

powinna operować wielkościami niezależnymi od przypadkowego doboru dopuszczalnych parametrów. Spostrzeżenie to prowadzi do wniosku, że mechanika układów reonomicznych powinna być teorią niezmienników przekształceń

$$(*) \quad x^i = x^i(x^l, t),$$

podezas gdy geometria jest teorią niezmienników przekształceń tylko punktowych:

$$x^i = x^i(x^l).$$

Z takiego postawienia sprawy wynika, że geometria reonomiczna i mechanika „bezwzględna” — jak ją nazywamy przez analogię do „rachunku różniczkowego bezwzględnego” — są formalnie identyczne z teorią niezmienników grupy (\*) i pewnej niejednorodnej kwadratowej formy różniczkowej, a więc z pewnym uogólnionym „mocnym” rachunkiem tensorów. Ponieważ pragniemy objąć również układy nieholonomiczne, więc rozszerzamy naszą grupę do wszystkich przekształceń

$$dx^i = a_i^l dx^l + \omega^i dt,$$

co jeszcze wzmacnia nasz rachunek tensorów.

Niezmienniki uzyskane nazywamy wielkościami mechanicznymi bezwzględnymi i one to przedstawiają poprawne, właściwe i adekwatne terminy do rozstrzygnięcia takich zagadnień, jak kryterja skierow. holonomiczności, istnienia całki energii. One to pozwalają uzyskać łatwo ogólnie, bezwzględne równania ruchu dla układów reonieholonomicznych:

$$\frac{\delta v}{dt} + Wv = S + Q,$$

znacznie prostsze od spotykanych dotąd w literaturze, bo wypisane w terminach istotnych.

Zaczynamy od zbudowania podstawowych wielkości geometrii reonomicznej, które między innymi stosujemy do uzyskania warunków izometrii (wyginiania bez rozciągania) dla rodziny powierzchni. Uogólniamy pojęcia geometrii riemannowskiej na przestrzeń reonomiczną, potem przechodzimy do interpretacji mechanicznej tych wielkości, a więc do wielowymiarowego ujęcia mechaniki. Podajemy kryteria skieronomiczności układu, holonomiczności, równania ruchu w terminach bezwzględnych, adekwatną klasyfikację układów mechanicznych, uogólnienie równań we wnętrznych ruchu na układy dowolne, równania warzącyne i kończymy teorią reakcji dla dowolnych układów, rozwiązujeći dzięki interpretacji wielowymiarowej bardzo prosto szereg zadań, poruszanych ostatnio przez kilku autorów.

Sur le produit  $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \sum \frac{a_n}{n^s}$

(O iloczynie  $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \sum \frac{a_n}{n^s}$ )

par

S. Mandelbrojt

Le but de ce travail est de donner une relation de la forme

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta_\varphi(s) = F(s) + \int_0^\infty P(t) e^{-\frac{(s-1)t}{2}} dt,$$

où  $\zeta_\varphi(s) = \sum \frac{\varphi(n)}{n^s}$ ,  $F(s)$  est une fonction entière et où  $P(t)$  s'exprime au moyen des  $a_n$ ;  $\sum a_n m^{2n} = \varphi(m)$ .

Nº 1. Soit  $\varphi(u) = \sum_1^\infty a_n u^{2n}$  une fonction entière telle que

$$(1) \quad |\varphi(u)| < e^{2\pi|u|} \quad \text{où } 0 < \vartheta < 1.$$

On a, dans ces conditions:

$$(2) \quad \sum |\alpha_n u^{2n}| < e^{|u|}$$

où  $c$  est une constante positive, et la série

$$(3) \quad \sum \frac{|\alpha_n|(2n)!}{(2\pi)^{2n}} = C_1$$

converge.

