Rheonome Geometrie. Absolute Mechanik*).

(Geometrja reonomiczna. Mechanika bezwzględna).

Von

A. Wundheiler.

Das Hauptergebnis dieser Arbeit sind neue und überaus einfache *Gleichungen für nichtholonome und rheonome Systeme.* Sie lauten (§ 14):

$$\frac{\delta v^i}{dt} + W^i_{.k} v^k = Q^i + S^i$$

und hier haben alle Glieder eine mechanische Bedeutung (sind invariante Größen (§ 23)). Diese Gleichungen sind aber eng mit einer Auffassung verknüpft, die zu einer *adäquaten Theorie der rheonomen und nichtholonomen Systeme* führt (§ 22). Eine solche war bisher nicht vorhanden, denn selbst die übliche Definition der skleronomen Systeme ist eigentlich unbrauchbar, da doch die Abhängigkeit des kinetischen Potentials von der Zeit bei anderer Parameterwahl wohl schwinden kann. Solche und ähnliche Überlegungen führen mit Notwendigkeit zur Einsicht, daß die richtig aufgebaute *Mechanik eine Invariantentheorie der Gruppe der zeitabhängigen Koordinatentransformationen* ist. Dank dieser neuen Auffassung wird die Mechanik identisch mit der *mehrdimensionalen Geometrie sich deformierender Räume,* die wir *rheonome Geometrie* nennen (§ 1). Wir bauen die Grundlagen der beiden Theorien auf (§§ 2—20), indem wir uns des Apparates der Tensorrechnung bedienen. Wir benutzen aber *eine stärkere Fassung der Tensorrechnung* (§ 4), da wir Tensoren bei einer umfassender Gruppe, als die der Punkttransformationen betrachten.

Die Anwendungen sind an verschiedenen Plätzen zerstreut. Wir nennen z. B. die *Skleronomitäts-* (§ 26) *und Holonomitätsbedingungen* (§ 20), Bedingungen für die *Existenz eines „Energieintegrals" für rheonome Systeme* (§ 28), *für die infinitesimalen Verbiegungen eines Riemannraumes* (§ 10). Das alles

*) Die vorliegende Arbeit stellte einen Auszug aus einer der math.-naturwiss. Fakultät der Univ. Warschau eingereichten Inauguraldissertation dar.

läßt sich nur in invarianter Sprache machen. Eine *Theorie der Reaktionskräfte* allgemeiner dynamischer Systeme (§§ 30, 31) schließt die Arbeit.

Wir setzen die Elemente der gewöhnlichen Tensorrechnung als bekannt voraus.

Bezeichnungen.

Indizes. Nach Vorbild der Schoutenschen Schule[1]) erhalten die Bestimmungszahlen einer Größe in verschiedenen Koordinatensystemen immer denselben „Kernbuchstaben“, und die Unterscheidung der Koordinatensysteme erfolgt ausschließlich durch die Art der Indizes. Verschiedene Bestimmungszahlen derselben Größe in einem und demselben System werden durch angehängte Zeichen („Signaturen“) unterschieden, z. B.

$$v^1,\dots,v^n;\quad v_x,\ v_y,\ v_z;\quad x^{\bar 1}, x^{\bar 2},\dots,x^{\bar n}.$$

Verschiedene Koordinatensysteme haben prinzipiell verschiedene Systeme der unterscheidenden Zeichen (Signaturen), z. B.

$$1, 2,\dots, \mathrm{n};\quad \mathit{1}, \mathit{2},\dots, n;\quad \mathbf{1}, \mathbf{2},\dots, \boldsymbol{n};\quad \bar 1, \bar 2,\dots, \bar n,\quad \text{usw.}$$

Verschiedene Indizes durchlaufen prinzipiell verschiedene Zeichenreihen, so daß z. B. x^i und x^a, wenn nicht ausdrücklich anders bemerkt wird, verschiedene Zahlensysteme sind. Eine Koordinatentransformation schreiben wir:

$$x^i = x^i(x^\lambda).$$

Im folgenden halten wir uns an die Festsetzungen:

$$h, i, j, k = 1, 2,\dots, n;\qquad \alpha, \beta, \gamma = \underline{1}, \underline{2},\dots, \underline{m};$$
$$I, K = \bar 1, \bar 2,\dots, \bar n;\qquad \lambda, \mu = \underline{1}', \underline{2}',\dots, \underline{m}'.$$

Derivierten. Wir schreiben immer

$$\partial_i \text{ statt } \frac{\partial}{\partial x^i},\quad \partial_t \text{ statt } \frac{\partial}{\partial t},\quad \dot x^i = \frac{dx^i}{dt},$$

t bedeutet bei uns ausschließlich die Zeit. δ bedeutet immer das kovariante Differential.

Summenzeichen. Wie jetzt schon allgemein üblich, wird in einem Monom über doppelt auftretende Indizes automatisch summiert.

Wir benutzen oft ohne besondere Erklärung eine verkürzte Schreibweise, in der die Tensoren ganz ohne Indizes geschrieben werden. Das geschieht in den Fällen, wo auf eine leichte Entzifferung der Formel gerechnet werden darf.

[1]) J. A. Schouten und E. R. van Kampen, Zur Einbettungs- und Krümmungstheorie nichtholonomer Gebilde. Math. Ann. 103 (1930).
J. A. Schouten, Über nicht-holonome Übertragungen in einer L_n. Mat. Zeit. 30 (1929).

Räume und Unterräume bezeichnen wir mit großen deutschen Buchstaben, ohne ihre Dimensionszahl in Evidenz zu setzen. $\mathfrak{A}$ bedeutet immer den Ausgangsraum, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{G}$ sind Unterräume. Tensoren bezeichnen wir immer nur mit lateinischen, (Ausnahme dx^i, $\dot x^i$), Nichttensoren mit griechischen Buchstaben (Ausnahme: Bogenelement $d\sigma$).

I.

Starke Invarianten der inhomogenen quadratischen Form. Rheonome Geometrie.

1. Begriff der rheonomen Geometrie. Unter *rheonomer Geometrie* werden wir *die Geometrie eines sich deformierenden Raumes* verstehen. Bei ihrem Aufbau nehmen wir uns zum Vorbild eine sich im dreidimensionalen Raume bewegende Fläche, wobei wir auch oft an den Fall der sich deformierenden Fläche anknüpfen werden. Wir schlagen dem Leser vor sich alle von uns eingeführten Begriffe an diesen Fällen zu illustrieren. Der Fall eines sich beliebig bewegenden dreidimensionalen Mediums kann ebenfalls zur Veranschaulichung herangezogen werden.

Wir treiben natürlich sofort mehrdimensionale Geometrie. Wollen wir zu natürlichen Größen gelangen, so müßen wir mit Invarianten operieren. Welche Gruppe aber legen wir zu Grunde? In der gewöhnlichen Riemannschen Geometrie wählen wir die Gruppe der Punkttransformationen

$$x^i = x^i(x^I),\qquad i = 1,\dots, n;\ I = \bar 1,\dots, \bar n, \tag{1}$$

und suchen die Invarianten der quadratischen Differentialform

$$ds^2 = a_{ik}\, dx^i\, dx^k.$$

Das geschieht, weil im Riemannraum alle durch (1) verbundenen Koordinatensysteme (in dem allgemeinen, nichteuklidischen Fall) gleichberechtigt sind. Wie gestaltet sich die Sachlage in einem sich deformierenden Raume?

Betrachten wir, unserem Programm gemäß, die sich deformierende Fläche im Dreidimensionalen, so sehen wir, daß (wenn die Fläche nicht starr ist) von „demselben Punkte in verschiedenen Augenblicken“ nicht gesprochen werden kann (höchstens nur konventionell). Denn, ist die Fläche nicht materiell gedacht, wie ist dann der Punkt in verschiedenen Augenblicken wiederzuerkennen? Wählt man eine Darstellung

$$x^\lambda = x^\lambda(x^i, t),\qquad (\lambda = \underline{1}, \underline{2}, \underline{3};\ i = 1, 2),$$

so entsprechen „demselben Punkte“ immer dieselben x^i. Aber man könnte doch ebensowohl eine andere Darstellung wählen:

$$x^\lambda = x^\lambda(x^I, t), \qquad I = \bar{1}, \bar{2},$$

wo

(2) $$x^i = x^i(x^I, t),$$

und von den beiden Darstellungen ist doch keine (im allgemeinen Falle) der anderen gegenüber ausgezeichnet. Die Transformation (2) ändert natürlich die „Identität" der Flächenpunkte. Die Größen der „rheonomen Geometrie" müssen, den obigen Ausführungen gemäß, den Transformationen (2) gegenüber invariant sein, da doch die „Identität" ihrer Punkte keine Eigenschaft der sich bewegenden Fläche darstellt, außer vielleicht wenn sie starr ist. Wir erklären also *die rheonome Geometrie als die Invariantentheorie der „kinematischen Gruppe"*

(3) $$x^i = x^i(x^I, t), \qquad i = 1, \ldots, n; \; I = \bar{1}, \ldots, \bar{n}.$$

Wir könnten natürlich auch in einem gewöhnlichen Riemannraume zeitabhängige Koordinaten einführen und so einen Schein von Rheonomität schaffen. Wir werden in einem solchen Falle von einem *„streng skleronomen Raume"* sprechen. Es wird oft nützlich sein zu sehen, was aus den allgemeinen rheonomen Größen im streng skleronomen Falle wird. Das erlaubt oft ihren Sinn zu erfassen.

2. Die elementare Verschiebung. In der gewöhnlichen Differentialgeometrie nennen wir die elementare Verschiebung den infinitesimalen Vektor von den Komponenten dx^i. In der rheonomen Geometrie kann sich diese Auffassung nicht behaupten: wir müssen die elementare Verschiebung vermittels des Größensystems dx^i, dt charakterisieren. Für diesen Standpunkt sprechen zwei Argumente:

1⁰ Betrachten wir als gleichwertig alle durch (2)

$$x^i = x^i(x^I, t)$$

verbundenen Koordinatensysteme, so sind die Komponenten der Verschiebung dx^i im System $\{i\}$ durch die dx^I allein noch nicht bestimmt, sie hängen noch von dt ab. Bei denselben dx^I und verschiedenen dt werden zwei Verschiebungen in verschiedenen Koordinatensystemen verschiedene Komponenten haben. Eine genau, d. h. eindeutig in allen rheonomen Systemen bestimmte Verschiebung muß noch ein bestimmtes dt besitzen.

2⁰ Betrachten wir den Fall einer sich bewegenden Fläche. Eine Verschiebung — d. h. zwei unendlich nahe Punkte A und B — ist als bestimmt zu betrachten, wenn ihr in dem umgebenden Raume ebenfalls eine bestimmte Verschiebung entspricht. Nun, wenn sich die Fläche bewegt, so ist das Punktpaar, daß sich mit A und B deckt, von dem Augenblick abhängig, in wel-

chem A und B im umgebenden Raume fixiert wurden, also auch von der Dauer der Verschiebung, also von dt.

Wir setzen also fest:

Als elementare Verschiebung in einem rheonomen Raume bezeichnen wir das System der Differentiale dx^i, dt.

3. Die inhomogene quadratische Differentialform. Die Riemannsche Geometrie ist die Invariantentheorie einer quadratischen Differentialform

$$ds^2 = a_{ik}\, dx^i\, dx^k.$$

Unser Vorbild der sich deformierenden Flächen lehrt, daß in der rheonomen metrischen Geometrie die inhomogene Form

$$ds^2 = a_{ik}\, dx^i\, dx^k + 2 a_i\, dx^i\, dt + A\, dt^2$$

zu Grunde gelegt werden muß. Berechnen wir diese Form für die bewegliche Fläche, die durch

$$x^\lambda = x^\lambda(x^i, t), \qquad \lambda = \underline{1}, \underline{2}, \underline{3}; \; i = 1, 2,$$

gegeben ist, so kommt:

(4) $$a_i = a_{\lambda\mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial t} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^i}, \qquad A = a_{\lambda\mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial t} \frac{\partial x^\mu}{\partial t}$$

(Differentiation $\frac{\partial}{\partial t}$ bei konstanten x^i). a_i ist also die Projektion der *„Führungsgeschwindigkeit"* $\frac{\partial x^\lambda}{\partial t}$ auf die Fläche: die „Längsführung", A — die *„lebendige Kraft der Führung"*. Beide Größen sind natürlich nicht intrinsek, da sie auf ein bestimmtes Koordinatensystem bezogen sind. Wir leiten aber aus ihnen später invariante Größen ab.

4. Starke Tensoren. Wir nennen einen *starken* (kontravarianten) *Vektor* ein System v^i von n Zahlen, die sich unter

(5) $$x^i = x^i(x^I, t)$$

nach den Formeln

$$v^I = \frac{\partial x^I}{\partial x^i} v^i$$

transformieren, also wie ein gewöhnlicher Vektor unter der geometrischen Transformation

(6) $$x^i = x^i(x^I).$$

Ganz ähnlich werden nach wohlbekannten Mustern kovariante Vektoren und verschiedene Tensoren definiert.

Zur Erläuterung bemerken wir, daß die dx^i, anders wie im gewöhnlichen Fall, keinen Vektor bilden, denn es ist

$$dx^I = \frac{\partial x^I}{\partial x^i} dx^i + \frac{\partial x^I}{\partial t} dt.$$

Diese Tatsache bildet den fundamentalen Unterschied zwischen der gewöhnlichen und „rheonomen" Invariantentheorie. Dagegen ist

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}$$

ein starker kovarianter Vektor, wenn nur f ein starker Skalar ist. In der Tat, ist sowohl bei (6), als bei (5):

$$\frac{\partial f}{\partial x^I} = \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x^I}.$$

Der folgende einfache und wichtige Satz erlaubt starke Tensoren zu bilden.

(7) *Ist T ein von $\dot{x}^i$, x^i und t abhängiger starker Tensor, so ist es auch* $\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i}$.

In der Tat, es gilt

$$\dot{x}^I = \frac{\partial x^I}{\partial x^i} \dot{x}^i + \frac{\partial x^I}{\partial t},$$

also

$$\frac{\partial \dot{x}^I}{\partial \dot{x}^i} = \frac{\partial x^I}{\partial x^i}.$$

Die $\frac{\partial x^I}{\partial x^i}$ sind aber von $\dot{x}^i$ unabhängig. Differenziert man also z. B.

$$T^K = \frac{\partial x^K}{\partial x^l} T^l, \qquad K = \bar{1}, \ldots, \bar{n}$$

nach $\dot{x}^I$, so erhält man sofort den Satz.

5. Die fundamentalen starken Tensoren. Wir gehen nun von der Form

$$2T = a_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k + 2 \alpha_i \dot{x}^i + A, \qquad i, k = 1, \ldots, n,$$

aus, die nach Voraussetzung invariant gegenüber

$$x^I = x^I(x^i, t)$$

sein soll.

Die Anwendung des eben ausgesprochenen Satzes (7) ergibt den kovarianten starken Vektor

$$v_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i} = a_{ik} \dot{x}^k + \alpha_i,$$

den wir die *„Längsgeschwindigkeit"* nennen. Nochmalige Anwendung desselben Satzes (7) liefert den zweifach kovarianten starken „Fundamentaltensor"

$$\frac{\partial v_i}{\partial \dot{x}^k} = a_{ik}.$$

Wir führen, wie üblich, den reziproken Tensor a^{ik} ein:

$$a^{ij} a_{jk} = a^i_k = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$$

Setzen wir nun:

$$\alpha^i = a^{ik} \alpha_k,$$

so kommt als starker kontravarianter Vektor:

$$v^i = a^{ik} v_k = \dot{x}^i + \alpha^i.$$

dt ist natürlich ein starker Skalar. Also ist

$$\delta x^i = v^i dt = dx^i + \alpha^i dt$$

ein starker (infinitesimaler) Vektor, den wir die *„absolute elementare Verschiebung"* nennen. In unserem Kalkül tritt er an die Stelle von dx^i.

