d'où il résulte, tout comme pour $T_1(s)$, que (12) représente une fonction entière.

On voit donc en définitive que:

Si

$$\varphi(u) = \sum_{1}^{\infty} \alpha_n u^{2n}$$

est une fonction entière telle que

$$|\varphi(u)| < e^{2\vartheta\pi|u|} \qquad \text{où } 0 < \vartheta < 1,$$

si

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s}$$

possède un axe de convergence absolue, on a, en posant $\zeta_\varphi(s) = \sum_{1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s}$, pour $\sigma > \sigma_A$:

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta_\varphi(s) = F(s) + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^\infty \Theta(t)\, e^{-\frac{(s-1)t}{2}}\,dt,$$

où $F(s)$ est une fonction entière et où

$$\Theta(s) = \sum_{1}^{\infty} \alpha_n \frac{(-1)^n}{(2\pi)^{2n}}\left(\frac{d^{2n} e^{-\pi^2\nu^2 e^t}}{d\nu^{2n}}\bigg|_{\nu=0} + 2\,\frac{d^{2n} e^{-\pi^2\nu^2 e^t}}{d\nu^{2n}}\bigg|_{\nu=1}\right).$$

On connait un résultat analogue classique pour le cas où $\varphi(n) = 1$ [1]).

[1]) E. Landau, Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen. Leipzig und Berlin, Teubner 1927.

Comparer, d'après ce livre, la démonstration du théorème classique que nous venons de mentionner à quelques points de notre démonstration.

Über die Koeffizienten einiger Modulformen

(O spółczynnikach pewnych form modułowych)

von

A. Walfisz

Es sei

$$M(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{\frac{2\pi i n \tau}{N}} \qquad (\Im\tau > 0)$$

eine ganze Modulform der Dimension -2 und der Stufe N, die nicht in allen rationalen Spitzen ihres Fundamentalbereiches verschwindet. Dann gilt nach E. Hecke[1]) für $n \geqq 1$

$$a_n = n\sum_{d|n} f\left(d, \frac{n}{d}\right)\frac{1}{d} + O(n),$$

wobei die Funktion $f(\alpha, \beta)$ der beiden ganzzahligen Veränderlichen α, β den beiden Bedingungen

$$f(\alpha_1, \beta_1) = f(\alpha_2, \beta_2) \quad \text{für} \quad \alpha_1 \equiv \alpha_2, \quad \beta_1 \equiv \beta_2 \pmod N,$$
$$f(-\alpha, -\beta) = f(\alpha, \beta)$$

genügt, während die „singuläre Reihe"

$$\mathfrak{S}(n) = \sum_{d|n} f\left(d, \frac{n}{d}\right)\frac{1}{d}$$

nicht für alle n verschwindet:

$$\mathfrak{S}(n) \neq 0 \text{ für ein geeignetes } n.$$

[1]) E. Hecke „Theorie der Eisensteinschen Reihen höherer Stufe und ihre Anwendung auf Funktionentheorie und Arithmetik" [Abhandlungen des Mathematischen Seminars der Hamburgischen Universität 5 (1927), S. 199—224], S. 222—223. Im folgenden kurz mit Hecke erwähnt.

Mit Hilfe der vier letzten Beziehungen will ich nachweisen, dass

(1) $$a_n = O(n \log\log n),$$

(2) $$a_n = \Omega(n \log\log n) \qquad (N = 1 \text{ oder } 2),$$

(3) $$a_n = \Omega\left(n (\log\log n)^{\frac{2}{\varphi(N)}}\right) \qquad (N > 2)$$

ist ($\varphi(N)$ die Eulersche Funktion). Für die fünf Werte $N = 1, 2, 3, 4, 6$ sind diese Abschätzungen endgültig.

Für die Teilerfunktion

$$\sigma(n) = \sum_{d \mid n} \frac{1}{d}$$

gilt bekanntlich

$$\sigma(n) = O(\log\log n)\ ^{2)}.$$

Wegen der Beschränktheit von $f(\alpha, \beta)$ für alle α und β ist damit (1) schon bewiesen.