Ou sait d'après une formule bien connue que pour  $y > 0$  et  $v$  réel

$$(4) \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi y u^2 + 2\pi v u} du = \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\frac{\pi v^2}{y}}.$$

Or comme l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi y(u^2 - c|u|)} du$$

converge, on peut écrire d'après (1)

$$(5) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) e^{-\pi y u^2 + 2\pi y u i} du = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \int_{-\infty}^{\infty} u^{2n} e^{-\pi y u^2 + 2\pi y u i} du.$$

On constate, d'autre part, d'après (4) que:

$$(6) \quad \int_{-\infty}^{\infty} u^n e^{-\pi y u^2 + 2\pi y u i} du = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \frac{d^n e^{-\frac{\pi y u^2}{y}}}{d\nu^n}.$$

En écrivant, d'après la formule de Cauchy:

$$\frac{d^n e^{-\frac{\pi y u^2}{y}}}{d\nu^n} = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|z-\nu|=1} \frac{e^{-\frac{\pi z^2}{y}}}{(z-u)^{n+1}} dz,$$

on voit que

$$\left| \frac{d^n e^{-\frac{\pi y u^2}{y}}}{d\nu^n} \right| < n! \max_{|z-\nu|=1} |e^{-\frac{\pi z^2}{y}}|;$$

d'où, en particulier:

$$(7) \quad \left| \frac{d^n e^{-\frac{\pi y u^2}{y}}}{d\nu^n} \right| < n! e^{-\frac{A(\nu)\pi}{y}}$$

avec

$$A(\nu) = (\nu + 1)^2 \quad \text{si} \quad \nu \leq -2$$

et

$$(8) \quad A(\nu) = (\nu - 1)^2 \quad \text{si} \quad \nu \geq 2.$$

N° 2. Considérons la série

$$\sum_{m=1}^{\infty} \varphi(m) e^{-\pi y m^2}$$

et la fonction

$$g(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(m+z) e^{-\pi y(m+z)^2}.$$

On voit immédiatement que  $g(z)$  est périodique de période 1 et dérivable. On peut donc écrire:

$$g(0) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(m) e^{-\pi y m^2} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int_0^1 g(z) e^{2\pi z \nu i} dz.$$

Or

$$\begin{aligned} \int_0^1 g(z) e^{2\pi z \nu i} dz &= \int_0^1 \left( \sum_{m=-\infty}^{\infty} \varphi(m+z) e^{-\pi y(m+z)^2} \right) e^{2\pi z \nu i} dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) e^{-\pi y u^2 + 2\pi u \nu i} du. \end{aligned}$$

On a donc d'après (3), (6), (7) et (8) pour  $y > 0$ :

$$(9) \quad 2 \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(m) e^{-\pi y m^2} = \frac{1}{\sqrt{y}} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \frac{(-1)^n}{(2\pi)^{2n}} \frac{d^{2n} e^{-\frac{\pi y u^2}{y}}}{d\nu^{2n}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{y}} \sum_{\nu=-1}^1 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \frac{(-1)^n}{(2\pi)^{2n}} \frac{d^{2n} e^{-\frac{\pi y u^2}{y}}}{d\nu^{2n}} + P(y)$$

où

$$(10) \quad |P(y)| < \frac{C_1}{\sqrt{y}} \left( \sum_{\nu=-\infty}^{-2} e^{-\frac{\pi}{y}(\nu+1)^2} + \sum_{\nu=2}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{y}(\nu-1)^2} \right)$$

$$= \frac{2C_1}{\sqrt{y}} \sum_{\nu=2}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{y}(\nu-1)^2}.$$

N° 3. On a pour  $s > 0, q > 0$ :

$$\frac{I(s)}{qs} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-qe^x} e^{sx} dz,$$

d'où l'on tire

$$(11) \quad \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \varphi(q)}{qs} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(q) e^{-qe^x} e^{\frac{sx}{2}} dz.$$

Supposons que  $\sum_1^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s}$  possède un axe de convergence absolue, que nous désignons par  $\sigma_A$  et posons

$$\zeta_{\varphi}(s) = \sum_1^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s}.$$