Im streng skleronomen Fall ist in einem geeignet gewählten Koordinatensystem $\alpha^i = 0$. Wir sehen, daß in diesem Falle die absoluten Koordinaten des Elementes mit den gewöhnlichen (ausgezeichneten) übereinstimmen. Die absoluten Komponenten des Elementes heben also gewissermaßen die durch falsche Koordinaten hereingebrachte scheinbare Rheonomität auf.

Nun schreiben wir die quadratische Fundamentalform vermittels der absoluten Verschiebung um, um zu neuen Invarianten zu gelangen.

$$ds^2 = a_{ik}(dx^i + \alpha^i dt)(dx^k + \alpha^k dt) + (A - a_{ik} \alpha^i \alpha^k) dt^2.$$

$$ds^2 = a_{ik} \delta x^i \delta x^k + (A - \alpha_i \alpha^i) dt^2.$$

Die linke Seite und der erste Summand der rechten sind stark invariant. Dasselbe gilt also auch von

$$\mathcal{A} = A - \alpha_i \alpha^i.$$

$\mathcal{A}$ nennen wir die *„transversale lebendige Kraft"*. Der Leser möge selbst verifizieren, daß im Fall einer sich starr bewegenden Fläche $\mathcal{A}$ das Quadrat der transversalen Komponente der Führungsgeschwindigkeit ergibt.

Im streng skleronomen Falle ist natürlich $\mathcal{A} = 0$, denn im ausgezeichneten Koordinatensystem ist $A = \alpha_i = 0$, da die Form homogen wird.

6. Starkes kovariantes Differential. Nun müssen wir zur Bildung eines „starken" Differentiales übergehen. Natürlich ist hier, in Nachbildung bekannter Theorien, folgendes zu verlangen [2]:

(8)

1. Das Differential eines Skalars ist dem gewöhnlichen Differential gleich:

$$\delta p = dp.$$

2. Das Differential eines starken Tensors ist ein Tensor derselben Stufe und Art.

3. Das Differential ist additiv und „partiell":

$$\delta(U+V) = \delta U + \delta V; \quad \delta(UV) = U\delta V + V\delta U.$$

Diesen durchaus notwendigen Bedingungen fügen wir noch hinzu:

4. Das Differential ist auch auf ein skalares Produkt partiell anwendbar:

$$\delta(U_i V^i) = U_i \delta V^i + V^i \delta U_i.$$

5. Das Differential des Fundamentaltensors ist gleich Null:

$$\delta a_{ik} = 0.$$

Das Postulat 1. ist als Definition des kovarianten Differentials eines Skalars zu betrachten. Setzen wir

$$\delta v^i = dv^i + \omega^i_{\ k} v^k,$$
$$\delta v_k = dv_k + \tilde{\omega}^i_{\ k} v_i,$$

(ω und $\tilde{\omega}$ sind Differentialformen in dx^i und dt) und analog in bekannter Weise für Tensoren, so ist (8, 3) erfüllt. Verlangen wir noch:

$$\omega^i_{\ k} + \tilde{\omega}^i_{\ k} = 0,$$

so erreichen wir auch (8,4). Es bleibt aber noch das schwierigste (8,2) und (8,5).

Wir erreichen das Ziel vermittels einer Methode, die sehr beachtenswert ist, obwohl sie in der Tensorrechnung verhältnismäßig wenig angewandt wird. Wir werden sie öfters benutzen und erlauben uns den Leser auf sie aufmerksam zu machen. Sie besteht darin, neue Tensoren als Koeffizienten skalarer Formen einzuführen, die andererseits als Summen gewöhnlicher (skalarer) Differentiale von Skalarformen dargestellt sind. Das gestattet die Tensoreigenschaft sehr leicht in Evidenz zu bringen, gewissermaßen durch Rückgang auf den Ursprung: auf das Differential eines Skalars. Man kann dadurch oft viele Rechnungen sparen, die mit Koordinatentransformationen gewöhnlich verknüpft sind.

[2]) J. A. Schouten, Der Ricci-Kalkül. Berlin Springer 1924, S. 63. Unsere Behandlung ist von der dort angegebenen verschieden.

Wir betrachten den Ausdruck

$$\varphi = \underset{1}{\delta}(a_{ik}\underset{2}{\delta}x^i\underset{3}{\delta}x^k) + \underset{2}{\delta}(a_{ik}\underset{1}{\delta}x^i\underset{3}{\delta}x^k) - \underset{3}{\delta}(a_{ij}\underset{1}{\delta}x^i\underset{2}{\delta}x^j) \tag{9}$$

und nehmen uns vor ihn als eine Differentialform in $\underset{3}{\delta}x^k$ umzuschreiben. Die Koeffizienten dieser Form geben uns dann einen Tensor, der sich als das kovariante starke Differential $\underset{1}{\delta}\underset{2}{\delta}x^k$ erweisen wird. Damit das aber möglich wird, müssen wir die elementare Verschiebung passend wählen: das ist der wesentliche Griff der Methode [3]).

Wir setzen (invariant):

$$\underset{2}{d}t = \underset{3}{d}t = 0, \tag{10}$$

also

$$\underset{2}{\delta}x^i = \underset{2}{d}x^i, \quad \underset{3}{\delta}x^i = \underset{3}{d}x^i, \tag{11}$$

und wählen außerdem die Verschiebungen $\underset{1}{d}, \underset{2}{d}, \underset{3}{d}$ vertauschbar:

$$\underset{a}{d}\underset{b}{d}x^i = \underset{b}{d}\underset{a}{d}x^i, \qquad (a, b = 1, 2, 3) \tag{12}$$

Wir entwickeln nun (9), benutzen mehrmals (10), (11) und (12), und erhalten eine Form in $\underset{3}{\delta}x^k$. Die Rechnung gestaltet sich wie folgt:

$$\begin{aligned}\underset{1}{\delta}(a_{ik}\underset{2}{\delta}x^i\underset{3}{\delta}x^k) &= a_{ik}\underset{1}{d}\underset{2}{d}x^i\underset{3}{\delta}x^k + a_{ik}\underset{1}{d}\underset{3}{d}x^k\underset{2}{\delta}x^i + \underset{1}{d}a_{ik}\underset{2}{d}x^i\underset{3}{\delta}x^k \\ &= a_{ik}\underset{1}{d}\underset{2}{d}x^i\underset{3}{\delta}x^k + \underline{a_{ik}\underset{1}{d}\underset{3}{d}x^k\underset{2}{\delta}x^i} + \underline{\partial_j a_{ik}\underset{2}{\delta}x^i\underset{1}{d}x^j\underset{3}{\delta}x^k} \\ &\quad + \partial_t a_{ik}\underset{2}{\delta}x^i\underset{1}{d}t\underset{3}{\delta}x^k;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underset{2}{\delta}(a_{ik}\underset{1}{\delta}x^i\underset{3}{\delta}x^k) &= \underset{2}{d}(a_{ik}\underset{1}{d}x^i\underset{3}{\delta}x^k) + \underset{2}{d}(\alpha_k\underset{3}{\delta}x^k\underset{1}{d}t) \\ &= a_{ik}\underset{2}{d}\underset{1}{d}x^i\underset{3}{\delta}x^k + \underline{a_{ik}\underset{1}{d}x^i\underset{2}{d}\underset{3}{d}x^k} + \underline{\partial_j a_{ik}\underset{2}{\delta}x^j\underset{1}{d}x^i\underset{3}{\delta}x^k} \\ &\quad + \partial_j\alpha_k\underset{2}{\delta}x^j\underset{1}{d}t\underset{3}{\delta}x^k + \underline{\alpha_k\underset{2}{d}\underset{3}{d}x^k\underset{1}{d}t};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underset{3}{\delta}(a_{ij}\underset{1}{\delta}x^i\underset{2}{\delta}x^j) &= \underset{3}{d}(a_{ij}\underset{1}{d}x^i\underset{2}{d}x^j) + \underset{3}{d}(\alpha_j\underset{2}{\delta}x^j\underset{1}{d}t) \\ &= \underline{a_{ij}\underset{3}{d}\underset{1}{d}x^i\underset{2}{d}x^j} + \underline{a_{ij}\underset{1}{d}x^i\underset{3}{d}\underset{2}{d}x^j} + \underline{\partial_k a_{ij}\underset{2}{\delta}x^j\underset{1}{d}x^i\underset{3}{\delta}x^k} \\ &\quad + \partial_k\alpha_j\underset{2}{\delta}x^j\underset{1}{d}t\underset{3}{\delta}x^k + \underline{\alpha_j\underset{3}{d}\underset{2}{d}x^j\underset{1}{d}t}.\end{aligned}$$

Die dünn unterstrichenen Glieder heben sich fort. Der Rest besitzt $\underset{3}{\delta}x^k$ als

[3]) Einem Ausdruck der Form (9) begegnet man bei Th. de Donder, Théorie des invariants intégraux. Paris 1927. S. 114. Es wird aus ihm das kovariante Differential natürlich nur für die gewöhnlichen Riemannschen Räume abgeleitet. Dort kam die geeignete Auswahl der Verschiebungen nicht mit ins Spiel.

„Faktor" und muß also einen starken Tensor bilden. Die stark unterstrichenen Glieder bilden in der aus der Riemanngeometrie geläufigen Weise die zyklische Bildung mit den Koeffizienten:

(13) $$2\Gamma_{k,ij} = \partial_i a_{jk} + \partial_j a_{ki} - \partial_k a_{ij}; \quad \Gamma^k{}_{ij} = a^{kh}\Gamma_{h,ij}.$$

Außerdem setzen wir analog:

(14) $$2\Gamma_{kj} = \partial_t a_{jk} + \partial_j a_k - \partial_k a_j; \quad \Gamma^k_j = a^{kh}\Gamma_{hj}$$

und erhalten:

$$\begin{aligned}\varphi &= \underset{3}{\delta} x^k [2a_{ik} \underset{1}{d} \underset{2}{\delta} x^i + 2\Gamma_{k,hj} \underset{2}{\delta} x^h \underset{1}{d} x^j + 2\Gamma_{kh} \underset{2}{\delta} x^h \underset{1}{d} t] \\ &= 2a_{ik} [\underset{1}{d} \underset{2}{\delta} x^i + \Gamma^i{}_{hj} \underset{2}{\delta} x^h \underset{1}{d} x^j + \Gamma^i_h \underset{2}{\delta} x^h \underset{1}{d} t] \underset{3}{\delta} x^k.\end{aligned}$$

Setzen wir nun für einen starken Vektor v^i definitorisch:

(15) $$\delta v^i = dv^i + \Gamma^i{}_{hj} v^h dx^j + \Gamma^i_h v^h dt$$

bzw.

(16) $$\delta v_h = dv_h - \Gamma^i{}_{hj} v_i dx^j - \Gamma_h{}^i v_i dt,$$

so ist jetzt leicht zu sehen, daß dieses Differential die Bedingungen $(8,_2; 8,_5)$ erfüllt. Zuerst haben wir:

(14a) $$\varphi = 2a_i \underset{1}{\delta} \underset{2}{\delta} x^i \underset{3}{\delta} x^k$$

und daraus folgt, da φ stark skalar und $\underset{3}{\delta} x^k$ ein beliebiger Vektor, daß $a_{ik} \underset{1}{\delta} \underset{2}{\delta} x$ und also auch $\underset{1}{\delta} \underset{2}{\delta} x^i$ *ein starker Vektor* ist.

Weiter gilt:

$$\underset{1}{\delta} (v_i \underset{2}{\delta} x^i) = v_i \underset{1}{\delta} \underset{2}{\delta} x^i + \underset{2}{\delta} x^i \underset{1}{\delta} v_i.$$

Hier ist die linke Seite stark skalar, $\underset{1}{\delta} \underset{2}{\delta} x^i$, wie eben bewiesen, ein starker Vektor. Also ist auch $\underset{2}{\delta} x^i \underset{1}{\delta} v_i$ skalar und somit $\underset{1}{\delta} v_i$ ein starker Vektor. Gehen wir von dem Ausdruck $v_i w^i$ aus, so beweisen wir analog, daß δw^i ein starker Vektor ist und ähnlich geht es für die höheren Tensoren.

Um endlich $(8,_5)$, d. h. $\delta a_{ik} = 0$ zu beweisen, genügt es in (9) $\underset{2}{\delta} x^k = \underset{3}{\delta} x^k = \delta x^k$ zu setzen. Wir erhalten dann

$$\varphi = \underset{1}{\delta} (a_{ik} \delta x^i \delta x^k) = 2a_{ik} \underset{1}{\delta} \delta x^i \delta x^k.$$

Andererseits ist aber, wenn wir denselben Ausdruck partiell kovariant auswerten:

$$\varphi = \underset{1}{\delta} a_{ik} \delta x^i \delta x^k + 2a_{ik} \underset{1}{\delta} \delta x^i \delta x^k.$$

Daraus folgt wegen (14a)

$$\underset{1}{\delta} a_{ik} \delta x^i \delta x^k = 0$$

für beliebiges δx^i, also

(17) $$\delta a_{ik} = 0$$

w. z. b. w.

Aus

$$a^{ij} a_{jk} = a^i_k = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

leiten wir durch kovariante Differentiation

(18) $$\delta a^i = 0$$

ab.

Die Gleichungen (17) und (18) sichern die Vertauschbarkeit der starken Differentiation mit dem Herauf- und Herunterziehen der Indizes. Damit ist aber die formale Gleichwertigkeit der starken und der gewöhnlichen kovarianten Differentiation gezeigt.

Gibt es eine Koordinatentransformation, die die Γ^i_h überall und immer zum Verschwinden bringt, z. B. im streng skleronomen Fall, so haben wir einen besonderen Fall, der sich zum allgemeinen gewissermaßen so verhält, wie der euklidische zum riemannschen.

7. Die kovariante starke Ableitung. Neben dem kovarianten starken Differential betrachten wir die kovariante starke Ableitung. Das Differential ist eine lineare Form der elementaren Verschiebung, z. B.

$$\delta v^i = \frac{\partial v^i}{\partial x^k} dx^k + \frac{\partial v^i}{\partial t} dt + \Gamma^i_{hk} v^h dx^k + \Gamma^i_h v^h dt.$$

Die Koeffizienten dieser Form geben Anlaß zur Bildung des Gegenstückes der partiellen Ableitungen. In der Tat folgt nach dem Satze (7), daß der Koeffizient von dx^k

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\delta v^i}{dt} = \frac{\partial v^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_h \; v^h$$

ein starker Tensor ist. Wir bezeichnen ihn mit $\nabla_k v^i$, und die entsprechende Operation allgemein mit ∇_k. Sie ist mit der gewöhnlichen kovarianten Differentiation identisch, die wir in der Riemannschen Geometrie benutzen: sie erweist sich nicht nur als gewöhnlicher, sondern auch als ein starker Tensor $\left(\text{vgl. } \frac{\partial f}{\partial x^k}\right)$.

