Über Einbettung topologischer Räume in Cantorsche Mannigfaltigkeiten.

(O pogrążaniu przestrzeni topologicznych w rozmaitościach Cantorowskich).

von

W. Hurewicz

Zu den wichtigsten Begriffsbildungen der modernen Topologie gehören die von Urysohn eingeführten *Cantorschen Mannigfaltigkeiten*[1].

Sei n ein natürliche Zahl. Ein kompaktes Kontinuum C[1a] wird nach Menger *n-stufig zusammenhängend* genannt, wenn es nach Entfernung jeder höchstens $(n-2)$-dimensionalen abgeschlossenen[2] Teilmenge zusammenhängend (im üblichen Sinn) bleibt[3]. (Im Sinn dieser Definition ist offenbar *jedes* Kontinuum einstufig zusammenhängend). Ein kompaktes Kontinuum, das *n-stufig*

[1] In seiner bahnbrechenden Abhandlung, „Mémoire sur les multiplicités Cantoriennes" (I-ter Teil, Fund. Math. 7 & 8. II-ter Teil, Verhandelingen d. acad. d. wet. te Amsterdam 13 N° 4). Merkwürdigerweise brachte die topologische Forschung der letzten Jahre dem Begriff der Cantorschen Mannigfaltigkeit, vom eindimensionalen Fall der Kurven abgesehen, nur wenig Interesse entgegen.

[1a] Unter einem Kontinuum verstehen wir einen zusammenhängenden Raum, der *aus mehr als einem Punkte* besteht. (Der Sprachgebrauch ist in dieser Beziehung nicht einheitlich: manchmal werden auch die aus einzelnen Punkten bestehenden Mengen zu den Kontinua gerechnet).

[2] Den Zusatz „abgeschlossen" kann man auch weglassen; vgl. etwa Urysohn, Fund. Math. 7, S. 124.

[3] Die Mengersche Definition (vgl. etwa Menger, „Dimensionstheorie" (1928) S. 214) lautet etwas anders, ist aber für kompakte Räume mit der obigen äquivalent (vgl. Menger a. a. O. S. 216).

zusammenhängend und zugleich n-dimensional ist, heisst eine *n-dimensionale Cantorsche Mannigfaltigkeit.* Die Cantorschen Mannigfaltigkeiten stellen mehrdimensionale Analoga der Kurven und der Flächen dar.

Das wichtigste, was heute über allgemeine Cantorsche Mannigfaltigkeiten bekannt ist, besteht in der Aussage: Jeder n-dimensionale kompakte Raum ($n = 1, 2, \ldots$) enthält eine n-dimensionale Cantorsche Mannigfaltigkeit als Teilmenge [4]). In der vorliegenden Arbeit soll das folgende Resultat bewiesen werden, das man im gewissen Sinne als Gegenstück des eben erwähnten Theorems auffassen kann:

Jeder n-dimensionale kompakte Raum R lässt sich topologisch zu einer n-dimensionalen Cantorschen Mannigfaltigkeit erweitern, d. h. ist mit einer Teilmenge einer n-dimensionalen Cantorschen Mannigfaltigkeit C homöomorph. *Dabei kann die Ergänzungsmenge $C - R$ als homöomorph mit einer offenen Teilmenge des Euklidischen n-dimensionalen Raumes E_n angenommen werden.*

Der Beweis beruht auf gewissen im Wesentlichen bekannten Ergebnissen aus der Theorie der *stetigen Abbildungen* [5]).

1. Erweiterungssatz. Sei R ein kompakter Raum, A eine abgeschlossene Teilmenge von R; es liege ferner eine eindeutige stetige Abbildung f von A auf einen Raum A^* vor. Dann gibt es einen A^* topologisch enthaltenden Raum R^* und eine stetige Abbildung F von R auf R^*, so dass F in allen Punkten von A mit f übereinstimmt und dass ausserdem die Funktion F die Menge $R - A$ *topologisch* (ein-eindeutig und beiderseits stetig) auf $R^* - A^*$ abbildet.