Für $N = 1$ gilt

$$\mathfrak{S}(n) = f(1, 1)\, \sigma(n), \quad f(1, 1) \neq 0.$$

Wegen

(4) $$\sigma(n) = \Omega(\log\log n)\ ^{2)}$$

ist auch (2) für $N = 1$ erfüllt.

Ich nehme von jetzt ab $N > 1$ an. Alle Kongruenzen und Restklassen seien hinfort mod N gemeint. Mit Hilfe der Teilerfunktion

$$\sigma(n; \alpha, \beta) = \sigma(n; \alpha, \beta, N) = \sum_{\substack{ab = n \\ a \equiv \alpha,\ b \equiv \beta}} \frac{1}{a}$$

soll $\mathfrak{S}(n)$ umgeformt werden.

Es sei k Eins oder eine nur aus in N aufgehenden Primfaktoren bestehende natürliche Zahl. Für $N = 24$ z. B. sind die k, wachsend geordnet, $= 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16$ usw. Es sei m eine beliebige zu N teilerfremde natürliche Zahl, $n = km$. Jedem Paar a, b mit $ab = n$ entspricht dann eindeutig ein Paar k_1, k_2 mit $k_1 k_2, = k$, $a = k_1 a'$, $b = k_2 b'$, $(a', N) = 1$, $(b', N) = 1$.

---

[2]) Nach S. Wigert und H. Gronwall gilt sogar

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\sigma(n)}{\log\log n} = e^\gamma \qquad (\gamma \text{ die Eulersche Konstante}):$$

S. Wigert „Sur quelques fonctions arithmétiques“ [Acta Mathematica **37** (1914), S. 113—140]. H. Gronwall „Some asymptotic expressions in the theory of numbers“ [Transactions of the American Mathematical Society **14** (1913), S. 113—122].

Also ist

$$\mathfrak{S}(n) = \sum_{ab=n} \frac{1}{a} f(a, b) = \sum_{k_1 k_2 = k} \sum_{a'b' = m} \frac{1}{k_1 a'} f(k_1 a', k_2 b')$$

$$= \sum_{\substack{\alpha, \beta = 1 \\ (\alpha\beta, N) = 1}}^{N} \sum_{k_1 k_2 = k} \frac{1}{k_1} f(k_1 \alpha, k_2 \beta) \sum_{\substack{a'b' = m \\ a' \equiv \alpha,\ b' \equiv \beta}} \frac{1}{a'}$$

(5) $$= \sum_{\substack{\alpha, \beta = 1 \\ (\alpha\beta, N) = 1}}^{N} g(\alpha, \beta, k)\, \sigma(m; \alpha, \beta)$$

mit

$$g(\alpha, \beta, k) = \sum_{k_1 k_2 = k} \frac{1}{k_1} f(k_1 \alpha, k_2 \beta),$$

wobei überdies

$$g(\alpha_1, \beta_1, k) = g(\alpha_2, \beta_2, k) \quad \text{für} \quad \alpha_1 \equiv \alpha_2,\ \beta_1 \equiv \beta_2,$$

$$g(-\alpha, -\beta, k) = g(\alpha, \beta, k).$$

Ich verstehe von jetzt ab unter α, β zu N teilerfremde Zahlen mit $1 \leqq \alpha \leqq N$, $1 \leqq \beta \leqq N$. Die g-Funktion muss nach (5) für mindestens ein Tripel $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$, $k = k_0$ von Null verschieden sein

$$g(\alpha_0, \beta_0, k_0) \neq 0,$$

da sonst $\mathfrak{S}(n)$ für alle n verschwinden müsste. Hierbei sind k_0, α_0, β_0 eindeutig bestimmt, sobald ich sie in dieser Reihenfolge möglichst klein wähle.