Dagegen ist der Koeffizient von dt kein starker Tensor, und wir müssen also das Gegenstück der partiellen Ableitung nach der Zeit etwas tiefer suchen. Zu diesem Zweck transformieren wir das kovariante Differential in eine Form der absoluten elementaren Verschiebung. Der Koeffizient bei δx bleibt derselbe, wie vorher bei dx^i; bei dt erhalten wir dagegen z. B.:

$$\frac{\partial v^i}{\partial t} + \Gamma^i_h v^h - a^j \nabla_j v^i.$$

Wir nennen diese Bildung die *„kovariante starke partielle Ableitung nach der Zeit“* und bezeichnen sie mit $\nabla_t v^i$.

Für einen starken Skalar erhalten wir z. B. statt $\frac{\partial f}{\partial t}$:

$$\nabla_t f = \frac{\partial f}{\partial t} - \alpha^j \frac{\partial f}{\partial x^j}.$$

Allgemein, um zu der starken partiellen Ableitung nach t zu gelangen, werden wir von dem Koeffizienten bei dt die Größe $\alpha^j \nabla_j$ abziehen müßen. Wir werden oft das starke Differential in der total starken Form:

(19) $$\delta T = \nabla_k T\, \delta x^k + \nabla_t T\, dt$$

schreiben.

8. Der Dehnungstensor. Wir werden nun einen Tensor auffinden, der gewissermaßen eine Besonderheit der rheonomen Geometrie bildet und kein Analogon in der Riemanngeometrie besitzt. Er erweist sich als maßgebend für die Dehnung des Raumes und verschwindet für einen sich starr bewegenden Raum. Da eine einfach unendliche Flächenschar stets als eine sich bewegende Fläche aufgefaßt sein kann, so wird er sich auch für das Problem der infinitesimalen Isometrie von Wichtigkeit erweisen. In diesem Falle (allgemein im Falle einer Hyperfläche) ist er nahe mit der zweiten Fundamentalform verwandt [S. 14, (24)].

Dieser Tensor ist für den rheonomen Raum in dem Sinne intrinsek, daß er sich ausschließlich durch die inhomogene Fundamentalform ausdrückt. Wir führen ihn vermittels der Methode, die auf S. 104 § 6 auseinandergesetzt worden war.

Wir betrachten die skalare Form

$$\psi = \bar{\delta}(a_{ik}\,\delta x^i \delta x^k) = \bar{d}\, a_{ik}\, \delta x^i \delta x^k$$

und wählen die vertauschbaren Verschiebungen in der folgenden (invarianten) Weise:

$$dt = 0, \quad \bar{\delta} x^i = 0 \quad \text{also} \quad dx^i = -\alpha^i dt.$$

Die Verschiebung $\bar{\delta}$ ist also sozusagen rein zeitlich und entspricht gewissermaßen einer partiellen Differentiation nach der Zeit. Die Verschiebung δ ist dagegen ein Intervall zwischen zwei „gleichzeitigen“ Punkten. ψ würde in diesem Falle die Dehnung eines rein „räumlichen“ Intervalles in der Zeit dt angeben. Im streng skleronomen Fall gilt das alles wörtlich und ψ ist natürlich Null. Dasselbe gilt für eine starre Fläche. Die Deutung bleibt bestehen für eine sich deformierende Fläche. Nun rechnen wir ψ aus.

$$\begin{aligned}\psi = \bar{d}(a_{ik}\,\delta x^i \delta x^k) &= \bar{d}\, a_{ik}\,\delta x^i \delta x^k + 2 a_{ij}\, \bar{d}\, \delta x^j \delta x^i \\ &= (\partial_t a_{ik} - \alpha^j \partial\, a_{ik})\, \delta x^i \delta x^k\, \bar{d} t - 2 a_{ij}\, \partial_k \alpha^j\, \delta x^i \delta x^k\, \bar{d} t \\ &= (\partial_t a_{ik} - \alpha^j \partial_j a_{ik} - a_{ij}\, \partial_k \alpha^j - a_{kj}\, \partial_i \alpha^j)\, \delta x^i \delta x^k\, \bar{d} t.\end{aligned}$$

Dieser letzte Schritt war notwendig, um einen in i und k symmetrischen Koeffizienten zu erhalten. Denn nur der symmetrische Teil wird durch die Werte einer quadratischen Form bestimmt. Setzen wir also

(21) $$\begin{aligned}W_{ik} &= \tfrac{1}{2}(\partial_t a_{ik} - \alpha^j \partial_j a_{ik} - a_{ij}\, \partial_k \alpha^j - a_{kj}\, \partial_i \alpha^j) \\ &= \tfrac{1}{2}(\partial_t a_{ik} - \nabla_k \alpha_i - \nabla_i \alpha_k),\end{aligned}$$

wie man sich durch Ausrechnen überzeugt, so gilt

(22) $$\bar{\delta}(a_{ik}\,\delta x^i \delta x^k) = 2 W_{ik}\, \delta x^i \delta x^k\, \bar{d} t,$$

und da δx^i beliebig ist, schließen wir den Tensorcharakter von W_{ik}. Wir nennen ihn den *„Dehnungstensor“*.

Um diesen Namen endgültig zu rechtfertigen, betrachten wir eine sich beliebig bewegende Fläche und wählen die „Identität“ ihrer Punkte „normal“, d. h. derart, daß die Bahnen ihrer Punkte orthogonale Trajektorien zur Familie aller Lagen der Fläche werden. Dann werden wir natürlich $\alpha^i = 0$ haben und der Dehnungstensor reduziert sich auf $\frac{1}{2}\partial_t a_{ik}$. Daraus folgt, daß er die rein longitudinale Dehnung mißt.

Aus dem obigen folgt unmittelbar, daß

die notwendige und hinreichende Bedingung, damit eine sich „transversal“ bewegende Fläche starr sei, ist das Verschwinden ihres Dehnungstensors.

Dasselbe läßt sich auch so aussprechen:

Eine einfach unendliche Flächenschar ist orthogonal isometrisch dann und nur dann, wenn ihr Dehnungstensor verschwindet,

wobei der die Flächen unterscheidende Parameter als Zeit zu deuten ist. Wir heben als wichtig hervor, daß diese Bedingung stark invariant ist, also ganz unabhängig vor der gewählten Darstellungsart der Flächenfamilie.

Wir können auch jetzt *die notwendige und hinreichende Bedingung der strengen Skleronomität des Raumes* angeben. Sie lautet

(23) $$W = 0, \quad \mathscr{A} = 0,$$

wo $\mathscr{A} = A - \alpha_i \alpha^i$ ist (vgl. S. 103). Sie ist in der Tat notwendig, denn in dem ausgezeichneten Koordinatensystem ist die Form homogen und von der Zeit unabhängig, also gelten die Gleichungen (23). Aber auch umgekehrt, sind (23) erfüllt, so wählen wir die Koordinaten laut der Bedingung $\alpha^i = 0$ (was offenbar immer möglich ist). Da (23) invariant ist, so müssen sie auch in diesem Koordinatensystem gelten, also ist dann:

$$\partial_t a_{ik} = 0, \quad A = 0$$

w. z. b. w.

9. Zusammenhang mit der zweiten Fundamentalform. Bewegt sich ein m-dimensionaler Raum $\mathfrak{B}$ in einem n-dimensionalem Raume $\mathfrak{A}$, so fegt er ein „Kanal“ durch, das ein $m+1$-dimensionaler Raum $\mathfrak{C}$ ist. In diesem Raume ist $\mathfrak{B}$ in jedem Augenblick eine Hyperfläche, und hat also eine bestimmte zweite Fundamentalform (der erzwungenen Krümmung). Wir zeigen, daß sie eng mit dem Dehnungstensor zusammenhängt.

Wir wählen das Koordinatensystem auf den $\mathfrak{B}$ derart, daß die Trajektorien von konstanten x^i orthogonal zu den $\mathfrak{B}$ ausfallen. Setzen wir

$$x^\lambda = x^i,\ \lambda = 1, \ldots m; \quad x^0 = t,$$

so haben wir ein Koordinatensystem $\{x^\lambda\}$ im $m+1$-dimensionalen Kanal $\mathfrak{C}$. Bedeutet $\overline{\delta}$, wie in § 7, eine Verschiebung mit $\overline{\delta} x^i = 0$, so geschieht sie in diesem Koordinatensystem, da hier $\alpha^i = 0$ und $\delta x^i = dx^i$ ist, längs der t-Linie, ist also normal zu $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{C}$. Setzen wir

$$\overline{d} x^\lambda = B^\lambda \overline{d} t,$$

so ist B^λ die Quergeschwindigkeit des $\mathfrak{B}$. Sie ist natürlich, ihnem Sinne gemäß, ein starker Vektor. Setzen wir

$$B^\lambda = B n^\lambda,$$

so ist n^λ die Einheitsnormale zu $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{C}$.

Nun sei δ eine mit $\overline{\delta}$ vertauschbare, „rein räumliche“ Verschiebung mit $\overline{\delta} t = 0$. Dann haben wir ($\delta \overline{d} t = 0$!)

$$\overline{\delta}\, \delta x^\lambda = \delta\, \overline{\delta} x^\lambda = \delta (B^\lambda \overline{d} t) = \delta B^\lambda\, dt,$$

oder noch

$$\overline{\delta}\, \delta x_\lambda = \delta B_\lambda\, \overline{d} t.$$

Jetzt schreiben wir:

$$\overline{d}\,(a_{ik}\, \delta x^i\, \delta x^k) = \overline{d}\,(\delta x_\lambda\, \delta x^\lambda) = 2 \overline{\delta}\, \delta x_\lambda\, \delta x^\lambda = 2 \delta B_\lambda\, \delta x^\lambda\, \overline{d} t$$
$$= 2 B\, \delta n_\lambda\, \delta x^\lambda\, \overline{d} t.$$

Hier ist das erste Glied gleich $2 W_{ik}\, \delta x^i\, \delta x^k\, \overline{d} t$ nach (22). Das letzte aber, wegen der Definition der zweiten Fundamentalform h_{ik}[3a]) ist eben $-2 B h_{ik}\, \delta x^i\, \delta x^k\, \overline{d} t$. Da W_{ik} sowohl wie h_{ik} in der $\mathfrak{B}$ liegen, so ergibt sich

$$W_{ik} = -B h_{ik}. \tag{24}$$

Das ist die angesagte Relation.

[3a]) Vgl. z. B. Duschek-Mayer, Lehrbuch der Differentialgeometrie, Teubner 1930, Bd. I, S. 126, (13). Die Bezeichnungen sind etwas verschieden.

Es ergibt sich sofort der folgende Satz:

Bewegt sich ein Raum transversal ohne Dehnung, so ist er geodätisch in dem durchgefegten Kanal [4]).

Der Beweis ergibt sich sofort aus dem Satz von S. 109, der $W = 0$ verlangt, und aus der Relation $h_{ik} = 0$ für geodätische Hyperflächen.

10. Bedingungen für Biegung ohne Dehnung. Denken wir uns eine einparametrige Raumschar und stellen wir uns die Frage, ob sie aufeinander isometrisch abbildbar sind, d. h. ob sie als eine Reihe von Lagen eines sich ohne Dehnung bewegenden Raumes sich auffassen lassen. Dazu ist notwendig und hinreichend, daß eine solche Darstellung der Raumschar

$$x^\lambda = x^\lambda (x^i, t), \qquad \begin{array}{l} \lambda = \overline{1}, \ldots, \overline{m}, \\ i = 1, \ldots, n. \end{array} \tag{25}$$

existiere, bei welcher $\partial_t a_{ik} = 0$ wird. Der Dehnungstensor erlaubt uns dieses Problem präzis zu formulieren.

Verschiedene Darstellungen (25) stellen verschiedene Koordinatensysteme dar. Existiert zwischen ihnen ein solches, für welches $\partial_t a_{ik} = 0$ ist, so nehmen wir den entsprechenden Wert von α_i in Betracht, und nennen w_i einen starken Vektor, der in diesem ausgezeichneten Koordinatensystem die Komponenten $-\alpha_i$ hat. Wegen $\partial_t a_{ik} = 0$ gilt in diesem Koordinatensysten nach (21):

$$2 W_{ik} = -\nabla_k \alpha_i - \nabla_i \alpha_k = \nabla_k w_i + \nabla_i w_k$$

Diese Relation zwischen Tensoren muß immer bestehen, wenn sie in einem speziellen Koordinatensystem besteht. Die Bedingung der Existenz eines Vektors w_i, für den

$$\nabla_k w_i + \nabla_i w_k = 2 W_{ik} \tag{26}$$

gilt, ist also für die Isometrie der Flächenfamilie notwendig. Daß sie hinreichend ist, ergibt sich durch eine umgekehrte Überlegung. Existiert so ein Vektor w_i, so wählen wir ein Koordinatensystem in dem $\alpha_i = -w_i$ (das ist sicher möglich!). In diesem System nimmt aber die Relation (26) eben die Gestalt $\partial_t a_{ik} = 0$ an.

Die Gleichung (26) erinnert lebhaft an die Killingsche Gleichung [5]) für eine starre Deformation und geht in diese über, sobald $W_{ik} = 0$, also wenn es eine starre orthogonale Deformation existiert. Aus dieser Gleichung lassen

[4]) Für Hyperflächen in einem Riemannschen Raume auf einem anderen Wege von A. Pantazi, Sur la déformation le long de trajectoires orthogonales. Bull. Soc. St. Cluj, 6 (1931) und Mathematica 5 (1931) bewiesen.

[5]) Vgl. z. B. Ricci-Kalkül, S. 212, (271).

sich übrigens noch andere Schlüße ziehen, namentlich die infinitesimale Isometrie und die Aufstellung aller möglichen Isometrien betreffend [6]).

11. Stark kovariante Vertauschbarkeitsbedingung. Wie bekannt, nennt man zwei Verschiebungen dx^i, $\bar{d}x^i$ vertauschbar, wenn

$$d\bar{d}x^i = \bar{d}\,d x^i. \tag{27}$$

Im rheonomen Raume kommt noch

$$d\bar{d}t = \bar{d}\,dt$$

hinzu. Die Bedingung (27) ist zwar eine invariante Relation, aber ihre einzelnen Glieder sind offenbar keine Vektoren. Wir stellen uns die Aufgabe sie stark invariant umzuschreiben.

Zu diesem Zweck betrachten wir den Ausdruck

$$\begin{aligned}\delta\bar{\delta}x^i - \bar{\delta}\,\delta x^i = d\bar{\delta}x^i + \Gamma^i_{hj}\bar{\delta}x^h dx^j + \Gamma^i_h\bar{\delta}x^h dt \\ - \bar{d}\,\delta x^i - \Gamma^i_{hj}\delta x^h \bar{d}x^j - \Gamma^i_h\,\delta x^h \bar{d}t.\end{aligned}$$

Da $\delta\bar{\delta}x^i - \bar{\delta}\,\delta x^i$ ein starker Tensor ist, ist es auch der letzte Ausdruck. Wählen wir aber das Koordinatensystem normal, d. h. $a^i = 0$, so wird er wegen $\bar{\delta}x^i = \bar{d}x^i$, $\delta x^i = dx^i$, mit

$$\Gamma^i_h(\bar{\delta}x^h dt - \delta x^h \bar{d}t) = \tfrac{1}{2}a^{ik}\partial_t a_{kh}(\bar{\delta}x^h dt - \delta x^h \bar{d}t) = W^i_h(\bar{\delta}x^h dt - \delta x^h \bar{d}t)$$

identisch. Das muß in jedem Koordinatensystem gelten, also haben wir:

$$\delta\bar{\delta}x^i - \bar{\delta}\,\delta x^i = W^i_h(\bar{\delta}x^h dt - \delta x^h \bar{d}t) \tag{28}$$

Das ist die gesuchte Formel. Wir könnten den Dehnungstensor vermittels dieser Formel definieren, und schlagen wirklich bei einer Erweiterung diesen Weg ein (S. 119).