On constate facilement que pour  $\sigma > \sigma_A$  ( $s = \sigma + it$ ), on a:

$$T\left(\frac{s}{2}\right) \zeta_{\varphi}(s) = T_1(s) + T_2(s),$$

où

$$T_1(s) = \sum_{q=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \varphi(q) e^{-q^s z} e^{\frac{sz}{2}} dz,$$

$$T_2(s) = \sum_{q=1}^{\infty} \int_{-\infty}^0 \varphi(q) e^{-q^s z} e^{\frac{sz}{2}} dz.$$

Or  $T_1(s)$  est une fonction entière; en effet pour  $q > 1 + 2\pi$  on a,  $z$  étant positif,

$$2\pi q - q^s e^z < -qe^z$$

donc

$$|\varphi(q)| e^{-q^s z} < e^{-qe^z};$$

par conséquent pour  $N > 1 + 2\pi$  on a:

$$\sum_N^{\infty} |\varphi(q)| e^{-q^s z} < e^{-Nz+1}$$

et

$$\int_0^{\infty} \left( \sum_N^{\infty} |\varphi(q)| e^{-q^s z} \right) e^{\frac{sz}{2}} dz < \frac{e}{1+e} \int_0^{\infty} e^{-Nz+\frac{sz}{2}} dz;$$

il en résulte que le premier terme de cette inégalité tend uniformément vers zéro avec  $\frac{1}{N}$  lorsque  $\sigma$  varie dans un intervalle  $(a, b)$  fini.

On voit donc que lorsque  $s$  varie dans un domaine borné  $D$ , l'expression

$$\int_0^{\infty} \sum_{q=1}^{N-1} \varphi(q) e^{-q^s z} e^{\frac{sz}{2}} dz$$

tend uniformément vers une fonction holomorphe lorsque  $N \rightarrow \infty$  d'où il résulte que  $T_1(s)$  est une fonction entière.

N° 4. Étudions maintenant la fonction  $T_2(s)$ .

Remarquons que du fait que  $\sum \frac{\varphi(n)}{n^s}$  possède un axe de convergence absolue, il résulte que

$$\sum_{q=1}^{\infty} \int_{-\infty}^0 |\varphi(q)| e^{-q^s z} e^{\frac{sz}{2}} dz$$

converge pour  $s$  réel  $> \sigma_A$ .

On peut donc écrire pour  $s > \sigma_A$ :

$$T_2(s) = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{-1} \int_j^{j+1} \varphi(q) e^{-q^s z} e^{\frac{sz}{2}} dz = - \sum_{j=-\infty}^{-1} \sum_{q=1}^{\infty} \int_j^{j+1} \varphi(q) e^{-q^s z} e^{\frac{sz}{2}} dz.$$

Or pour  $N$  assez grand,  $j \leq z \leq j+1$  et  $a < s < b$  ( $b > 0$ ) on a

$$\left| \sum_N^{\infty} \varphi(q) e^{-q^s z} e^{\frac{sz}{2}} \right| < \frac{e^{-Nz^s}}{1-e^{-z^s}} e^{\frac{s(j+1)}{2}};$$

il en résulte que

$$\sum_1^{\infty} \varphi(q) e^{-q^s z} e^{\frac{sz}{2}}$$

converge uniformément lorsque  $j \leq z \leq j+1$ . On a donc

$$\sum_{q=1}^{\infty} \int_j^{j+1} \varphi(q) e^{-q^s z} e^{\frac{sz}{2}} dz = \int_j^{j+1} \sum_{q=1}^{\infty} \varphi(q) e^{-q^s z} e^{\frac{sz}{2}} dz.$$

En définitive:

$$T_2(s) = \int_{-\infty}^0 \sum_{q=1}^{\infty} \varphi(q) e^{-q^s z} e^{\frac{sz}{2}} dz$$

ou en posant  $z = -t$

$$T_2(s) = \int_0^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \varphi(q) e^{-q^s t} e^{-\frac{st}{2}} dt.$$

D'après (9) et (10) on a donc:

$$T_1(s) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^{\infty} \sum_{v=-1}^1 \left( \sum_1^{\infty} a_v \frac{(-1)^v}{(2\pi)^{2v}} \frac{d^{2v} e^{-\pi^2 v^2 t^2}}{dt^{2v}} \right) e^{-\frac{(s-1)t}{2}} dt + \int_0^{\infty} B(t) e^{-\frac{(s-1)t}{2}} dt$$

où

$$|B(t)| < C_1 \sqrt{\pi} \sum_2^{\infty} e^{-\pi^2 (v-1)^2 t^2}.$$

Cette dernière inégalité permet d'affirmer que

$$(12) \quad \int_0^{\infty} B(t) e^{-\frac{(s-1)t}{2}} dt$$

est une fonction entière.