Ist zunächst $N = 2$, so muss notwendig $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = 1$ sein. (5) lautet dann für $n = k_0 m$

$$\mathfrak{S}(n) = g(1, 1, k_0)\, \sigma(m; 1, 1), \quad g(1, 1, k_0) \neq 0.$$

Hierin darf m eine beliebige ungerade Zahl sein und da eine solche nur ungerade Teiler besitzt, ist

$$\sigma(m; 1, 1) = \sigma(m).$$

Aus (4) folgt leicht, dass

$$\sigma(m) = \Omega(\log\log m)$$

ist. Bedeutet nämlich m den ungeraden Bestandteil eines beliebigen n, so ist

$$\sigma(m) \geqq \frac{\sigma(n)}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots} = \frac{\sigma(n)}{2}.$$

Es ist daher für unsere $n = k_0 m$

$$\mathfrak{S}(n) = \Omega(\log\log m) = \Omega(\log\log k_0 m) = \Omega(\log\log n).$$

Damit ist (2) für $N=2$ bewiesen.

Es sei nunmehr $N>2$, also $\alpha \not\equiv -\alpha$, $\beta \not\equiv -\beta$. Man beachte, dass jetzt $\alpha_0 \not\equiv -1$ ist, sonst wäre $g(-\alpha_0, -\beta_0, k_0) = g(1, -\beta_0, k_0) \neq 0$, was gegen die Bestimmung von α_0 verstiesse.

Es seien, wachsend geordnet: $q_1, q_2, \ldots$ die Primzahlen $\equiv 1$ und $r_1, r_2, \ldots$ die Primzahlen $\equiv -1$. Für $\beta_0 \equiv -1$ sei h ungerade, für $\beta_0 \not\equiv -1$ sei h gerade. Ich setze

$$Q = Q_h = q_1 \ldots q_h, \quad R = R_h = r_1 \ldots r_h, \quad S = S_h = QR.$$

p_0 und p_0' seien wie folgt definiert: für $\alpha_0 = 1$ ist $p_0 = 1$, für $\alpha_0 > 1$ ist p_0 die kleinste Primzahl $\equiv \alpha_0$; für $\beta_0 \equiv \pm 1$ ist $p_0' = 1$, für $\beta_0 \not\equiv \pm 1$ [3]) ist p_0' die kleinste Primzahl $\equiv \beta_0$, für die

$$(6) \qquad \frac{2}{p_0'} |g(\beta_0, \alpha_0, k_0)| + \frac{2}{p_0 p_0'} |g(\alpha_0\beta_0, 1, k_0)| \leqq \frac{1}{2p_0} |g(\alpha_0, \beta_0, k_0)|$$

ist. Ich setze schliesslich

$$m = p_0 p_0' S, \qquad n = k_0 m.$$

Für diese m und n will ich $\mathfrak{S}(n)$ mit Hilfe von (5) ausdrücken.

In $m = ab$ gehören a, b den folgenden Restklassenpaaren an:

$$1, \alpha_0\beta_0;\ -1, -\alpha_0\beta_0;\ \alpha_0, \beta_0;\ -\alpha_0, -\beta_0;\ \beta_0, \alpha_0;\ -\beta_0, -\alpha_0;\ \alpha_0\beta_0, 1;\ -\alpha_0\beta_0, -1.$$

Die ersten beiden Paare können von vornherein gestrichen werden. Ist nämlich $\alpha_0 > 1$, so muss $g(1, \alpha_0\beta_0, k_0) = g(-1, -\alpha_0\beta_0, k) = 0$ sein. Ist aber $\alpha_0 = 1$, so kommen die beiden ersten Paare an dritter und vierter Stelle vor. Überdies können gestrichen werden: 1) für $\beta_0 \equiv \pm 1$ die vier letzten Paare. Ist nämlich $\alpha_0 > 1$, so gilt $g(\beta_0, \alpha_0, k_0) = g(-\beta_0, -\alpha_0, k_0) = 0$, während die beiden letzten Paare an dritter und vierter Stelle vorkommen. Ist aber $\alpha_0 = 1$, so kommen die vier letzten Paare an dritter und vierter Stelle vor. 2) für $\alpha_0 \equiv \pm\beta_0$ das fünfte und sechste Paar, mit Rücksicht auf das dritte und vierte. 3) für $\alpha_0\beta_0 \equiv \pm 1$ die beiden letzten Paare, und zwar für $\alpha_0 = 1$ wegen 1), für $\alpha_0 > 1$ wegen $g(\alpha_0\beta_0, 1, k_0) = g(-\alpha_0\beta_0, -1, k_0) = 0$. Es ergibt sich somit

