méthode bien différente de la celle du texte, qu'alors non seulement toute solution est bornée mais encore qu'elle est stable c. à. d. que l'expression $x'^2 + x^2$ est comprise entre deux limites positives. Il serait intéressant d'examiner si ce fait subsiste partiellement dans le cas envisagé par nous et de voir si l'on peut supprimer les hypothèses relatives à la dérivée $A'(t)$ en les remplaçant par les conditions $\lim\limits_{t\to+\infty} A(t) = +\infty$ ou $\varliminf\limits_{t\to+\infty} A(t) > 0$. Il n'est d'ailleurs pas douteux que les énoncés V et VI pourront être considérablement généralisés. Remarquons enfin avec M. Fatou [3]) que les résultats s'appliquent à des équations ou systèmes plus compliqués, tels que $x'' + xH\,(x, y, z, \ldots) = 0, \ldots,$ pourvu que l'on sache que H est positive et croît avec t.

§ 2. Je rappelerai d'abord quelques propositions dont je me servirai dans la suite:

Théorème de Borel (complété par R. Nevanlinna) [4]).

Soit $u(t)$ une fonction positive et non décroissante pour $t > 0$, tandis que $\varphi(u)$ est positive et décroissante pour $u \geqslant 0$ et que $\int_0^\infty \varphi(u)\,du$ existe. L'on a:

$$u\{t + \varphi[u(t)]\} < u(t) + 1$$

pour $t > 0$ sauf au plus dans les intervalles dont l'étendue totale est finie.

Théorème de Petrovitsch [5]). On déduit de ce théorème que si $x(t)$ est une intégrale quelconque de (1), $A(t)$ positive et croissante l'on a, en posant $x(z_n) = x_n$:

dans l'intervalle (t_n, z_n): $x_n \cos[(t - z_n)\sqrt{A(z_n)}] \leqslant x(t) \leqslant x_n \cos[(t - z_n)\sqrt{A(t)}]$

„ „ (z_n, t_{n+1}): $x_n \cos[(t - z_n)\sqrt{A(t)}] \leqslant x(t) \leqslant x_n \cos[(t - z_n)\sqrt{A(z_n)}]$.

[2]) Problèmes d'agrégations, session de 1926. Sur un critère de stabilité: Comptes Rendus du 2. XII. 1929. Je dois ces renseignements bibliographiques à M. H. Milloux.

[3]) Cf. la Note aux Comptes Rendus qui vient d'être citée.

[4]) E. Borel, Acta Math. t. 20 (1896). R. Nevanlinna, Bull. Sc. math. II t. 55 (1930).

[5]) M. Petrovitsch, Bull. Soc. Math. de France t. 53 (1926) et „Intégration qualitative des équations différentielles", Mémorial des sc. math. fasc. 48, p. 49.

§ 3. Assujetissons pour un moment la fonction $A(t)$, supposée dérivable, à la seule condition d'être positive pour $t > t_0$, admettons toutefois que l'intégrale considérée $x(t)$ est oscillante. En multipliant l'équation (1) par x' et en intégrant par parties entre les limites a et b on obtient l'égalité:

$$x'^2(b) - x'^2(a) + A(b)x^2(b) - A(a)x^2(a) - \int_a^b A'(t)\,x^2(t)\,dt = 0. \tag{2}$$

Si $x(b) = x(a)$ on aura

$$x'^2(b) - x'^2(a) = \int_a^b A'(t)\,[x^2(t) - x^2(a)]\,dt.$$

Si a est un point de l'intervalle (t_n, z_n) et b un point l'intervalle (z_n, t_{n+1}) et si $A'(t) > 0$ dans (t_n, t_{n+1}) le second membre de la dernière égalité est manifestemment positif, donc $|x'(b)| > |x'(a)|$ et par suite $u_n > 0$, $|x'(t_{n+1})| > |x'(t_n)|$. Si $A'(t) < 0$ dans (t_n, t_{n+1}) on a des inégalités contraires.