II.

Starke Invarianten einer inhomogen quadratischen Differentialform und eines Pfaffschen Systems. — Rheonichtholonome Geometrie.

12. Begriff der rheonichtholonomen Geometrie. Um den mechanischen Anwendungen gerecht zu werden, müssen wir unsere Begriffe und Ergebnisse auf nichtholonome und gleichzeitig rheonome Räume übertragen. Wir geben

[6]) Vgl. A. Wundheiler, Conditions pour une surface flexible inextensible. C. R. Ac. Paris 193 (1931).

zunächst die allgemeine Richtlinie an. Bewegt sich eine Fläche im Raume laut den Gleichungen:

$$x^i = x^i(x^\alpha, t), \qquad i = 1, \ldots, 3; \quad \alpha = \underline{1}, \underline{2},$$
$$dx^i = b^i_\alpha\, dx^\alpha + v^i\, dt, \qquad b^i_\alpha = \partial_\alpha x^i,\ v^i = \partial_t x^i,$$

so existieren in jedem Augenblick in jedem Punkte der Fläche ein durch b^i_α gegebenes Flächenelement und eine Führungsgeschwindigkeit v^i. Diese sind als Ableitungen bestimmter Funktionen durch gewisse Integrabilitätsbedingungen miteinander verknüpft, also einzeln nicht frei wählbar.

Nun verzichten wir — und das ist der fundamentale Schritt — auf diese Bedingungen und wählen die b^i_α und v^i vollkommen unabhängig voneinander. Wir erhalten ein Gebilde, daß aus einem zeitabhängigen m-dimensionalen Richtungselement und einem Vektor in jedem Punkte des Raumes besteht. Wir nennen es einen *„nichtholonomen rheonomen Unterraum"*.

Da aber hier in jedem Punkte des Raumes ein solches Paar Element-Vektor vorausgesetzt ist, so haben wir hier nicht das Analogon einer sich bewegenden Fläche, sondern einer sich bewegenden Flächenfamilie. Ist n die Dimensionszahl des Oberraumes und m die des Richtungselements, so wird im holonomen Falle eine Familie von ∞^{n-m} „Flächen" erhalten. Darauf ist wohl zu achten, wenn man sich die nichtholonome Geometrie richtig veranschaulichen will. Die Mißachtung dieser Tatsache hat bei verschiedenen Autoren mehrmals zu Fehlern geführt (vertauschbare Verschiebungen!).

Wir werden einen rheonichtholonomen Raum als durch die Gleichungen

$$dx^i = b^i_\alpha\, dx^\alpha + v^i\, dt, \qquad \alpha = \underline{1}, \ldots, \underline{m}, \tag{29}$$

gegeben voraussetzen. Es ist leicht einzusehen, daß die nichtholonome Geometrie die Invariantentheorie der Gruppen

$$dx^i = a^i_I\, dx^I + \omega^i\, dt, \qquad I = \bar{1}, \ldots, \bar{n}, \tag{30}$$

$$dx^\alpha = b^\alpha_\lambda\, dx^\lambda + \tilde{\omega}^\alpha\, dt, \qquad \lambda = \underline{1}', \ldots, \underline{m}', \tag{31}$$

sein muß. In der Tat, durch (29) ist nicht nur ein Unterraum, sondern auch ein Koordinatensystem in diesem Unterraume erklärt. Nimmt man in den dx^α eine lineare Transformation (31) vor, so erhält man eine andere Darstellung

$$dx^i = b^i_\lambda\, dx^\lambda + \tilde{v}^i\, dt$$

desselben Unterraumes, die ebenso gut ist, wie die vorige. Vom Koordinatensystem (also auch von der gewählten Darstellungsart (29)) unabhängige Eigenschaften müssen also den Transformationen (31) gegenüber invariant sein.

Wohl kann es ausgezeichnete Koordinatensysteme geben, z. B. wenn (29) in Wirklichkeit holonom ist, und die scheinbare Anholonomität einer ungeschickten Wahl der dx^α zu verdanken ist. Man muß also zwischen nichtholonomen Unterräumen und holonomen Räumen in nichtholonomer Darstellung scharf unterscheiden. Ein Kriterium für die scheinbare Anholomität muß unbedingt gegenüber (31) invariant sein. Wir werden es später angeben.

Wir erklären also die *rheonichtholonome Geometrie* als *Invariantentheorie der Gruppen*

$$dx^i = a^i_l\, dx^l + \omega^i\, dt, \qquad dx^\alpha = b^\alpha_\lambda\, dx^\lambda + \tilde{\omega}^\alpha\, dt$$

und einer *inhomogenen quadratischen Differentialform.* Die Begriffe dieser Geometrie müßen als Spezialfälle die bisher eingeführten enthalten. Es zeigt sich aber, daß die Kompliziertheit dem holonomen Fall gegenüber nur unbedeutend ist. Das erklärt sich damit, daß die Eigenschaften des ersten Differentialgrades, die von den Integrabilitätsbedingungen unabhängig sind — und das sind eben die wichtigsten — offenbar gleich in den beiden Fällen lauten.

Für $m = n$ wird der Unterraum mit dem Oberraum identisch und (31) wird einfach eine Koordinatentransformation in dem Oberraume. Wir werden zur Illustration in diesem Falle die Bedeutung unserer Begriffe nachprüfen.

Rheonichtholonome Räume werden wir mit $[\mathfrak{B}]$ bezeichnen.

Unsere Aufgabe besteht nun in der Verallgemeinerung der in I. eingeführten Begriffe auf nichtholonome Unterräume. Es handelt sich, u. a. um den Fundamentaltensor, um die Längsgeschwindigkeit, das kovariante starke Differential, den Dehnungstensor usw. Alle diese Bildungen müssen im holonomen Falle in die gewöhnlichen übergehen.

13. Projektionen in den virtuellen Unterraum. Der rheonome nichtholonome Unterraum sei durch die Gleichungen

$$dx^i = b^i_\alpha\, dx^\alpha + v^i\, dt \tag{32}$$

gegeben. Die Verschiebungen, denen $dt = 0$ entspricht sind durch

$$dx^i = b^i_\alpha\, dx^\alpha$$

gegeben. Sie bestimmen *„den virtuellen Unterraum“* $\mathfrak{B}$. Ein Vektor v^i *liegt in diesem Unterraum*, wenn er sich in der Gestalt

$$v^i = b^i_\alpha\, v^\alpha.$$

darstellen läßt. Ein Vektor ist *zu* $\mathfrak{B}$ *orthogonal*, wenn er zu jedem in $\mathfrak{B}$ liegenden Vektor orthogonal ist. Diese Begriffe übertragen wir auf beliebige Tensoren, indem wir sie auf einen bestimmten Index beziehen.

Ein Vektor kann in zwei Summanden zerlegt werden, deren einer in $\mathfrak{B}$ liegt, der andere dagegen zu $\mathfrak{B}$ orthogonal ist. Wir nennen den ersten Summanden die *longitudinale Komponente*, oder die *Projektion des Vektors* in $\mathfrak{B}$, den zweiten — *transversale Komponente.*

Man verifiziert leicht die folgenden Sätze. Setzen wir

$$b_{\alpha\beta} = a_{lk}\, b^l_\alpha\, b^k_\beta, \quad b^{\alpha\gamma}\, b_{\gamma\beta} = b^\alpha_\beta = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta, \\ 0, & \alpha \neq \beta, \end{cases} \quad b^\alpha_i = b^{\alpha\beta}\, b_{\beta i} = b^{\alpha\beta}\, a_{ik}\, b^k_\beta,$$
$$b^i_k = b^i_\alpha\, b^\alpha_k \quad (\text{immer } bb = b!), \tag{33}$$

so geben die Überschiebungen

$$\underline{v} = bv$$

immer die Projektion des Vektors v in die $\mathfrak{B}$, und zwar in verschiedenen Koordinaten: *das Projizieren ist mit der Multiplikation mit b gleichbedeutend.* Wir nennen b *den Einheitstensor* von $\mathfrak{B}$ und betrachten die Größen (33) als seine verschiedenen Darstellungen durch Komponenten. Offenbar ist immer, d. h. in jeden Komponenten symbolisch:

$$bb = b.$$

Hat ein Tensor an einer Stelle den Index α, so kann man nach der Formel

$$T^i = b^i_\alpha\, T^\alpha \quad \text{bzw.} \quad T_i = b^\alpha_i\, T_\alpha$$

an diese Stelle den allgemeineren Index i bringen.

Setzen wir symbolisch

$$c = a - b$$

so ist c der Einheitstensor des zu $\mathfrak{B}$ orthogonalen Raumes $\mathfrak{C}$.

Die Begriffe der Projektion und des In-$\mathfrak{B}$-liegens werden auch auf Tensoren übertragen mit Relativierung in bezug auf einen oder mehrere Indizes. Liegt ein Tensor in bezug auf einen Index in $\mathfrak{B}$, so ist er zu $\mathfrak{C}$ in bezug auf diesen Index orthogonal und umgekehrt.

14. Nichtholonome Fundamentalgrößen und kanonische Gestalt. (Vgl. § 5). Wir haben zuerst:

$$\delta x^i = b^i_\alpha\, dx^\alpha + (\alpha^i + v^i)\, dt, \qquad v^i = b^i_\alpha\, \dot{x}^\alpha + (\alpha^i + v^i). \tag{34}$$

Ähnlich wie im Satz (7) S. 102, beweisen wir, daß $\frac{\partial v^i}{\partial \dot{x}^\alpha} = b^i_\alpha$ ein starker Vektor in bezug auf den Index i ist. In bezug auf α ist v^i aber ein Skalar, also ist $\frac{\partial v^i}{\partial \dot{x}^\alpha} = b^i_\alpha$ in bezug auf α ein starker kovarianten Vektor.

Um die Fundamentalform für den Unterraum zu finden, setzen wir (34) in den Ausdruck ds^2 ein. Es kommt:

$$ds^2 = b_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta + 2\,\beta_\alpha dx^\alpha dt + B\,dt^2.$$

Hier ist

$$\beta_\alpha = b^i_\alpha (\alpha^i + v^i).$$

Daraus folgt, wie auf S. 103, daß

$$b_{\alpha\beta} = a_{ik} b^i_\alpha b^k_\beta$$

ein starker kovarianten Tensor in α, β ist. Weiter sind ebenso, wie in § 5:

$$\underline{v}_\alpha = b_{\alpha\beta}\dot{x}^\beta + \beta_\alpha, \quad \underline{\delta x}_\alpha = b_{\alpha\beta} dx^\beta + \beta_\alpha dt,$$
$$\underline{v}^\alpha = \dot{x}^\alpha + \beta^\alpha \quad , \quad \underline{\delta x}^\alpha = dx^\alpha + \beta^\alpha dt$$

starke Vektoren. Der Strich unter den Symbolen soll sie auf den Unterraum beziehen. Wir nennen sie die *Längsgeschwindigkeit* und *absolute elementare Verschiebung in* [𝔅].

Jetzt können wir die Gleichung (34) in der Form

$$\delta x^i = b^i_\alpha \underline{\delta x}^\alpha + (\alpha^i + v^i - b^i_\alpha \beta^\alpha)\,dt$$

umschreiben, aus welcher nun folgt, daß

$$B^i = \alpha^i + v^i - b^i_\alpha \beta^\alpha$$

ein starker Vektor ist. Wir nennen ihn die *Quergeschwindigkeit* und schreiben:

(35) $$\delta x^i = b^i_\alpha \underline{\delta x}^\alpha + B^i dt, \quad v^i = b^i_\alpha \underline{v}^\alpha + B^i.$$

Das ist *eine kanonische und vollständig invariante Gestalt* der Gleichungen des [𝔅]. Wir geben ihre geometrische Interpretation.

Wir sehen sofort, daß B^i zu 𝔅 orthogonal ist. In der Tat:

$$b^\alpha_i B^i = b^\alpha_i(\alpha^i + v^i) - b^\alpha_i b^i_\beta \beta^\beta = b^\alpha_i(\alpha^i + v^i) - \beta^\alpha = 0.$$

Daraus folgt, daß $b^i_\alpha v^\alpha$, also auch v^α in 𝔅 liegt.

Aus den Gleichungen (35) folgt, daß jeder zu [𝔅] gehörende Vektor die zu 𝔅 orthogonale Komponente B^i hat. Wir können das schreiben:

(36) $$c\,\delta x = B\,dt, \quad cv = B,$$

wenn wir mit c den Einheitstensor des orthogonalen Raumes ℭ bezeichnen. Die geometrische Interpretation für $m = 2$, $n = 3$ ist sehr anschaulich. Die Endpunkte aller in [𝔅] gehörenden Vektoren, die von demselben Punkt ausstrahlen, liegen auf derselben Ebene, die zu der virtuellen Ebene 𝔅 parallel ist.

Weiter haben wir die zu $\mathscr{A}$ analoge invariante

$$\mathscr{B} = B - \beta_\alpha \beta^\alpha.$$

Nun ist aber

(37) $$ds^2 = \delta x_i \delta x^i + \mathscr{A}\,dt^2.$$

Setzen wir nun (35) in die Formel (37) ein, so erhalten wir

$$ds^2 = \underline{\delta x}_\alpha \underline{\delta x}^\alpha + (\mathscr{A} + B_i B^i)\,dt^2 \equiv \underline{\delta x}_\alpha \underline{\delta x}^\alpha + \mathscr{B} dt^2,$$

woraus folgt

$$\mathscr{B} = \mathscr{A} + B_i B^i.$$

Das ist die *Relation zwischen den transversalen lebendigen Kräften der Räume* 𝔄 *und* 𝔅.

15. Das kovariante starke Differential in 𝔅. 𝔅 sei der virtuelle Unterraum eines rheonomen Raumes [𝔅] und b sein Einheitstensor. Ist v^i ein in 𝔅 liegendes Vektorfeld, so wird im allgemeinen schon δv^i nicht mehr in 𝔅 liegen. Wir nehmen uns vor ein starkes kovariantes Differential zu finden, das den Bedingungen (8) genügt, und das außerdem für in 𝔅 liegende Größen selbst in 𝔅 liegt.

Wir nennen *das in* 𝔅 *induzierte Differential* oder einfach *das* 𝔅*-Differential* den Ausdruck

$$\underline{\delta v} = b\,\delta v$$

der *die Projektion des gewöhnlichen kovarianten Differentiales in* 𝔅 darstellt.

Ist T ein Tensor höheren Stufe, so erhalten wir sein 𝔅-Differential, indem wir das gewöhnliche Differential in bezug auf jeden Index in die 𝔅 projizieren.

Es ist evident, daß das 𝔅-Differential die Bedingungen 1, 2, 3, 4 von § 6 erfüllt. Wir verifizieren noch 5. In der Tat, liegt v in 𝔅, so gilt:

$$v_\alpha = b_{\alpha\beta} v^\beta,$$

also

$$\underline{\delta v} = v\,\underline{\delta b} + b\,\underline{\delta v} = v\,\underline{\delta b} + \underline{\delta v}$$

da $\underline{\delta v}$, das in 𝔅 liegt, sich durch Überschiebung mit b nicht ändert. Wir haben also

$$v\,\underline{\delta b} = 0$$

für einen beliebigen Vektor v in 𝔅, und da $\underline{\delta b}$ ebenfalls in 𝔅 liegt, so erhalten wir, wie angesagt, $\underline{\delta b} = 0$.