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}(n) = {} & g(\alpha_0, \beta_0, k_0)\,(\sigma(m; \alpha_0, \beta_0) + \sigma(m; -\alpha_0, -\beta_0)) \\ & + \mathfrak{e}_1\, g(\beta_0, \alpha_0, k_0)\,(\sigma(m; \beta_0, \alpha_0) + \sigma(m; -\beta_0, -\alpha_0)) \\ & + \mathfrak{e}_2\, g(\alpha_0\beta_0, 1, k_0)\,(\sigma(m; \alpha_0\beta_0, 1) + \sigma(m; -\alpha_0\beta_0, -1)).\end{aligned}$$

Hierbei nehmen $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2$ nur die Werte 0 oder 1 an, und es ist insbesondere: $\mathfrak{e}_1 = \mathfrak{e}_2 = 0$ für $\beta_0 \equiv \pm 1$, $\mathfrak{e}_1 = 0$ für $\alpha_0 \equiv \pm\beta_0$, $\mathfrak{e}_2 = 0$ für $\alpha_0\beta_0 \equiv \pm 1$.

[3]) $\equiv \pm$ heisst: $\equiv +$ oder $\equiv -$; $\not\equiv \pm$ heisst: weder $\equiv +$ noch $\equiv -$.

Es ist

$$\sigma(m; \alpha_0, \beta_0) + \sigma(m; -\alpha_0, -\beta_0) \geqq \frac{1}{p_0} \sigma(S).$$

Die beiden Darstellungen $m = ab$, $a \equiv \alpha_0$, $b \equiv \beta_0$; $m = ab$, $a \equiv -\alpha_0$, $b \equiv -\beta_0$ enthalten nämlich zusammengenommen unter den a die p_0-fachen aller Teiler von S.

Ist $\mathfrak{e}_1 \neq 0$, also $\beta_0 \not\equiv \pm 1$, $\alpha_0 \not\equiv \pm\beta_0$, so muss in $m = ab$, $a \equiv \beta_0$, $b \equiv \alpha_0$ oder in $m = ab$, $a \equiv -\beta_0$, $b \equiv -\alpha_0$ notwendig a durch p_0', b durch p_0 teilbar sein. Es ist demnach

$$\sigma(m; \beta_0, \alpha_0) + \sigma(m; -\beta_0, -\alpha_0) \leqq \frac{2}{p_0'} \sigma(S) \qquad (\mathfrak{e}_1 \neq 0).$$

Ist $\mathfrak{e}_2 \neq 0$, also $\beta_0 \not\equiv \pm 1$, $\alpha_0\beta_0 \not\equiv \pm 1$, so muss in $m = ab$, $a \equiv \alpha_0\beta_0$ oder in $m = ab$, $a \equiv -\alpha_0\beta_0$ notwendig a durch $p_0 p_0'$ teilbar sein. Es ist daher

$$\sigma(m; \alpha_0\beta_0, 1) + \sigma(m; -\alpha_0\beta_0, -1) \leqq \frac{2}{p_0 p_0'} \sigma(S) \qquad (\mathfrak{e}_2 \neq 0).$$

Aus den vier letzten Beziehungen folgt, in Verbindung mit (6),

$$(7) \qquad |\mathfrak{S}(n)| \geqq c\,\sigma(S),$$

wobei $c = \frac{1}{2p_0} |g(\alpha_0, \beta_0, k_0)|$ eine nur von der Modulform M abhängige positive Zahl ist. Die gleiche Bedeutung mögen später c_1 und c_2 haben, während $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ geeignete reelle Zahlen sind, die nur von N abhängen. h durchlaufe alle natürlichen Zahlen. Die folgenden Abschätzungen sind auf wachsendes h bezogen.