On a en effet pour  $\sigma$  quelconque

$$\int_0^{\infty} \sum_N^{\infty} e^{-\pi^2 (v-1)^2 t^2} e^{-\frac{(\sigma-1)t}{2}} < \frac{e}{1-e} \int_0^{\infty} e^{-(N-1)t} e^{-\frac{(\sigma-1)t}{2}} dt$$

d'où il résulte, tout comme pour  $T_1(s)$ , que (12) représente une fonction entière.

On voit donc en définitive que:

Si

$$\varphi(u) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u^{2n}$$

est une fonction entière telle que

$$|\varphi(u)| < e^{\theta \pi |u|} \quad \text{où } 0 < \theta < 1,$$

si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s}$$

possède un axe de convergence absolue, on a, en posant  $\zeta_g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s}$ , pour  $\sigma > \sigma_A$ :

$$I\left(\frac{s}{2}\right) \zeta_g(s) = F(s) + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^{\infty} \Theta(t) e^{-\frac{(s-1)t}{2}} dt,$$

où  $F(s)$  est une fonction entière et où

$$\Theta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{(-1)^n}{(2\pi)^{2n}} \left( \frac{d^{2n} e^{-\pi^2 n^2 s^2}}{d s^{2n}} \Big|_{s=0} + 2 \frac{d^{2n} e^{-\pi^2 n^2 s^2}}{d s^{2n}} \Big|_{s=1} \right).$$

On connaît un résultat analogue classique pour le cas où  $\varphi(n) = 1$ <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> E. Landau, Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen. Leipzig und Berlin, Teubner 1927.

Comparer, d'après ce livre, la démonstration du théorème classique que nous venons de mentionner à quelques points de notre démonstration.

## Über die Koeffizienten einiger Modulformen

(O spółczynnikach pewnych form modułowych)

von

A. Walfisz

Es sei

$$M(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{\frac{2\pi i n \tau}{N}} \quad (\Im \tau > 0)$$

eine ganze Modulform der Dimension — 2 und der Stufe  $N$ , die nicht in allen rationalen Spitzen ihres Fundamentalbereiches verschwindet. Dann gilt nach E. Hecke<sup>1)</sup> für  $n \geq 1$

$$a_n = n \sum_{d|n} f\left(d, \frac{n}{d}\right) \frac{1}{d} + O(n),$$

wobei die Funktion  $f(a, \beta)$  der beiden ganzzahligen Veränderlichen  $a, \beta$  den beiden Bedingungen

$$\begin{aligned} f(a_1, \beta_1) &= f(a_2, \beta_2) \quad \text{für } a_1 \equiv a_2, \beta_1 \equiv \beta_2 \pmod{N}, \\ f(-a, -\beta) &= f(a, \beta) \end{aligned}$$

genügt, während die „singuläre Reihe“

$$\mathfrak{S}(n) = \sum_{d|n} f\left(d, \frac{n}{d}\right) \frac{1}{d}$$

nicht für alle  $n$  verschwindet:

$$\mathfrak{S}(n) \neq 0 \quad \text{für ein geeignetes } n.$$

<sup>1)</sup> E. Hecke „Theorie der Eisensteinschen Reihen höherer Stufe und ihre Anwendung auf Funktionentheorie und Arithmetik“ [Abhandlungen des Mathematischen Seminars der Hamburgischen Universität 5 (1927), S. 199–224], S. 222–223. Im folgenden kurz mit Hecke erwähnt.