Also ist der Fundamentaltensor b von 𝔅 in bezug auf das 𝔅-Differential ebenso „konstant", wie der Fundamentaltensor a in bezug auf das 𝔅-Differential. Es ist klar, daß im holonomen Falle das induzierte Differential mit dem gewöhnlichen zusammenfällt, da es in holonomen Falle durch die 5 Bedingungen vollkommen bestimmt ist. Deckt sich $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{A}$, so decken sich auch die beiden Differentialoperationen.

Man kann für $\underline{\delta} u$ eine ähnliche Differentialform angeben

$$\underline{\delta} u^\alpha = du^\alpha + \Gamma^\alpha{}_{\beta i} u^\beta dx^i + \Gamma^\alpha{}_\beta u^\beta dt,$$

$$\underline{\delta} u_\beta = du_\beta - \Gamma^\alpha{}_{\beta i} u_\alpha dx^i - \Gamma^\alpha{}_\beta u_\alpha dt,$$

wie für das $\mathfrak{A}$-Differential. Das ist aber kaum interessant, denn wir werden die explizite Form außer in § 19 nicht benutzen.

16. Erzwungene Krümmung. Wir haben mit der Bemerkung begonnen, daß das $\mathfrak{A}$-Differential der $\mathfrak{B}$-Größen nicht in $\mathfrak{B}$ liegt, also vom $\mathfrak{B}$-Differential verschieden ist. Wir berechnen also die Differenz der beiden Größen. Wir haben:

$$\delta u = b\,\delta u + u\,\delta b = \underline{\delta} u + u\,\delta b$$

oder (vgl. (19))

$$\delta u^i - \underline{\delta} u^i = u^k \delta b^i_k = u^k \nabla_j b^i_k\, \delta x^j + u^k \nabla_t b^i_k\, dt.$$

Diese Form bestimmt, wenn δx in $\mathfrak{B}$ liegt, lediglich die Projektionen der Koeffizienten in $\mathfrak{B}$ in bezug auf k. Wir erhalten zwei Tensoren der erzwungenen Krümmung:

(38) $$H_{\dot\beta\alpha}{}^{\cdot i} = b^{\underline{k}}_\alpha b^{\underline{j}}_\beta \nabla_{\underline{j}} b^i_{\underline{k}}\ ^{7)}, \quad H_{\alpha}^{\cdot j} = b^{\underline{k}}_\alpha \nabla_t b^i_{\underline{k}}.$$

Die Symmetrie des Tensors $H_{\dot\alpha\beta}{}^{i}$ in den Indizes β und α ist für die Holonomität von $\mathfrak{B}$ ausschlaggebend. Das ist ein wichtiger von Schouten[7]) gefundener Satz. Neben $H_{\dot\beta\alpha}{}^{\cdot i}$ wird oft der ihm äquivalente Tensor

$$H_{jk}^{\cdot\cdot i} = b^\beta_j b^\alpha_k H_{\dot\beta\alpha}{}^{\cdot i}$$

benutzt, der gleichzeitig mit $H_{\dot\beta\alpha}{}^{\cdot i}$ symmetrisch bzw. unsymmetrisch ist.

17. Zentrifugalvektor für nichtholonome Räume. Wir führen nun einen Vektor S_α vermittels der invarianten Form (vgl. S. 104)

(39) $$\tfrac{1}{2}\,\delta\,\mathscr{B}\,\bar{d}t - \bar{\delta}(B_i \delta x^i) = S_\alpha \delta x^\alpha \bar{d}t$$

ein. Hier ist $\bar{\delta} x^i = B^i \bar{d}t$, δx^i liegt in $\mathfrak{B}$. $\bar{\delta}$ ist also in bezug auf $[\mathfrak{B}]$ sozusagen rein zeitlich, δ — rein räumlich. Außerdem setzen wir δ und $\bar{\delta}$ als vertauschbar voraus. Wir bemerken ausdrücklich, um Mißverständnissen vorzubeugen, daß δx^i nach Anwendung der Verschiebung $\bar{\delta}$ nicht mehr dem $\mathfrak{B}$ angehören wird, so daß $\bar{\delta}(B_i \delta x^i)$ nicht Null sein muß.

---

[7]) Eingeführt von Schouten, Ricci-Kalkül, S. 158, (197), S. 182, (82), wo man auch näheres über ihn findet. Für nichtholonome Räume: Math. Zeit. 30. Fussnote 1.). Beweis der Holonomitätsbedingung: Schouten-Kampen, S. 776.

Wegen der Vertauschungsrelation (28) ist

$$\bar{\delta}\,\delta x^i = \delta\,\bar{\delta} x^i + W^i_j \delta x^j \bar{d}t = \delta(B^i \bar{d}t) + W^i_j \delta x^j \bar{d}t$$

also ist (39) tatsächlich eine Form in δx^α. Es ist leicht S_α explizit zu berechnen. Man erhält:

(39*) $$S_\alpha = b^i_\alpha(\tfrac{1}{2}\,\partial_i \mathscr{A} - \nabla_t B_i - B^k \nabla_k B_i - W_{ik} B^k)$$

S_α spielt in den mechanischen Anwendungen eine fundamentale Rolle, und wird ihretwegen „absolute Zentrifugalkraft" genannt. Außerdem wird er uns in den Holonomitätsbedingungen begegnen.

18. Dehnungstensor für nichtholonome Räume. Wir führen nun, wie S. 112 angesagt, den Dehnungstensor für nichtholonome Räume ein, indem wir aus der Vertauschbarkeitsbedingung ausgehen. Hier bietet sich aber die folgende Schwierigkeit: liegen zwei Felder δx^i und $\bar{\delta} x^i$ in $[\mathfrak{B}]$, so sind sie im allgemeinen nicht vertauschbar. Wir modifizieren also das Verfahren in dem Sinne, daß wir nur die Vertauschbarkeit längs einer in $[\mathfrak{B}]$ gelegenen Kurve fordern, was stets erreichbar ist. Aus

$$\delta x^i = \underline{\delta} x^i + B^i dt$$

erhalten wir durch nochmalige Differentiation

$$\bar{\delta}\,\delta x^i = \bar{\delta}\,\underline{\delta} x^i + \bar{\delta} B^i dt + B^i \bar{\delta}\, dt = \bar{\delta}\,\delta x^i + \nabla_k B^i \bar{\delta} x^k dt + \nabla_t B^i \bar{d}t\, dt + B^i \bar{\delta}\, dt.$$

Projektion auf $\mathfrak{B}$ ergibt

$$b^\alpha_i \bar{\delta}\,\delta x^i = \underline{\bar{\delta}}\,\underline{\delta} x^\alpha + b^\alpha_i \nabla_k B^i \bar{\delta} x^k dt + b^\alpha_i \nabla_t B^i dt\, \bar{d}t.$$

Ähnlich

$$b^\alpha_i \delta\,\bar{\delta} x^i = \underline{\bar{\delta}}\,\underline{\delta} x^\alpha + b^\alpha_i \nabla_k B^i \delta x^k \bar{d}t + b^\alpha_i \nabla_t B^i \bar{d}t\, dt.$$

Wir substrahieren gliedweise:

$$(\underline{\bar{\delta}}\,\underline{\delta} x^\alpha - \underline{\delta}\,\underline{\bar{\delta}} x^\alpha) = b^\alpha_i(\bar{\delta}\,\delta x^i - \delta\,\bar{\delta} x^i) + b^\alpha_i \nabla_k B^i (\delta x^k \bar{d}t - \bar{\delta} x^k dt).$$

Sind δ und $\bar{\delta}$ in $\mathfrak{A}$ längs einer $[\mathfrak{B}]$-Kurve vertauschbar, so können wir in den Punkten dieser Kurve (28) anwenden und es kommt:

$$(\underline{\bar{\delta}}\,\underline{\delta} - \underline{\delta}\,\underline{\bar{\delta}}) x^\alpha = b^\alpha_i (W^i{}_k + \nabla_k B^i)(\delta x^k \bar{d}t - \bar{\delta} x^k dt).$$

Da aber

$$\delta x^k \bar{d}t - \bar{\delta} x^k dt = \underline{\delta} x^k \bar{d}t - \underline{\bar{\delta}} x^k dt,$$

so gilt:

$$(\underline{\bar{\delta}}\,\underline{\delta} - \underline{\bar{\delta}}\,\underline{\delta}) x^\alpha = b^\alpha_i (W^i{}_k + \nabla_k B^i)(\delta x^k \bar{d}t - \underline{\bar{\delta}} x^k dt),$$

und da $\underline{\delta}$ und $\underline{\bar{\delta}}$ in $\mathfrak{B}$ liegen, so gilt:

$$(\underline{\bar{\delta}}\,\underline{\delta} - \underline{\delta}\,\underline{\bar{\delta}})x^{\alpha} = b_i^{\alpha}\, b_{\beta}^{k}(W^{i}_{k} + \nabla_k B^i)(\underline{\delta} x^{\beta}\overline{d}t - \underline{\bar{\delta}} x^{\beta} dt).$$

Endlich ist:

$$b_i^{\alpha} b_{\beta}^{k} \nabla_k B^i = b_j^{\alpha} b_i^j b_{\beta}^{k} \nabla_k B^i = -B^i b_j^{\alpha} b_{\beta}^{k} \nabla_k b_i^j = -B^i H_{\beta\,.\,i}^{\;\,\alpha}$$

nach (38). Also endgültig:

$$(\underline{\bar{\delta}}\,\underline{\delta} - \underline{\delta}\,\underline{\bar{\delta}})x^{\alpha} = (b_j^{\alpha} b_{\beta}^{k} W^{j}{}_{k} - B_i H_{\beta\alpha}^{\cdot\,\cdot\,i})(\underline{\delta} x^{\beta}\overline{d}t - \underline{\bar{\delta}} x^{\beta} dt).$$

Wir nennen $\underline{\delta} x^i$ und $\underline{\bar{\delta}} x^i$, die Projektionen vertauschbarer Differentiale in $\mathfrak{B}$ sind, *quasi-vertauschbare Differentiale*. Ist $[\mathfrak{B}]$ holonom, so sind die quasi-vertauschbaren Differentiale schlechthin vertauschbar, und die Formel bestimmt den Dehnungstensor des holonomen Raumes $\mathfrak{A}$.

Wir setzen also definitorisch:

$$\underline{W}_{\alpha\beta} = b_{\alpha}^{i} b_{\beta}^{k} W_{ik} - B_i H_{\beta\alpha}^{\cdot\,\cdot\,i}. \tag{40}$$

Es folgt aus dieser Formel, daß wenn der Unterraum entweder geodätisch oder homogen ($B^i = 0$) ist, so sind die Dehnungstensoren für den Ober- und Unterraum gleich. Wegen der Holonomitätsbedingung (S. 118) haben wir sofort:

Für holonome Unterräume und nur für solche ist der Dehnungstensor $W_{\alpha\beta}$ symmetrisch.

19. Krümmungstensor. Gehen wir von dem Ausdruck für das „zyklische Differential"

$$\Delta u^{\alpha} = (\bar{\delta}\delta - \delta\bar{\delta})u^{\alpha}$$

aus, so erhalten wir nach einer aus der Riemanngeometrie wohlbekannten Rechnung:

$$(\bar{\delta}\delta - \delta\bar{\delta})u^{\alpha} = R^{\alpha}_{\cdot\,\beta ik}\delta x^i \bar{\delta} x^k + R^{\alpha}{}_{\beta i} u^{\beta}(\delta x^i \overline{d}t - \bar{\delta} x^i dt). \tag{41}$$

Nur müssen wir hier rechtzeitig statt dx^i, $\overline{d}x^i$ die absoluten Verschiebungen δx^i und $\bar{\delta} x^i$ einführen, um eine vollständig stark invariante Form zu haben.

Für die starken Krümmungstensoren $R^{\alpha}{}_{\beta ik}$ und $R^{\alpha}{}_{\beta i}$ haben wir:

$$R^{\alpha}{}_{\beta ik} = \partial_k \Gamma^{\alpha}{}_{\beta i} - \partial_i \Gamma^{\alpha}{}_{\beta k} + \Gamma^{\alpha}{}_{\gamma k}\Gamma^{\gamma}{}_{\beta i} - \Gamma^{\alpha}{}_{\gamma i}\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha k},$$

$$R^{\alpha}{}_{\beta i} = \partial_t \Gamma^{\alpha}{}_{\beta i} - \partial_i \Gamma^{\alpha}{}_{\beta} + \Gamma^{\alpha}{}_{\gamma}\Gamma^{\gamma}{}_{\beta i} - \Gamma^{\alpha}{}_{\gamma i}\Gamma^{\gamma}{}_{\beta k} - \alpha^k R^{\alpha}{}_{\beta ik}.$$

Wir müssen aber noch einige Bemerkungen machen. Im $\mathfrak{B}$-Differential liegt zwar der differenzierte Vektor u in $\mathfrak{B}$, aber die Verschiebung längs welcher man das Differential berechnet ist ganz beliebig. Deshalb kann im Ausdruck

für das $\mathfrak{B}$-Differential:

$$\underline{\delta} u^{\alpha} = du^{\alpha} + \Gamma^{\alpha}{}_{\beta i} u^{\beta} dx^i + \Gamma^{\alpha}{}_{\beta} u^{\beta} dt,$$

der dritte „Differential"-Index i der $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta i}$ mit einer beliebigen Größe verknüpft werden. Daß zieht aber nach sich, daß die Krümmungstensoren die ersten zwei „Vektor"-Indizes in $\mathfrak{B}$ haben, die letzten zwei aber — die „Differential-indizes" haben eine beliebige Lage im Oberraume. Die Einführung solcher Größen sichert eine größere Geschmeidigkeit des Apparates in Behandlung der Krümmungsaufgaben, z. B. der Variationsgleichungen (§ 29).

Deckt sich $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{A}$, so bleiben alle Rechnungen gültig, und wir erhalten einfach die Krümmungstensoren des holonomen Raumes $\mathfrak{A}$, die mit allen Indizes beliebig liegen. Wir bemerken noch einmal, daß die allgemeinen Größen sich auf Vektoren beziehen, die zwar in der $\mathfrak{B}$ liegen, aber beliebig verschoben werden.

20. Holonomitätsbedingung. Die Gleichungen

$$dx^i = b_{\alpha}^{i} dx^{\alpha} + v^i dt,$$

wie schon oben erwähnt, bestimmen nicht nur einen Unterraum, sondern auch ein Koordinatensystem im denselben. Es kann sich wohl ereignen, daß der Unterraum holonom ist, das Koordinatensystem $\{\alpha\}$ aber nicht. Deshalb könnten die üblich gegebenen Bedingungen:

$$b_{\beta}^{k}\,\partial_k\, b_{\alpha}^{i} = b_{\alpha}^{k}\,\partial_k\, b_{\beta}^{i},$$

überhaupt nicht erfüllt sein, sogar bei holonomen Unterräumen. Die richtige Holonomitätsbedingung muß der Transformation

$$dx^{\alpha} = b_{\lambda}^{\alpha} dx^{\lambda} + \tilde{\omega}^{\alpha} dt,$$

wie auch

$$dx^i = a_l^i dx^l + \omega^i dt$$

gegenüber invariant sein. Nur in der Sprache der rheonichtholonomen Geometrie kann dieses Problem gelöst werden.