Posons maintenant dans (2) $a = z_n$, $b = z_{n+1}$ il vient:

$$A(z_{n+1})\,x_{n+1}^2 - A(z_n)\,x_n^2 = \int_{z_n}^{z_{n+1}} A'(t)\,x^2(t)\,dt. \tag{2'}$$

Ajoutons aux deux membres de (2') la quantité $A(z_n)\cdot x_{n+1}^2$, le résultat peut s'écrire:

$$A(z_n)\,[x_{n+1}^2 - x_n^2] + \int_{z_n}^{z_{n+1}} A'(t)\,[x_{n+1}^2 - x^2(t)]\,dt = 0$$

égalité impossible si $A'(t) > 0$ dans l'intervalle (z_n, z_{n+1}) et si $x_{n+1}^2 \geqslant x_n^2$. En ajoutant aux deux membres de (2') la quantité $A(z_{n+1})\,x_n^2$ on obtient l'égalité:

$$A(z_{n+1})\,[x_{n+1}^2 - x_n^2] + \int_{z_n}^{z_{n+1}} A'(t)\,[x_n^2 - x^2(t)]\,dt = 0,$$

qui montre que si $A'(t) < 0$ dans l'intervalle (z_n, z_{n+1}) l'on a $|x_{n+1}| > |x_n|$. En résumé nous pouvons énoncer, en tenant compte de (2'), la proposition suivante:

I. *Si* $A'(t) < 0$ *pour* $t > t_0$ *l'on a* $u_n < 0$, *les suites* $\{\sqrt{A(z_n)}\,|x_n|\}$ *et* $\{|x'(t_n)|\}$ *(la suite des valeurs absolues des extrêma de* $x'(t)$*) sont décroissantes tandis que la suite* $\{|x_n|\}$ *est croissante. Si* $A'(t) > 0$ *pour* $t > t_0$ *l'on a* $u_n > 0$, *les suites* $\{\sqrt{A(z_n)}\cdot|x_n|\}$ *et* $\{|x'(t_n)|\}$ *sont croissantes tandis que la suite* $\{|x_n|\}$ *est décroissante,* $x(t)$ *est donc bornée lorsque* $t \to +\infty$. *Si* $A'(t) > 0$ *pour* $t > t_0$ *et si* $\lim\limits_{t\to+\infty} A(t) = +\infty$ *la dérivée* $x''(t)$ *n'est pas bornée lorsque* $t \to +\infty$.

§ 4. Je supposerai, *dans tout ce qui suit*, que $A'(t) > 0$ dès que $t > t_0$. D'après le théorème de Sturm on a les inégalités:

$$\frac{\pi}{\sqrt{A(t_{n+1})}} \leqslant t_{n+1} - t_n \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{A(t_n)}} \tag{3}$$

donc les longueurs des intervalles (t_n, t_{n+1}) décroissent avec n.

En posant dans l'énoncé du théorème de Borel $u(t) = [\log A(t)]^2$ et $\varphi(u) = 4e^{-\frac{1}{2}\sqrt{u}}$ on obtient l'inégalité:

$$\left\{\log A\left[t + \frac{4}{\sqrt{A(t)}}\right]\right\}^2 < [\log A(t)]^2 + 1$$

valable pour $t > t_0$ sauf au plus pour les t remplissant des intervalles d'étendue totale finie. En divisant les deux membres de l'inégalité par $\log A(t)$ on aura *a fortiori*

$$\log A\left(t + \frac{4}{\sqrt{A(t)}}\right) < \log A(t) + \frac{1}{\log A(t)}.$$

En tenant compte de ce que $e^x < 1 + 2x$ pour les x positifs et assez petits, il vient:

$$A\left(t + \frac{4}{\sqrt{A(t)}}\right) < \left(1 + \frac{2}{\log A(t)}\right) \cdot A(t).$$

En définitive, nous avons l'inégalité:

$$A\left(t + \frac{4}{\sqrt{A(t)}}\right) < [1 + \varepsilon(t)]\, A(t) \tag{4}$$

valable pour $t > t_0$, sauf au plus pour les t remplissant les intervalles d'étendue totale finie. $\varepsilon(t)$ est une fonction décroissante de t qui tend vers 0 lorsque $t \to +\infty$.