Der Beweis ergibt sich fast unmittelbar aus dem bekannten Begriff der *oberhalb-stetigen Zerlegung* [6]). Die Abbildung f induziert eine oberhalb-stetige Zerlegung der Menge A in die Originalmengen der einzelnen Punkte von A^*. Erweitert man diese Zerlegung zu einer Zerlegung des Gesamtraumes R, indem man als noch fehlende Bestandteile die einzelnen Punkte von $R - A$ hinzunimmt, so ist, wie man sofort sieht, auch diese erweiterte Zerlegung oberhalb-stetig und definiert demnach in bekannter Weise einen kompakten Raum R^* der offenbar eine topologische Erweiterung von A ist und aus R durch eine stetige Abbildung von genannten Eigenschaften entsteht.

2. Eine stetige Abbildung des kompakten Raumes R auf einen (natürlich gleichfalls kompakten) Raum R^* nennen wir *kontinuumstreu*, wenn bei ihr jedes Teilkontinuum von R wieder in ein Kontinuum, also nie in einen einzelnen Punkt übergeht [6a]). Anders kann man die kontinuumstreuen Abbildungen dadurch charakterisieren, dass die Originalmengen einzelner Punkte von R diskontinuierlich, also (da es sich um kompakte Mengen handelt) nulldimensional sind. Vom Verfasser wurde gezeigt, dass bei einer kontinuumstreuen Abbildung sich die Dimension des Raumes nicht erniedrigen kann ($\dim R^* \geqq \dim R$) [6b]). Daraus kann man leicht den Satz ableiten: Ein n-stufig zusammenhängender kompakter Raum geht bei einer kontinuumstreuen stetigen Abbildung wieder in einen n-stufig-zusammenhängenden Raum über [6c]). Ist nämlich M^* eine abgeschlossene höchstens $(n-2)$-dimensionale Teilmenge von R^* und M ihre Orginalmenge in R, so ist laut erwähntem Satz M höchstens $(n-2)$-dimensional, folglich ist $R - M$ zusammenhängend. $R^* - M^*$ ist stetiges Bild von $R - M$ und daher ebenfalls zusammenhängend [6a]).

Zum Abschluss dieser vorbereitenden Betrachtungen sei noch an die bekannte Tatsache erinnert, dass jeder kompakte Raum, als stetiges Bild des *Cantorschen linearen Diskontinuums D* darstellbar ist [7a]).

3. Nunmehr gehen wir zum Beweise des angekündigten Theorems über. Sei R ein n-dimensionaler kompakter Raum, und f sei eine stetige Abbildung von D auf R. Die Menge D können wir als Teilmenge des Einheitswürfels W_n ($0 \leq x_\nu \leq 1$; $\nu = 1, 2, \ldots, n$) des Euklidischen n-dimensionalen Raumes auffassen. Nach 1. erweitern wir die Abbildung f zu einer Abbildung F von W_n auf einen R topologisch enthaltenden Raum C. Die Abbildung F ist kontinuumstreu, denn als Originalmengen der einzelnen Punkte von C treten nur Teilmengen des Diskontinuums D und einzelne Punkte von $W_n - D$, also sicher keine Kontinua auf.

Da W_n bekantlich n-stufig zusammenhängend ist, ist nach 2. auch der Bildraum C n-stufig zusammenhängend. Ferner ist $C - R$, wie im Theorem gefordert, mit der offenen Menge $W_n - D$ des Euklidischen n-dimensionalen Raumes homöomorph. Es bleibt nur noch zu zeigen, dass C n-dimensional ist. Nun sind die Mengen R und $C - R$ n-dimensional (die erste nach Voraussetzung, die zweite als topologisches Bild von $W_n - D$) und die erste ist kompakt, somit abgeschlossen in C. Nach einem bekannten Satze ist aber die Summe zweier n-dimensionalen Mengen, von denen (mindestens) eine in der Summe abgeschlossen ist, selbst n-dimensional [7]).