Betrachten wir nun den rheonomen Unterraum $[\mathfrak{B}]$. Soll er holonom sein, so muß sowohl der virtuelle Raum $\mathfrak{B}$, als auch der Unterraum $\mathfrak{E}$, der dann durch die Bewegung von $\mathfrak{B}$ entsteht, holonom sein. Das genügt aber nicht: der Vektor B^i, der zum unseren rheonomen Unterraume gehört, muß gerade die „Quergeschwindigkeit" sein.

Ist $\mathfrak{B}$ holonom, so muß nach dem S. 118 zitierten Satze

$$H_{\beta\alpha}^{\cdot\,\cdot\,i} = H_{\alpha\beta}^{\cdot\,\cdot\,i} \tag{42}$$

sein. Ähnlich fordert die Holonomität von $\mathfrak{E}$

(43) $$e^{k}_{\underline{k}}\, e^{j}_{\underline{j}}\, \nabla_{\underline{j}}\, e^{i}_{\underline{k}} = e^{j}_{\underline{j}}\, e^{k}_{\underline{k}}\, \nabla_{\underline{k}}\, e^{i}_{\underline{j}},$$

wenn e^{i}_{k} den Einheitstensor von $\mathfrak{E}$ bedeutet. Diese Bedingungen müßen wir durch b und B^{i} ausdrücken. Setzen wir

$$B^{i} = B n^{i},$$

wo n^{i} ein Einheitsvektor ist, so verifiziert man leicht, daß

(44) $$e^{i}_{k} = b^{i}_{k} + n^{i} n_{k}.$$

Wir entwickeln nun (43) auf Grund von (44) und $b^{i}_{h} B^{h} = 0$:

$$\begin{aligned} e^{h}_{\underline{h}}\, e^{k}_{\underline{k}}\, \nabla_{\underline{k}}\, e^{i}_{\underline{h}} &= b^{h}_{\underline{h}}\, b^{k}_{\underline{k}}\, \nabla_{\underline{k}}\, b^{i}_{\underline{h}} + b^{h}_{\underline{h}}\, b^{k}_{\underline{k}}\, \nabla_{\underline{k}}\, n^{i} n_{\underline{h}} \\ &+ n^{\underline{h}} n^{\underline{k}} n_{h} n_{k} \nabla_{\underline{k}}\, e^{i}_{\underline{h}} + (b^{h}_{\underline{h}}\, n^{\underline{k}} n_{k} + b^{k}_{\underline{k}}\, n^{\underline{h}} n_{h}) \nabla_{\underline{k}}\, e^{i}_{\underline{h}}. \end{aligned}$$

Die Symmetrie des dritten Summanden ist evident. Die des ersten folgt aus (42). Die Symmetrie des zweiten folgt aus der folgenden Rechnung:

$$\begin{aligned} b^{h}_{\underline{h}}\, b^{k}_{\underline{k}}\, \nabla_{\underline{k}}\, n^{i} n_{\underline{h}} &= b^{h}_{\underline{h}}\, b^{k}_{\underline{k}}\, n^{i} \nabla_{\underline{k}}\, n_{\underline{h}} = b^{k}_{\underline{k}}\, b^{j}_{h}\, b^{h}_{\underline{j}}\, n^{i} \nabla_{\underline{k}}\, n_{\underline{h}} \\ &= -\, n_{\underline{h}}\, n^{i}\, b^{j}_{h}\, b^{k}_{\underline{k}}\, \nabla_{\underline{k}}\, b^{h}_{\underline{j}} = -\, n_{\underline{h}}\, n^{i}\, H_{kh}{}^{\underline{h}} \end{aligned}$$

und dieser Ausdruck ist wegen (42) symmetrisch. Es bleibt der Ausdruck:

$$(b^{h}_{\underline{h}}\, n^{\underline{k}} n_{k} + b^{k}_{\underline{k}}\, n^{\underline{h}} n_{h}) \nabla_{\underline{k}}\, e^{i}_{\underline{h}}.$$

Führen wir die Bezeichnung:

$$\Phi_{[ik]} = \Phi_{ik} - \Phi_{ki}$$

ein, so können wir (43) in der Gestalt umschreiben:

$$(b^{h}_{\underline{h}}\, u^{\underline{k}} u_{k} + b^{k}_{\underline{k}}\, u^{\underline{h}} u_{h}) \nabla_{[\underline{k}}\, e^{i}_{\underline{h}]} = 0$$

Das überschieben wir mit u^{h}, dann mit u^{k}, und erhalten die gleichwertigen Bedingungen:

$$b^{h}_{\underline{h}}\, u^{\underline{k}} \nabla_{[\underline{k}}\, e^{i}_{\underline{h}]} = 0, \quad b^{k}_{\underline{k}}\, u^{\underline{h}} \nabla_{[\underline{k}}\, e^{i}_{\underline{h}]} = 0,$$

die wir in der Gestalt

(45) $$b^{[h}_{\underline{h}}\, u^{\underline{k}]} \nabla_{\underline{k}} (b^{i}_{\underline{h}} + u^{i} u_{\underline{h}}) = 0$$

endgültig notieren.

Es bleibt noch die Bedingung für B^{i}. Ist $[\mathfrak{B}]$ holonom, so führt die Verschiebung $\overline{\delta}$ in (39) das Element δx^{i} offenbar wieder in eines, das in $\mathfrak{B}$ liegt. Also ist dann nicht nur $B_{i}\, \delta x^{i} = 0$ sondern auch $\overline{\delta}(B_{i}\, \delta x^{i}) = 0$ und man erhält

(46) $$S_{\alpha} = \tfrac{1}{2} \partial_{\alpha} \mathscr{B}.$$

Die Bedingungen (42), (45) und (46) sind die gesuchten notwendigen und hinreichenden Holonomitätsbedingungen für rheonome Unterräume.

III.

Die absoluten Gleichungen der Mechanik.

21. Überblick über die Anwendung der Tensorrechnung auf die Mechanik. Schon die Schöpfer des absoluten Differentialkalküls, Ricci und Levi-Civita, haben im Jahre 1900 [8]) die Bewegungsgleichungen eines sklero- und holonomen mechanischen Systems in der Tensorsymbolik hingeschrieben, wobei die kovariante Ableitung benutzt wurde. Diese Gestalt enthielt also nur gegenüber Punkttransformationen

(47) $$x^{i} = x^{i}(x^{j})$$

invariante Größen. Dazu wurde das mechanische System als ein Punkt eines mehrdimensionalen Riemannraumes, des *„Konfigurationsraumes"* betrachtet, dessen Fundamentalform

(48) $$ds^{2} = 2T\, dt^{2} = a_{ik}\, dx^{i}\, dx^{k}$$

war, wo $2T$ die lebendige Kraft des Systems war. Sie weisen auch auf die Möglichkeit der Aufsuchung zyklischer Koordinaten vermittels dieser mehrdimensionalen Abbildung hin und geben die Bedingungen für die Existenz eines in den verallgemeinerten Geschwindigkeiten linearen Integrals an.

Die Vorteile, die man aus dieser mehrdimensionalen Repräsentation ziehen kann, haben ihre Quelle darin, daß man die aus dem dreidimensionalen Raume stammenden Intuitionen zur Veranschaulichung bekannter Theoreme (z. B. das Hertzsche Prinzip der geradesten Bahn) benutzen kann, aber auch neue Resultate mit ihrer Hilfe erraten. So kann man z. B. durch eine Verallgemeinerung der Jacobischen Gleichungen für die geodätische Abweichung Variationsgleichungen für die Bahnen mechanischer Systeme erhalten [§ 29, (19)]. Auf demselben Wege, durch Verallgemeinerung der bekannten inneren Bewegungsgleichungen, haben wir unsere in §§ 30, 31 angegebenen Sätze über Reaktionskräfte erhalten. Dieselben inneren Gleichungen erlauben sehr einfach eine Reihe von Folgerungen über den Verlauf der Bahnen mechanischer Systeme, über den Verlauf der Bewegung usw. ziehen, die Painlevé auf einem anderen, mehr formalen Wege erhalten hat [9]).

Die erste systematische Behandlung der Mechanik vermittels der Ten-

[8]) Ricci et Levi-Civita, Méthodes du calcul différentiel absolu et leurs applications. Math. Ann. 54 (1900), S. 179 (in polnischer Übersetzung: Prace matematyczno-fizyczne, t. 12, 1901).

[9]) P. Painlevé, Sur les trajectoires réelles. Bull. Soc. Math. de France 1894.

sorrechnung stammt von J. L. Synge (1926)[10]. Er benutzt dort zweierlei mehrdimensionale Abbildungen des mechanischen Systems. Die eine ist die schon besprochene vermittels des „kinematischen ds^2“ (48), die andere beruht auf dem ds^2 der Aktion:

$$ds^2 = 2\,(h - V)\,T\,dt^2.$$

Synge schreibt ebenfalls die mechanischen Gleichungen für skleronome und nichtholonome Systeme vermittels der kovarianten Ableitung, gibt aber als Anwendung nur Betrachtungen über die Stabilität der Bewegung, die auf Variationsgleichungen fußen, die er noch vor der Levi-Civitaschen Verallgemeinerung der Jacobischen Gleichungen erhalten hat. Er gibt auch Kriterien für die Existenz von $n-1$ zyklischen Koordinaten.

Sein Hauptverdienst ist jedoch, daß er als erster den wichtigsten Vorteil bemerkte, den man aus der mehrdimensionalen Abbildung ziehen kann: daß bei dieser Auffassung der Unterschied zwischen holonomen und nichtholonomen System formal fast verschwindet, was natürlich cum grano salis zu verstehen ist. Das fällt in der Syngeschen Symbolik nicht so kraß aus. Dasselbe kann man von den Vrănceanuschen Gleichungen für nichtholonome Systeme sagen, die von diesem Autor in einer Reihe von Noten in der Accademia dei Lincei[11]) behandelt wurden. Er rechnet mit den für die ältere italienische Schule charakteristischen orthogonalen Kongruenzen und seine Methoden stehen an Durchsichtigkeit hinter denen zurück, die durch Anwendung der Schoutenschen Symbolik erreichbar sind. Diese hat zuerst Horák 1928[12]) angewandt. Die Vrănceanuschen Anwendungen beschränken sich ebenso wie bei Synge auf die Stabilität für konservative Systeme.

Alle diese Untersuchungen waren grundsätzlich nur für skleronome Systeme geführt. Zwar schreibt Horák seine Gleichungen auch für rheonome Systeme, aber sie werden, was Übersichtlichkeit anbelangt, durch nichts ausgezeichnet, was ihnen einen Vorrang vor älteren expliziten Gleichungen (Woronetz, Tzénoff, Hamel) sichern könnte. Dasselbe gilt in noch größerem

---

[10]) J. L. Synge, On the Geometry of Dynamics. Phil. Trans. Roy. Soc. A 226 (1926). — Geodesics in non-holonomic Geometry. Math. Ann. 99 (1928). — Hodographs of General Dynamical Systems. Trans. Roy. Soc. of Canada, XXV (1931).

[11]) G. Vranceanu, Sopra le equazioni del moto di un sistema anolomo. Rend. Lincei, IV (1926). — Sopra la stabilità geodetica. ibid. V (1927). — Stabilità geodetica. Applicazioni ai sistemi conservativi della Meccanica. ibid. V (1927). — Sullo scostamento geodetico nelle varietà anolome. ibid. VI (1928). — Sopra i sistemi anolonomi a legami dipendenti dal tempo. ibid. XIII (1931).

[12]) Z. Horák, Sur les systèmes non holonomes. Bull. Int. Acad. Tchèque. XXIX. (1928).

Maße von Vrănceanu, der vor einem Jahre[13]) das Problem von neuem angegriffen und in seiner Symbolik die Gleichungen für rheo- und nichtholonome Systeme ausgeschrieben hat.

22. Die absolute Mechanik. Der Grund für alle diese Übelstände ist der folgende. Die Theorie der rheonomen Systeme kann nur dann einfach ausfallen, wenn sie in adäquaten Termini aufgebaut wird. Adäquat aber sind in diesem Falle diejenigen Termini, die von zulässigen Koordinatensystemen unabhängig sind, eine intrinseke Bedeutung haben. Nun ist es klar — und das ist der springende Punkt — das für ein rheonomes System, das auf die Parameter x^i bezogen ist, alle durch eine zeitabhängige Transformation

$$x^i = x^i(x^I, t) \tag{49}$$

verbundenen Parametersysteme vollkommen gleichwertig, ununterscheidbar sind. Denkt man an einen Punkt auf einer sich deformierenden Fläche, so wird das ohne weiteres klar. Als mechanische Größen im eigentlichen Sinne sind Systeme zu betrachten, die sich diesen „*kinematischen Transformationen*“ (49) und nicht nur den „geometrischen“ (47) gegenüber invariant, also tensoriell verhalten. Wir werden in Nachbildung des bekannten Namens „Absoluter Differentialkül“ eine Darstellung der Mechanik in solchen „stark invarianten“ Termini als „*Absolute Mechanik*“ bezeichnen, und diese stark invarianten Größen *absolute mechanische Größen* nennen. Formal wird sie mit der oben entwickelten rheonomen Geometrie, oder auch mit der „starken“ Tensorechnung in vielen Punkten identisch.

Wir müssen aber einen Schritt weiter gehen, um den nichtholonomen Systemen gerecht zu werden. Ist ein solches durch die Bedingungsgleichungen

$$dx^i = b^i_\alpha\, dx^\alpha + v^i\, dt$$

gegeben, so werden für dieses System gleichzeitig unabhängige „nichtholonome“ Parameter eingeführt. Wie schon S. 113 bei einer ähnlichen Gelegenheit auseinandergesetzt wurde, sind alle anderen Darstellungen, die man durch Anwendung der Parametertransformationen

$$dx^\alpha = b^\alpha_\lambda\, dx^\lambda + \bar{\omega}^\alpha\, dt \tag{50}$$

erhält, durchaus gleichwertig und ununterscheidbar. Soll also eine sich auf ein nichtholonomes System beziehende Größe eine intrinseke Bedeutung haben, „eine absolute mechanische Größe“ sein, so muß sie sich den Transformationen (50) gegenüber invariant verhalten. Nur mit diesen Bildungen kann der Nagel auf den Kopf getroffen werden, wenn man eine adäquate Theorie der rheonomen Systeme bilden will, und nur in diesen Größen können die expliziten

---

[13]) Vgl. die letzte der zitierten Vrănceanuschen Noten.

Gleichungen der allgemeinen Systeme einfach ausfallen. Wir setzen also endgültig fest:

Als „absolute Mechanik“ bezeichnen wir die Invariantentheorie der nicht-holo- und rheonomen Transformationen (50) *und der quadratischen Form für die kinetische Energie*:

$$2T = a_{ik}\,\dot{x}^i\,\dot{x}^k + 2\,a_i\,\dot{x}^i + A.$$

Die Anwendungen, die wir weiter geben, werden vermutlich diesen Standpunkt als gerechtfertigt erscheinen lassen. Wir heben aber ausdrücklich hervor, daß die absolute Mechanik nur für wirklich rheo und nichtholonome Systeme am Platze ist: für ein skleronomes System, in dem es ein ausgezeichnetes Koordinatensystem gibt, reicht natürlich die Invarianz gegenüber gewöhnlichen Punkttransformationen vollkommen aus.