On peut trouver, pour une infinité de valeurs de n, un point y_n dans l'intervalle (t_n, z_n) tel que (4) soit valable pour $t = y_n$ et que

$$0 < m < \frac{z_n - y_n}{t_{n+1} - t_n} < k < \frac{1}{2} \tag{5}$$

m et k étant des nombres fixes. En effet, dans le cas contraire l'étendue des intervalles où (4) n'est pas vérifiée serait infinie. Cela posé, il existe aussi pour une infinité de valeurs de n (choisies parmi les valeurs précédentes) un point w_n tel que $w_n < t_n$, $y_n - w_n < t_{n+1} - t_n$ et tel que (4) a lieu pour $t = w_n$, car autrement (4) ne serait pas encore vérifiée dans des intervalles d'étendue totale infinie.

Il résulte même de nos raisonnements que la série $\sum_{i=1}^{\infty}(t_{n_{i+1}} - t_{n_i})$ où figurent les indices n_i pour lesquels les points y_{n_i} ou w_{n_i} n'existent pas est convergente. Nous appellerons tous les autres indices n „ordinaires" et les intervalles (t_n, t_{n+1}) correspondants seront dits „ordinaires".

Supposons que n soit ordinaire, puisque

$$y_n < w_n + (t_{n+1} - t_n) \leqslant w_n + \frac{\pi}{\sqrt{A(t_n)}} < w_n + \frac{4}{\sqrt{A(w_n)}}$$

et que (4) a lieu pour $t = w_n$, on aura quelque petit que soit ε pourvu que n soit assez grand

$$A(y_n) < (1+\varepsilon)\, A(w_n) < (1+\varepsilon)\, A(t_n),$$

donc

$$t_{n+1} - y_n < t_{n+1} - t_n \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{A(t_n)}} < \frac{\pi\sqrt{1+\varepsilon}}{\sqrt{A(y_n)}}$$

et par suite

$$t_{n+1} < y_n + \frac{4}{\sqrt{A(y_n)}}$$

si ε est assez petit. L'inégalité (4), appliquée au point $t = y_n$, fournit alors les inégalités:

$$A(t_{n+1}) < (1+\varepsilon)\, A(y_n) < (1+\varepsilon)^2 A(t_n).$$

En définitive nous avons l'énoncé suivant:

II. *Si* $A'(t) > 0$ *pour* $t > t_0$ *l'on a* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{A(t_{n+1})}{A(t_n)} = 1$ *lorsque* n *ne parcourt pas les indices exceptionnels* n_i *qui sont tels que la série* $\sum_{i=1}^{\infty}(t_{n_{i+1}} - t_{n_i})$ *converge.*

§ 5. Il existe une suite infinie de groupes des intervalles ordinaires voisins, telle que chaque groupe contient un nombre des intervalles qui croît indéfiniment avec l'indice du groupe. Dans le cas contraire, en effet, le nombre des intervalles d'un groupe serait borné, plus petit que l'entier q par exemple. Chaque groupe des intervalles ordinaires serait précédé par un intervalle exceptionnel de la longueur plus grande que la somme des longueurs des intervalles appartenant au groupe, divisée par q, l'étendue totale des intervalles exceptionnels serait donc encore infinie. En particulier, les inégalités (3) et l'énoncé II fournissent de suite la proposition:

III. *Si* $A'(t) > 0$ *pour* $t > t_0$ *l'on a* $\dfrac{t_{n+1} - t_n}{t_n - t_{n-1}} < 1$ *et* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \dfrac{t_{n+1} - t_n}{t_n - t_{n-1}} = 1.$

Appliquons maintenant les inégalités de M. Petrovitsch (§ 2), on en déduit de suite les suivantes:

$$\frac{\pi}{2\sqrt{A(t_{n+1})}} \leqslant t_{n+1} - z_n \leqslant \frac{\pi}{2\sqrt{A(z_n)}} \leqslant z_n - t_n \leqslant \frac{\pi}{2\sqrt{A(t_n)}}.$$

Il en résulte de nouveau que $u_n \geqslant 0$, en tenant compte de l'énoncé II on obtient en outre la proposition que voici:

IV. *Si $A'(t) > 0$ pour $t > t_0$ l'on a $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ lorsque n ne parcourt pas les indices exceptionnels.*

§ **6.** Considérons un intervalle (t_n, t_{n+1}) *ordinaire* et supposons que l'on ait