Zunächst ist

$$\sigma(S) = \sigma(Q)\,\sigma(R) = \prod_{a=1}^{h} \left(1 + \frac{1}{q_a}\right)\left(1 + \frac{1}{r_a}\right).$$

Ferner gilt bekanntlich (*Handbuch* [4]), S. 450)

$$\sum_{a=1}^{h} \frac{1}{q_a} = \frac{1}{\varphi(N)} \log\log q_h + \gamma_1 + o(1),$$

$$\sum_{a=1}^{h} \frac{1}{r_a} = \frac{1}{\varphi(N)} \log\log r_h + \gamma_2 + o(1).$$

[4]) E. Landau „Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen" (1909 im Verlage von B. G. Teubner erschienen).

Es ergibt sich somit

$$\sigma(S) = \exp\left\{\frac{1}{\varphi(N)}\log\log q_h + \frac{1}{\varphi(N)}\log\log r_h + \gamma_3 + o(1)\right\}$$

$$\sim c_1 (\log q_h)^{\frac{1}{\varphi(N)}} (\log r_h)^{\frac{1}{\varphi(N)}}.$$

Andererseits ist (*Handbuch*, S. 469)

$$h \sim \frac{1}{\varphi(N)} \frac{q_h}{\log q_h}, \quad h \sim \frac{1}{\varphi(N)} \frac{r_h}{\log r_h},$$

d. h.

$$\log q_h \sim \log r_h.$$

Wegen

$$\log Q = \sum_{a=1}^{h} \log q_a \sim \frac{1}{\varphi(N)} q_h,$$

$$\log R = \sum_{a=1}^{h} \log r_a \sim \frac{1}{\varphi(N)} r_h$$

(*Handbuch*, S. 468) ist also

$$\log q_h \sim \log r_h \sim \log(q_h + r_h) \sim \log\log S,$$

und daher

$$\sigma(S) \sim c_1 (\log\log S)^{\frac{2}{\varphi(N)}} \sim c_1 (\log\log n)^{\frac{2}{\varphi(N)}},$$

weil ja $n = k_0 p_0 p_0' S = c_2 S$ war.

(7) liefert jetzt, sobald n wieder alle natürlichen Zahlen durchläuft,

$$\mathfrak{S}(n) = \Omega\left((\log\log n)^{\frac{2}{\varphi(N)}}\right) \qquad (N > 2),$$

womit auch (3) nachgewiesen ist.

A n w e n d u n g. Ist

$$Q = \sum_{g,h=1}^{4} a_{gh} n_g n_h \qquad (a_{gh} = a_{hg})$$

eine positiv definite quaternäre quadratische Form mit ganzzahligen Koeffizienten, so stellt (H e c k e, S. 215) die Reihe

$$M(\tau; Q) = \sum_{n_1, n_2, n_3, n_4 = -\infty}^{\infty} e^{2\pi i \tau Q} = \sum_{n=0}^{\infty} \varrho_n e^{2\pi i n \tau} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{\frac{2\pi i n \tau}{N}} \qquad (\Im \tau > 0)$$

eine ganze Modulform der Dimension -2 und einer gewissen, durch Q bestimmten Stufe N dar. Diese Form kann nicht in allen ihren rationalen Spitzen verschwinden, sonst müsste

$$\sum_{n \leq x}' \varrho_n = O(x \log x)$$

sein (H e c k e, S. 223), während doch bekanntlich

$$\sum_{n \leq x} \varrho_n \sim \frac{\pi^2}{2\sqrt{D}} x^2$$

ist (D die Determinante von Q). Nach (2) und (3) gilt daher, mit einem geeigneten $\lambda = \lambda(Q) > 0$,

$$\varrho_n = \Omega(n (\log\log n)^{\lambda}).$$

Hieraus folgt dann sofort für den Gitterrest

$$P_Q(x) = \sum_{n \leq x} \varrho_n - \frac{\pi^2}{2\sqrt{D}} x^2$$

des vierdimensionalen Ellipsoides $Q \leqq x$

$$P_Q(x) = \Omega(x (\log\log x)^{\lambda}).$$