23. Mechanische Interpretation der »starken« Größen. Es sei zunächst ein mechanisches holonomes Systems auf die Parameter x^i bezogen. Seine lebendige Kraft sei:

(51) $$2T = a_{ik}\,\dot{x}^i\,\dot{x}^k + 2\,a_i\,\dot{x}^i + A.$$

Wir haben in § 5 die Größe a_i „longitudinale Führung“ genannt. Denkt man sich z. B. einen Punkt auf einer im dreidimensionalen Raume beweglichen Fläche

$$x^\lambda = x^\lambda(x^i, t), \qquad \begin{aligned}\lambda &= \bar{1}, \bar{2}, \bar{3};\\ i &= 1, 2,\end{aligned}$$

so rechnet man wie auf S. 101, (4) leicht aus, daß a_i eben die Projektion der Mitführungsgeschwindigkeit auf die Fläche ist. A wird aber das Quadrat der Mitführungsgeschwindigkeit, also die „lebendige Kraft der Mitführung“. Diese beiden Größen hängen natürlich von dem auf der Fläche gewählten Koordinatensystem, von der „Identität“ der Flächenpunkte ab, sind also keine absoluten mechanische Größen. Dafür aber ist die „transversale lebendige Kraft“

$$\mathscr{A} = A - a_i\,a^i,$$

d. h. in unserem Beispiel das Quadrat der Mitführung in der absoluten, zur Fläche orthogonalen Richtung, eine starke Größe.

Ähnlich ist x^i keine starke Größe, da sie ebenfalls von der gewählten „Identität“ der Flächenpunkte abhängt. Nehmen wir dagegen die Größe:

$$v^i = \dot{x}^i + a^i,$$

so verifiziert man in unserem vorbildsmäßigen Beispiel, daß sie die Projektion der absoluten Geschwindigkeit eines auf der Fläche beweglichen Punktes auf

diese Fläche ist. Das muß aber schon eine absolute Größe sein, wie wir S. 103 bewiesen haben. Wir haben sie die „Längsgeschwindigkeit“ genannt.

Gehen wir jetzt zum nichtholonomen System über. Was bedeutet zuerst die Gleichung:

$$dx^i = b^i_{\alpha}\,dx^\alpha + v^i dt?$$

Wir sehen, daß sie das System, also den repräsentativen Punkt von der Masse 1 in dem n-dimensionalen rheonomen Raume von der Fundamentalform (51), derart bindet, daß seine „Geschwindigkeit“ nicht beliebig sein darf. Sie muss sich aus einer in dem virtuellen Raume liegenden *„relativen“* Geschwindigkeit $\dot{x}^i$ und einer aufgedrängten *„Mitführungsgeschwindigkeit“* zusammensetzen. Diese beiden sind aber nicht invariant, wie schon oben gezeigt wurde. Gehen wir dagegen zur kanonischen stark invarianten Form über (vgl. (35), (36)):

$$v^i = \underline{v}^i + B^i, \quad c^i_{\ k} v^k = B^i,$$

so zeigt sich, daß die „transversale“ Komponente der „ganzen“ Geschwindigkeit vollkommen bestimmt ist. Das ist die *transversale Mitführung.* Man kann das so deuten, daß die Endpunkte der möglichen Geschwindigkeiten des materiellen Punktes, der sich am Ort M befindet, in einer m-dimensionalen „Ebene“ liegen, die zur virtuellen Ebene $\mathfrak{B}$ im Abstande B^i parallel ist. Ist B^i gleich Null, so vereinfacht sich das zu einer Beschränkung der möglichen Geschwindigkeiten nur in bezug auf ihre Richtugen, ohne Beschränkung ihrer Größen. Im allgemeinen Fall aber wird die Größe der Geschwindigkeit mit ihrer Richtung in Verbindung gesetzt.

$B^2 = B_i B^i$ wird die *„transversale relative lebendige Kraft“.* Dagegen

$$\mathscr{B} = \mathscr{A} + B_i B^i$$

wird die „ganze“ lebendige Kraft der Mitführung. Sind die Bindungen in Wirklichkeit holonom, so gehen alle diese Größen in die oben besprochenen Größen v^i und $\mathscr{A}$ über.

24. Absolute Gleichungen für ein holonomes System. Es handelt sich nun um eine Form der Bewegungsgleichungen, die nicht nur den rheonomen Transformationen gegenüber invariant ist — denn eine solche ist schon die Lagrange'sche — sondern auch ausschließlich aus absoluten mechanischen Größen besteht. Das ist für die Lagrange'schen Gleichungen nicht mehr der Fall. Zwar ist $v^i = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}^i}$ eine starke Größe, aber das gilt von $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}^i}$ und $\dfrac{\partial T}{\partial x^i}$ nicht mehr.

Wir gehen von dem Hamiltonschen Prinzip in der Form

$$\int (\bar{\delta} T + Q_i \bar{\delta} x^i)\, dt = 0 \tag{52}$$

aus und rechnen vom Anfang an stark kovariant. δ bezeichnet das starke Differential längs der Bahnkurve, $\bar{\delta}$ eine mit ihm vertauschbare „starke kovariante Variation". Wir haben: $(\bar{\delta} t = 0!)$

$$\bar{\delta}\, 2T = \bar{\delta}(v^2 + \mathcal{A}) = \bar{\delta}(v_i v^i + \mathcal{A}) = 2 v_i \bar{\delta} v^i + \bar{\delta} \mathcal{A}.$$

Weiter ist:

$$v_i \bar{\delta} v^i dt = v_i \bar{\delta}(v^i dt) = v_i \bar{\delta}\, \delta x^i$$

und nach der Vertauschungsrelation:

$$= v_i \delta\, \bar{\delta} x^i - v_i W^i_{\cdot j} \bar{\delta} x^j dt = \delta(v_i \bar{\delta} x^i) - \delta v_i \bar{\delta} x^i - v_i W^i_{\cdot j} \bar{\delta} x^j dt.$$

Das vollständige Differential wird in (52) ausintegriert und es bleibt:

$$-\left(\frac{\delta v_i}{dt} + W^j{}_i v_j\right) \bar{\delta} x^i dt.$$

Wir schreiben nun

$$\bar{\delta} \mathcal{A} = \partial_i \mathcal{A}\, \bar{\delta} x^i = 2\, S_i \bar{\delta} x^i$$

nach (39*). Wir erhalten also die Bewegungsleichungen in der Gestalt:

$$\frac{\delta v_i}{dt} + W^j{}_i v_j = S_i + Q_i. \tag{53}$$

Der Leser wird leicht nachprüfen, daß z. B. im Falle einer rotierender Ebene $\mathcal{A}$ das Potential der Zentrifugalkraft und S_i die Zentrifugalkraft selber ist. Daher der Name *„absoluter Zentrifugalvektor"*. $W_{ij} v^j$ erinnert an die Corioliskraft, ist aber etwas ganz verschiedenes, da die Corioliskraft keine absolute Größe ist und im einen geeigneten Koordinatensystem, als eine nur relative, fiktive Kraft, verschwindet. Man sieht sofort welche Vereinfachungen durch $W = 0$ eintreten.

Es ist vielleicht interessant die bekannte Theorie der Relativbewegung in dieser Auffasung zu betrachten. Wir haben hier einen Punkt im gewöhlichen Raume, also ein streng skleronomes System. Die Gleichungen der Bewegung reduzieren sich hier auf die „Newtonsche" Gestalt:

$$\frac{\delta v^i}{dt} = Q^i.$$

Ist das Koordinatensystem rheonom (wie es bei beweglichen Achsen eben der Fall ist) so explizitiert sich die Gleichung wie folgt:

$$\frac{d v^i}{dt} + \Gamma^i_{hj} v^h v^j + \Gamma^i_h v^h = Q^i + S^i.$$

Ist das rheonome Koordinatensystem durch bewegliche Achsen gebildet, so ist es leicht zu sehen, daß $\Gamma^i_{hj} = 0$ ist und daß Γ^i_{hj} die bekannten Rotationsbildungen sind, so daß $\Gamma^i_h v^h$ einfach die fiktive Corioliskraft darstellt. $\mathcal{A}$ ist dann aber die Potential der zentrifugalen Führungskraft. In der absoluten Behandlung erscheinen sie alle in δv^i versteckt, und haben keinen absoluten mechanischen Sinn. Das leuchtet übrigens wohl ein, da sie doch wegtransformierbar sind.

25. Gleichungen für nichtholonome Systeme. Für nichtholonome Systeme mit den supplementären Bedingungen in kanonischer Form

$$v^i = \underline{v}^i + B^i$$

haben wir

$$\frac{\delta v^i}{dt} + W^i{}_j v^j = S^i + Q^i + R^i, \tag{54}$$

wo R^i die zu dem virtuellen Raume normale Reaktionskraft bedeutet. Wir projizieren auf den virtuellen Raum $\mathfrak{B}$ und führen überall die auf ihn bezogenen (unterstrichenen) Größen ein:

$$\frac{\delta v^i}{dt} = \frac{\delta \underline{v}^i}{dt} + \frac{\delta B^i}{dt} = \frac{\delta \underline{v}^i}{dt} + \frac{\nabla_k B^i \delta x^k + \nabla_t B^i dt}{dt} = \frac{\delta \underline{v}^i}{dt} + \nabla_k B^i \cdot \underline{v}^k + B^k \nabla_k B^i + \nabla_t B^i.$$

Das setzen wir in (54) ein und projizieren auf $\mathfrak{B}$, wobei $b^\alpha_i R^i$ verschwindet:

$$\frac{\delta \underline{\underline{v}}^\alpha}{dt} + b^\alpha_i (W^i{}_k + \nabla_k B^i) b^k_\beta\, \underline{v}^\beta + b^\alpha_i (- S^i + B^k \nabla_k B^i + \nabla_t B^i + W^i{}_k B^k) = b^\alpha_i Q^i.$$

Nach den Formeln (39*) und (40) ist das aber:

$$\frac{\delta \underline{\underline{v}}}{dt} + \underline{W}^\alpha_{\cdot \beta} \underline{v}^\beta = \underline{S}^\alpha + \underline{Q}^\alpha. \tag{55}$$

Das ist die angesagte absolute Gestalt für rheonichtholonome Systeme [14]). Sie führt sofort zu einer richtigen und sinnvollen Klassifikation der dynamischen Systeme.

26. Klassifikation der mechanischen Systeme. Eine sinnvolle, adäquate Klassifikation der mechanischen Systeme muß von Eigenschaften ausgehen, die den Systemen selbst und nicht den gewählten Parametersystemen inhärent sind. Man kann das System nicht als rhenom bezeichnen, wenn seine kinetische Energie von der Zeit abhängt, denn dann wäre jedes skleronome System, von beweglichen Achsen aus beurteilt, auch rheonom. Dasselbe gilt von der üblichen Definition der Holonomität, wie wir oben (S. 121) auseinandergesetzt haben. Die adäquate Klassifikation muß durch die absoluten mechanischen Größen geschehen.

[14]) Für skleronome Systeme $W = 0$, $S = 0$ geben diese Gleichungen alle Autoren, die die geometrische Repräsentation benutzt haben. Vgl. z. B. Schouten, Math. Zeitschr. 30, S. 171, (116) und die zitierte Arbeit von Horák.

Wir faßen an dieser Stelle die Holonomitätsbedingungen (42), (45), (46) noch einmal zusammen:

$$H_{\beta\alpha}^{\cdot\cdot i} = H_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot i},$$

$$b^{[k}_{\underline{h}}\, n^{k]}\, \nabla_{\underline{k}} (b^i_{\underline{h}} + n^i n_{\underline{h}}) = 0,$$

$$S_\alpha = \frac{1}{2}\frac{\partial \mathscr{B}}{\partial x^\alpha}.$$

Skleronomität. Wir haben schon für ein holonomes System bewiesen (S. 109), daß es streng skleronom, daß heißt in einem geeigneten Koordinatensystem eine von der Zeit gänzlich unabhängige homogene kinetische Energie hat, wenn gleichzeitig:

$$W = 0, \quad \mathscr{A} = 0.$$

Wir können aber auch als besonders einfach ein System hervorheben, für welches nur

$$W = 0$$

gilt. Dann gibt es zwar nicht notwendig ein System, in dem die kinetische Energie homogen ist, wohl aber ein solches, in dem ihr quadratischer Teil von der Zeit nicht abhängig ist. Wir nennen das System dann einfach *skleronom*.

Für nichtholome Systeme kann man sich die Klassifikation, durch die Bewegungsgleichungen (55) geleitet, wie folgt denken:

$$\begin{array}{lll} & \underline{W}_{\alpha\beta} = 0 & \text{halbskleronom;} \\ (56) & \underline{W}_{\alpha\beta} = 0 \quad \underline{S} = 0 & \text{quasiskleronom;} \\ & W_{ik} = 0, \quad \partial_i \mathscr{A} = 0, \quad \nabla_i b_{\alpha\beta} = 0, \quad B^i = 0 & \text{skleronom.} \end{array}$$

27. Die natürlichen Gleichungen der Bewegung. In der gewöhnlichen Punktmechanik nennt man natürlich die Gleichungen, die die Projektionen der Bewegungsgleichungen auf die Tangente und die Normale zur Bahnkurve darstellen:

$$m\frac{dv}{dt} = F_t, \qquad m\frac{v^2}{\varrho} = F_n.$$

Wir wollen nun für beliebige dynamische Systeme — auch nichtholome — ähnliche Gleichungen aufstellen. Es geht nicht ohne Schwierigkeiten: man denke z. B. daran, daß in einem rheonomen Räume von einer *„Bahnkurve"* kaum die Rede sein kann, da doch eine rheonome Transformation die „Identität" der Punkte und damit auch jede Kurve ändert. Aber wir haben einen sicheren Wegweiser: beziehen wir den gewöhnlichen (z. B. einfach dreidimensionalen Riemannraum) auf ein rheonomes Koordinatensystem (z. B. bewegliche rechtwinklige Achsen), so lassen sich alle Größen auch in diesem Koordinatensystem anschreiben, also Tangente, Normale, Krümmung usw. Sie drücken sich in einer bestimmten, leicht zu erratenden Weise durch unsere starken Größen aus. Damit aber ist der Weg gezeigt: im allgemeinen Falle bilden wir dieselben Ausdrücke. Der Leser findet nach diesem Andeutungen leicht die folgende Darstellung.

Es sei in einem rheonomen Unterraume [𝔅] die „Kurve"

$$x^i = x^i(t)$$

gegeben. Damit ist eigentlich ein Gebilde gedacht, daß jedem (rheonomen) Koordinatensystem eine gewisse Kurve zuordnet: etwas m. m. einem Vektor ähnliches. Wir setzen allgemein (indem wir die lästigen unteren Striche bei 𝔅-Größen einfachheitshalter auslassen):

$$d\sigma^2 = b_{ik}\,\delta x^i\,\delta x^k.$$

Das ist unser *Bogenelement*. Offenbar ist:

$$v = \frac{d\sigma}{dt}, \qquad (v^2 = b_{ik} v^i v^k)$$

Es ist auch

$$1 = b_{ik}\frac{\delta x^i}{d\sigma}\frac{\delta x^k}{d\sigma}.$$

Wir nennen $u^i = \dfrac{\delta x^i}{d\sigma}$ die *Einheitstangente* oder einfach die *Tangente* der Kurve. Weiter führen wir den starken Vektor (δ ist das starke 𝔅-Differential!)

$$k^i = \frac{\delta u^i}{d\sigma}$$

als *Krümmung* unserer Kurve ein. Der absolute Betrag dieses Vektors:

$$k = \sqrt{b_{ik}\frac{\delta u^i}{d\sigma}\frac{\delta u^k}{d\sigma}}, \qquad k^i = k\,n^i,$$

ist die *skalare Krümmung*. Offenbar gilt:

$$u_i\frac{\delta u^i}{d\sigma} = 0. \tag{57}$$

Es ist wohl überflüssig zu bemerken, daß im strengholonomen Falle alle diese Größen sich mit den altbekannten (bei gewöhnlichem Sinne des Wortes) decken.