(6) $$|x(y_n)| > s \cdot |x_n|.$$

En tenant compte de l'équation différentielle nous aurons alors dans l'intervalle (y_n, z_n) l'inégalité

$$|x''(t)| > s \cdot A(y_n) \cdot |x_n|.$$

En intégrant deux fois cette inégalité dans l'intervalle (y_n, z_n) on aura:

$$|x_n| - |x(y_n)| > s \cdot A(y_n) \cdot |x_n| \cdot \frac{(z_n - y_n)^2}{2}$$

donc, en vertu de (5) du § 4:

$$|x(y_n)| < [1 - s \cdot A(y_n) \cdot \frac{m^2}{2}(t_{n+1} - t_n)^2] \cdot |x_n|$$

et d'après (6), (3) du § 4 et l'énoncé II du § 4:

$$s < \left[1 - (1-\varepsilon) \cdot \frac{s\, m^2 \pi^2}{2}\right]$$

quelque petit que soit le nombre positif ε pourvu que n soit assez grand. Par suite si ε est assez petit on a l'inégalité:

$$s < \frac{1}{1 + \frac{m^2 \pi^2}{4}} = p.$$

En définitive nous avons pour tous les n ordinaires et assez grands l'inégalité:

(7) $$|x(y_n)| \leqslant p \cdot |x_n|$$

p étant un nombre fixe compris entre 0 et 1 (en choisissant convenablement m on peut poser $p = \frac{4}{5}$).

§ **7.** Supposons que $A'(t)$, positive, ne soit pas croissante pour $t > t_0$ et que $\lim\limits_{t\to+\infty} A(t) = +\infty$. Admettons qu'une intégrale $x(t)$ de (1) ne tend pas vers zéro lorsque $t \to +\infty$. La suite $|x_n|$ étant décroissante on a donc $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n| = g > 0$. A tout nombre positif ε on peut faire correspondre un entier N (qui dépend de ε) tel que $x_n^2 > x^2(t) - \varepsilon$ pour $t > t_N$ et pour tout $n > N$. Il résulte des hypothèses que tous les intervalles (t_n, t_{n+1}) pourront jouer le rôle des intervalles ordinaires, le rapport $A(t+1) : A(t)$ tend en effet vers 1 lorsque $t \to +\infty$. Les calculs précédents sont donc valables pour tout entier n.

Nous aurons d'après l'égalité (2) du § 3, en y posant $a = t_N$, $b = z_n$:

(8) $$C = \int_{t_N}^{z_n} A'(t)[x_n^2 - x^2(t)]\,dt + A(t_N)x_n^2 > \int_{t_N}^{t_n} A'(t)[x_n^2 - x^2(t)]\,dt = \sum_{s=N}^{n-1}(K_s + J_s)$$

où

$$K_s = \int_{t_s}^{y_s} A'(t)[x_n^2 - x^2(t)]\,dt, \qquad J_s = \int_{y_s}^{t_{s+1}} A'(t)[x_n^2 - x^2(t)]\,dt,$$

tandis que la constante C ne dépend pas de n. D'après (7) on aura dans l'intervalle (t_s, y_s) $x^2(t) \leqslant p^2 x_s^2 < p^2 x_n^2 + \varepsilon$, il en résulte que

(9) $$K_s > [(1-p^2)x_n^2 - \varepsilon][A(y_s) - A(t_s)].$$

Or, nous avons, en tenant compte des inégalités (5) du § 4, de ce que $u_n > 0$ et du fait que $A'(t)$ ne croît pas:

(10) $$\frac{A(y_s) - A(t_s)}{A(t_{s+1}) - A(y_s)} = \frac{y_s - t_s}{t_{s+1} - y_s} \cdot \frac{A'(\theta_s)}{A'(\varphi_s)} > \frac{1-2k}{1+2k}$$
$$(t_s \leqslant \theta_s \leqslant y_s, \quad y_s \leqslant \varphi_s \leqslant t_{s+1}).$$

On peut donc remplacer l'inégalité (9) par la suivante:

(11) $$K_s > (\tfrac{1}{2} - k)[(1-p^2)x_n^2 - \varepsilon][A(t_{s+1}) - A(t_s)].$$