[4]) Vgl. Hurewicz und Menger, Math. Ann. 100, S. 618.

[5]) Die hier benützte Methode wurde bereits bei ähnlichen Fragen von Stepanoff und Tumarkin (vgl. Fund. Math. 12, S. 43) verwendet.

[6]) Vgl. z. B. Kuratowski, Fund. Math. 11, S. 169.

[6a]) Der Zusammenhang bleibt bekanntermassen bei stetigen Abbildungen erhalten, als Bilder der Teilkontinua von R kommen deswegen nur Teilkontinua und einzelne Punkte von R^* in Frage.

[6b]) Vgl. Proceedings Ac. Amsterdam 30, d. 164.

[6c]) Unter Benützung des sub [4]) zitierten Theorems lässt sich dieser Satz sehr einfach direkt beweisen und daraus kann man dann rückwärts schliessend das sub [6b]) angeführte Ergebnis gewinnen.

[7]) Vgl. Hurewicz, Math. Ann. 97, S. 761, oder Menger, Dimensionstheorie, S. 115.

[7a]) Vgl. etwa Hahn, Reelle Funktionen (1932), S. 161.

Bemerkungen. a) Aus dem Beweise geht hervor, dass der Erweiterungsraum C des Theorems immer als *lokal zusammenhängend* angenommen werden kann. Der eben konstruierte Raum C ist ja stetiges Bild des lokal zusammenhängenden Würfels W_n, und der lokale Zusammenhang ist invariant gegenüber stetigen Abbildungen.

b) Aus dem bewiesenen Theorem folgt, dass jeder *separable* (auch *nicht* kompakte) Raum in einer (lokal zusammenhängenden) Cantorschen Mannigfaltigkeit von der gleichen Dimension topologisch enthalten ist, denn ein separabler Raum lässt sich, wie in der Dimesionstheorie gezeigt wird, immer in einen gleichdimensionalen *kompakten* Raum topologisch einbetten [8]).

c) Es wurde von Nöbeling bewiesen [9]), dass es für jedes n einen (separablen) n-dimensionalen Universalraum gibt, d. h. eine Menge, die zu jedem vorgegebenen n-dimensionalen Raum eine homöomorphe Teilmenge enthält. Aus unseren Resultaten folgt, dass man für diesen Universalraum eine lokal zusammenhängende n-dimensionale Cantorsche Mannigfaltigkeit nehmen kann.

d) Die eben benützte Methode führt auch bei Lösung anderer verwandten Fragen zum Ziele. Als Beispiel betrachten wir die sogen. „henkelfreien" Kontinua [9a]). Ein kompaktes Kontinuum C heisst *henkelfrei* („unicoherent") [10]), wenn bei jeder Darstellung von C als Summe zweier Kontinua A und B der Durchschnitt $A \cdot B$ zusammenhängend ist. Zum Beispiel ist die ebene Kreisscheibe henkelfrei, während die Kreislinie diese Eigenschaft nicht hat. Man zeigt leicht, dass die Henkelfreiheit bei einer stetigen Abbildung erhalten bleibt, falls jeder Punkt das Bildraumes eine *zusammenhängende Originalmenge* besitzt [11]).

Sei nun R ein willkürlicher kompakter Raum. Wie von mir in einer früheren Arbeit gezeigt wurde [12]), gibt es im dreidimensionalen Würfel W_3 eine (eindimensionale) abgeschlossene Menge M, die man auf R stetig abbilden kann, derart, dass die Originalmengen sämtlicher Punkte von R zusammenhängend seien. Erweitert man nach 1. diese Abbildung zu einer Abbildung des vollen Würfels W_3 auf ein M topologisch umfassendes Kontinuum C, so kommt die eben erwähnte Eigenschaft auch der erweiterten Abbildung zu, und, weil W_3 (wie überhaupt jeder W_n) henkelfrei ist, folgt daraus, dass auch C henkelfrei sein muss. So erhalten wir die Aussage: Jeder kompakte Raum R lässt sich durch Hinzufügung einer Menge, die mit einem Gebiet des Euklidischen E_3 homöomorph ist, zu einem lokal-zusammenhängenden henkelfreien Kontinuum topologisch erweitern. Daraus folgt weiter wie oben: *Für $n \geqq 3$ ist jeder n-dimensionale Raum in einem n-dimensionalen lokal-zusammenhängenden henkelfreien Kontinuum topologisch enthalten* [9a]). Für $n = 1$ ist diese Aussage sicher falsch, denn unter den lokal zusammenhängenden eindimensionalen Kontinua stimmen die henkelfreien bekantlich mit den *Baumkurven* (Kurven, die kein topologisches Bild der Kreislinie enthalten) überein [13]), und jedes Teilkontinuum einer Baumkurve ist wieder eine Baumkurve. Daraus folgt beispielweise, dass man die *Kreislinie* in keine lokal zusammenhängende henkelfreie Kurve einbetten kann [14]). Offen bleibt die Frage, ob jeder zweidimensionale kompakte Raum in einem lokal zusammenhängenden zweidimensionalen henkelfreien Kontinuum topologisch enthalten ist?

[8]) Vgl. Hurewicz, Monatshefte f. Math. u. Phys. 37, S. 199.

[9]) Vgl. Nöbeling, Math. Ann. 104, S. 71. Der Nöbelingsche Universalraum besteht aus allen Punkten des Euklidischen E_{2n+1}, die höchstens n rationale Koordinaten besitzen. Wahrscheinlich liesse sich die Einbettbarkeit der Nöbelingschen Menge in eine n-dimensionale Cantorsche Mannigfaltigkeit unabhängig von den Entwicklungen dieser Arbeit auf direktem Weg beweisen, wodurch man einen neuen Beweis für die erste Hälfte der in dieser Arbeit ausgesprochenen Theorems (d. h. für die Einbettbarkeit beliebiger Mengen in gleichdimensionale Cantorsche Mannigfaltigkeiten, ohne Aussage über die Ergänzungsmenge) erhalten würde.

[9a]) Für das folgende vgl. meine Note in Proc. Ac. Amsterdam 35 (1932), S. 1077.

[10]) Vgl. Vietoris, Proc, Ac. Amst. 29, S. 443. Bei kompakten lokal zusammenhängenden Kontinua (und hauptsächlich für solche Kontinua ist der Begriff der Henkelfreiheit vom Interesse) ist die Henkelfreiheit mit dem sogen. Phragmen-Brouwer'schen Satz äquivalent (vgl. Kuratowski, Fund. Math. 8, S. 148-150).

[11]) Vgl. Vietoris, a. a. O.

[12]) Vgl. Fund. Math. 14, S. 59.

[13]) Vgl. Vietoris, a. a. O.

[14]) Wohl kann man die Kreislinie in eine henkelfreie *nicht* lokal zusammenhängde Kurve einbetten. Fügt man nämlich zu dem Kreis $|z| = 1$ der komplexen Zahlenebene die Spirale $z = \left(1 + \frac{1}{\varphi}\right) e^{i\varphi}$ $(1 \leqq \varphi < \infty)$ hinzu, so entsteht, wie man leicht sieht eine henkelfreie Kurve.

Streszczenie.

Zadaniem niniejszej pracy jest dowód, że dla każdej zwartej przestrzeni M o wymiarze n istnieje n-wymiarowa rozmaitość Cantorowska, dająca się podzielić na dwa zbiory, z których jeden jest homeomorficzny z daną przestrzenią M, drugi zaś jest obrazem topologicznym pewnego zbioru otwartego n-wymiarowej przestrzeni Euklidesowej. Dowód opiera się na rozpatrywaniu zwartych przestrzeni, jako obrazów ciągłych nigdzie gęstego linjowego zbioru Cantora.