D'autre part $x^2(t) < x_n^2 + \varepsilon$, donc d'après (10)

$$J_s > -\varepsilon[A(t_{s+1}) - A(y_s)] > -\frac{1+2k}{1-2k}\varepsilon[A(y_s) - A(t_s)],$$

on voit donc en tenant compte de (9) que $K_s + J_s > \frac{1}{2}K_s$, si ε est assez petit et l'indice n assez grand. Finalement, (8) et (11) fournissent l'inégalité:

$$C > \left(\frac{1}{4} - \frac{k}{2}\right)[(1-p^2)x_n^2 - \varepsilon][A(t_n) - A(t_N)].$$

En faisant augmenter indéfiniment l'indice n on arrive à une contradiction, car le premier crochet reste supérieur à un nombre positif fixe et le deuxième crochet augmente indéfiniment. Nous avons donc la proposition (cf. l'énoncé I):

V. *Si* $A'(t)$, *positive pour* $t > t_0$, *est non croissante et si* $\lim\limits_{t\to+\infty} A(t) = +\infty$. *toute intégrale* $x(t)$ *de* (1) *tend vers zéro lorsque* $t\to+\infty$, $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\,|x(t)|\,\sqrt{A(t)}$ *est cependant positive.*

§ **8.** Il est aisé de vérifier que les calculs du § 7 subsistent lorsqu'on remplace les hypothèses de ce paragraphe par les suivantes:

$A'(t)$, positive, est non décroissante et le quotient $A\left(t+\dfrac{1}{\sqrt{A(t)}}\right):A(t)$ tend vers un lorsque $t\to+\infty$ (cette dernière condition est bien remplie dans le cas des fonctions usuelles).

Tous les intervalles pourront encore jouer le rôle des intervalles ordinaires, la seule modification des raisonnements du § 7 consiste en ce qu'il faut choisir les points y_n dans les intervalles (z_n, t_{n+1}) de manière que l'on ait:

$$0 < m < \frac{y_n - z_n}{t_{n+1} - t_n} < k < \frac{1}{3}$$

ce qui est possible, car $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. On obtient ainsi la proposition suivante:

VI. *Si* $A'(t)$, *positive pour* $t > t_0$, *est non décroissante et si le quotient* $A\left(t+\dfrac{1}{\sqrt{A(t)}}\right):A(t)$ *tend vers un lorsque* $t\to+\infty$ *toute intégrale* $x(t)$ *de* (1) *tend vers zéro lorsque* $t\to+\infty$, $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\,|x(t)|\,\sqrt{A(t)}$ *est cependant positive.*

Streszczenie.

Dane jest równanie różniczkowe $x''(t)+A(t)x(t), = 0$ w którem $A(t)>0$, $A'(t)>0$ dla $t>t_0$. Oznaczając przez $t_1, t_2, \dots t_n \dots$ kolejne zera całki $x(t)$, przez z_n zero pochodnej $x'(t)$ zawarte w przedziale (t_n, t_{n+1}) oraz kładąc:

$$u_n = \frac{z_n - \dfrac{t_n + t_{n+1}}{2}}{t_{n+1} - t_n},$$

znajduję, że

1°) wartości bezwzględne extremów całki $x(t)$ stanowią ciąg malejący,
2°) takież wartości pochodnej $x'(t)$ stanowią ciąg rosnący,

3°) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,\dfrac{t_{n+1}-t_n}{t_n - t_{n-1}} = 1$,

4°) $u_n > 0$,

5°) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, o ile n nie przebiega wyrazów pewnego ciągu $\{n_i\}$ takiego, że szereg $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(t_{n_{i+1}} - t_{n_i})$ jest zbieżny,

6°) o ile $\lim\limits_{t\to+\infty} A(t) = +\infty$, to $x''(t)$, nie jest ograniczona.

Udowadniam dalej, że w dwóch przypadkach następujących:

1°) $A'(t)$ nie rośnie, $\lim\limits_{t\to+\infty} A(t) = +\infty$,

2°) $A'(t)$ nie maleje, iloraz $A\left(t+\dfrac{1}{\sqrt{A(t)}}\right):A(t)$ dąży do 1, gdy $t\to+\infty$,

każda całka dąży do zera, gdy $t\to+\infty$.