Nun schreiben wir:

$$\frac{\delta v^i}{dt} = v\frac{\delta u}{dt} + u^i\frac{dv}{dt} = v^2\frac{\delta u^i}{d\sigma} + u^i\frac{dv}{dt}.$$

Das ist die wohlbekannte Zerlegung in Tangential- und Normalbeschleunigung. Setzen wir das in die Bewegungsgleichungen ein und multiplizieren, unter Beachtung von (57), einmal mit u_i, das andere mit k_i, so erhalten wir bzw.

$$\frac{dv}{dt} = (S^i + Q^i)\, u_i,$$

$$v^2 k = (S^i + Q^i)\, n_i.$$

Das sind die angesagten natürlichen Gleichungen. Man kann sagen, daß die erste bei gegebener *„Bahnkurve"* die Durchlaufungsart, also die Geschwindigkeit bestimmt. Das gilt wörtlich im strengskleronomen Falle ($W = 0$, $S = 0$). Die Gleichungen nehmen dann die Gestalt

$$\frac{dv}{dt} = Q^i u_i, \quad v^2 k = Q^i n_i$$

an, und die Krümmung ist natürlich von der Zeit explizit unabhängig. Man kann aus diesen Gleichungen eine Anzahl Painlevéscher Schlüße [9]) ziehen, was auch Franck [15]) in gewissem Grade gemacht hat, aber auf Grund anderer, minder anschaulicher und einfacher Gleichungen, die nicht genau in geometrischen Termini geschrieben wurden.

28. Energieintegral für rheo- und nichtholonome Systeme. Wir geben nun einen Fall, wo es ein Integral existiert, daß dem Energieintegral für skleronome Systeme analog ist. Wir werden in erweitertem Sinne das Energieintegral ein Integral der Gestalt

$$T = h' - V'(x^i, t)$$

nennen, die wir wegen

$$v^2 + \mathscr{A} = 2T$$

auch in der Gestalt

$$v^2 = h - 2V(x^i, t) \tag{58}$$

schreiben können. Das Problem kann allgemeiner gestellt werden, indem man Integrale sucht, die nur in den quadratischen Gliedern mit der kinetischen Energie übereinstimmen, in den lineraren aber sich unterscheiden können. Sie werden die absolute Gestalt

[15]) Ph. Franck und L. Berwald, Über eine kovariante Gestalt der Differentialgleichungen der Bahnkurven allgemeiner mechanischer Systeme. Math Zeit. 21 (1924). Ph. Franck, Die geometrische Deutung von Painlevés Theorie der reellen Bahnen allgemeiner mechanischer Systeme. Proc. 1. Intern. Congress for Applied Mechanics. Delft 1924.

$$v^2 = A_i v^i - 2V(x^i, t) + h$$

haben, wo A_i ein starker Vektor, V ein starker Skalar ist. Ein solches Integral finden wir in dem bekannten Fall von Painlevé [15a]). Unsere absoluten Gleichungen erlauben auch diese Frage zu beantworten, aber die sich ergebenden Kriterien lassen sich nicht explizitieren denn sie fordern die Integrabilität gewisser partiellen Differentialgleichungen. Wir beschränken uns also auf den Fall, wo ein Integral (58) existiert und führen einen neuen Begriff ein, der ein rheonomes Gegenstück des Potentiales ist.

Wir nennen V ein absolutes Potential des Vektorfeldes X_i, wenn die stark invarianten Bedingungen

$$X_i = -\partial_i V, \quad \nabla_t V = 0$$

erfüllt sind.

Man verifiziert sofort, daß dann die Gleichung

$$X_i \delta x^i = -dV$$

gilt, die wiederum ein invariantes Gegenstück der Gleichung der elementaren Arbeit ist.

Wir kehren zum Energieintegral zurück. Wir multiplizieren die Bewegungsgleichungen

$$\frac{\delta v_i}{dt} + W_{ik} v^k = S_i + Q_i$$

(die unteren Striche, die sich auf den Unterraum beziehen, haben wir hier unterlassen) skalar mit der Geschwindigkeit:

$$v^i \frac{\delta v_i}{dt} + W_{ik} v^i v^k = (S_i + Q_i)\, v^i.$$

Die kovariante Ableitung eines Skalars ist mit der gewöhnlichen identisch:

$$\frac{1}{2}\frac{dv^2}{dt} + W_{ik} v^i v^k = (S_i + Q_i)\, v^i.$$

Soll eine Gleichung (58) stattfinden, so dürfen rechts keine in v^i quadratischen Glieder vorkommen, also muß der Dehnungstensor schiefsymmetrisch sein. Setzen wir noch voraus, daß die Summe $S_i + Q_i$ ein absolutes Potential besitzt:

$$S_i + Q_i = -\partial_i V, \quad \nabla_t V = 0,$$

so können wir schreiben

$$(S_i + Q_i)\, v^i = -\frac{dV}{dt}.$$

[15a]) Vgl. z. B. P. Appell, Traité de Mécanique rationelle, t. II (IV éd.), § 448, p. 329 oder P. Painlevé, Leçons sur l'intégration des équations de la dynamique. Paris Hermann 1895, p. 89.

Ist für ein dynamisches System

$$W_{ik} = -W_{ki}, \quad S_i + Q_i = -\partial_i V, \quad \nabla_t V = 0,$$

so besitzt es das Energieintegral

$$v^2 = h - 2V.$$

Diese Bedingungen nehmen eine interessantere Gestalt für ein holonomes System an. Da der Dehnungstensor dann symmetrisch ist, so muß einfach $W = 0$ sein, also das System muß halbskleronom sein. Setzen wir noch voraus, daß es ein Potential $-U$ im gewöhnlichen Sinne gibt und setzen wir

$$V = \tfrac{1}{2}\mathscr{A} - U,$$

so wird V das absolute Potential von $S_i + Q_i$, wenn die Bedingung $\nabla_t V = 0$ erfüllt ist, die gewissermaßen die Unabhängigkeit von V von t fordert. Das Energieintegral nimmt die Gestalt:

$$v^2 = h + \mathscr{A} + 2U \tag{*}$$

an. Also

Sind für ein holonomes System vom Potential $-U$ die Bedingungen

$$W_{ik} = 0, \quad \nabla_t(\mathscr{A} + 2U) = 0$$

erfüllt, so besitzt es ein Energieintegral (*).

Wir bemerken ausdrücklich, daß dieser Fall von dem Painlevéschen[16]) verschieden ist. Die in diesen Sätzen angegebenen Bedingungen sind cum grano salis auch notwendig, in dem Sinne, daß $W = 0$ jedenfalls stattfinden muß. Die Bedingungen für die Existenz des Potentiales läßt sich schwächer fassen.

29. Variationsgleichungen für Kurven des [𝔅]. Wir geben als Anwendung gewisse Gleichungen, die für das Problem der Stabilität rheonomer Systeme fundamental sind. Es sind dies die Variationsgleichungen für zwei beliebige Kurven in dem rheonichtholonomen Raume. Dadurch verstehen wir natürlich, daß jedes Element der Kurve in [𝔅] liegt. Es sind daher die kanonischen Bedingungsgleichungen

$$c^i_k\, \delta x^k = B^i\, dt \tag{59}$$

erfüllt (vgl. (36)).

[16]) Vrănceanu sucht in der letzten der genannten Noten eben eine Verallgemeinerung des Painlevéschen Integrals, was nur bei einer nichtabsoluten Behandlung der rheonomen Systeme einen Sinn haben kann, da doch die Unabhängigkeit von der Zeit keine invariante Bedingung ist. Das Painlevésche Integral ist sozusagen eine zufällige Erscheinung, die keiner mechanischen Tatsache entspricht.

Wir definieren zuerst die Abweichung für zwei unendlich nahe Kurven C und C', von denen wir noch voraussetzen, daß sich in unendlich nahen Punkten auch ihre Richtungen unendlich wenig unterscheiden. Wir beziehen beliebig die Punkte beider Kurven aufeinander (jeder von diesen hat ein bestimme Zeitkoordinate), wobei natürlich entsprechende Punkte unendlich nahe sind. Mit $\bar{\delta}$ bezeichnen wir die Verschiebung, die von einem Punkte von C zu dem entsprechenden von C' führt.

Den Vektor

$$p^i = \bar{\delta} x^i$$

nennen wir die Abweichung der Kurven C und C'. Bezeichnen wir mit δ die Elementarverschiebung längs der Kurven C und C', so haben wir

$$\bar{d}\, dt = d\, \bar{dt}, \quad \bar{\delta}\, \delta x^i - \delta\, \bar{\delta} x^i = W^i_j (\delta x^j\, \bar{dt} - \bar{\delta} x^j\, dt), \tag{60}$$

da die beiden Verschiebungen augenscheinlich vertauschbar sind. Wir suchen nun die Differentialgleichungen, denen p^i für jedes Kurvenpaar in [𝔅] genügen muß.

Wir haben aus (59)

$$\bar{\delta}\, c^i_k\, \delta x^k + c^i_k\, \bar{\delta}\, \delta x^k = \bar{\delta}\, B^i\, dt + B^i\, \bar{\delta}\, dt \tag{61}$$

Nach der Formel (19)

$$\bar{\delta} = p^j \nabla_j + \bar{dt}\, \nabla_t$$

und wegen (60) erhalten wir aus (61) nach einigen Rechnungen ziemlich komplizierte Gleichungen, die die transversale Komponente des Differentiales δp^k bestimmen.

Diese Gleichungen sind aber der Praxis gegenüber ganz unnötig kompliziert, denn für die meisten Anwendungen reicht eine *„isochronische“* Variation aus, für die $\bar{dt} = 0$ ist. Wir haben dann auch $\bar{\delta}\, dt = 0$ und die Gleichungen (61) werden in p^i homogen:

$$c^i_k\, \delta p^k + [\nabla_j c^i_k\, \delta x^k - (\nabla_j B^i + c^i_k\, W^k_j)\, dt]\, p^j = 0.$$

Ist [𝔅] skleronom, so ist $W = \mathscr{B} = 0$ und wir erhalten einfach:

$$c^i_k\, \delta p^k + \nabla_j c^i_k\, \delta x^k\, p^j = 0.$$

Diese Gleichungen gelten für beliebige Kurven in [𝔅]. Haben wir es aber mit einer besonderen Klasse zu tun, so lassen sich neue Gleichungen aufstellen. Sind z. B. die C und C' Bewegungen eines dynamischen Systems, so haben wir noch die Bewegungsgleichungen. Bemerken wir zuerst:

$$\bar{\delta} v^i = \bar{\delta}\, \frac{\delta x^i}{dt} = \frac{dt\, \bar{\delta}\, \delta x^i - \delta x^i\, \bar{\delta}\, dt}{dt^2} = \frac{\bar{\delta}\, \delta x^i}{dt} - \frac{\delta x^i}{dt}\, \frac{\bar{\delta}\, dt}{dt}.$$

Wegen (28) haben wir:

$$\frac{\bar{\delta}\,\delta x^i}{dt} = \frac{\delta p^i}{dt} + W^i_j\left(\frac{\delta x^j}{dt}\,\bar{d}t - \frac{p^j\,dt}{dt}\right) = \frac{\delta p^i}{dt} + W^i_j\,(v^j\,\bar{d}t - p^j).$$

Also

$$\bar{\delta} v^i = \frac{\delta p^i}{dt} + W^i_j\,(v^j\,\bar{d}t - p^j) - v^i\,\mu,$$

wo

$$\mu = \frac{\bar{\delta}\,dt}{dt}$$

unendlich klein ist. Gehen wir nun von der Gleichung für das *„zyklische Differential“*

$$(\underline{\bar{\delta}}\,\underline{\delta} - \underline{\delta}\,\underline{\bar{\delta}})\,v^\alpha = R^\alpha{}_{\beta ik}\,v^\beta\,\bar{\delta} x^i\,\delta x^k$$

aus, so lassen sich nicht schwer die übrigen Abweichungsgleichungen bilden, die im allgemeinen Falle recht kompliziert sind, für ein skleronomes System aber und eine isochronische Variation die Gestalt

$$\frac{\delta}{dt}\,\frac{\delta p^i}{dt} - (\nabla_j Q^i + R^i_{hjk}\,v^h\,v^k)\,p^j = 0 \quad [17]$$

annehmen. Im Spezialfall $Q = 0$ erhalten wir die Levi-Civitasche Verallgemeinerung der Jacobischen Gleichungen [18].

Charakteristisch für die hier befolgte Methode ist die Anwendung der *„stark kovarianten Variation“* [19], der wir schon bei der Ableitung der absoluten Gleichungen aus dem Hamiltonschen Prinzip begegnet waren.

IV.

Theorie der Reaktionskräfte.

30. Der Fundamentalsatz über Reaktionskräfte. Wir werden nun in der ganzen Allgemeinheit vermittels unserer mehrdimensionalen Repräsentation

[17]) Diese Formel findet man nicht invariant geschrieben bei Synge, l. c. S. 79.

[18]) Levi-Civita, Sur l'écart géodésique. Math. Ann. 97 (1926). Übrigens hat dieses Problem noch früher und allgemeiner Synge in der „Geometry of Dynamics“ behandelt, die leider nur wenig bekannt ist.

[19]) Die kovariante Variation habe ich auf das Abweichungsproblem in der Note: Une simple démonstration de la formule de l'écart géodésique. Rend. Lincei. XII (1930), die auch dynamische Anwendungen enthält, angewandt. Die Ausführung und Verallgemeinerung auf nichtholonome Systeme, wie auch eine gewisse Methode für rheonome, enthält die Arbeit des Verfassers: Über die Variationsgleichungen für affine geodätische Linien und nichtholonome, nichtkonservative dynamische Systeme. Prace Matem. Fizyczne XXXVIII (1931). Das Problem wird nicht in absoluter Behandlung angegriffen, und die rheonomen Systemen werden in einem $(n+1)$-dimensionalen Raume interpretiert.

und der erhaltenen Bewegungsgleichungen einige fundamentale Aufgaben über Reaktionskräfte lösen [20]). Die Sätze, die wir beweisen werden, beziehen sich nicht nur auf die Reaktionen, die die Gesamtheit der Bindungen ersetzen, aber auch auf Reaktionen, nach derer Einführung nur ein Teil der Bindungen ersetzt wird. Wir werden diese Reaktionskräfte *partiell* nennen.

Vielleicht wird die nachstehende Erklärung des mechanischen Sinnes, der dem Begriff der mehrdimensionalen Reaktion entspricht, nicht überflüssig. Eine solche mehrdimensionale Reaktion ist im Grunde ein Komplex von verallgemeinerten Kräften, die dynamisch die Bindungen ersetzen und in bezug auf die Parameter des befreiten System berechnet sind, das man nach Entfernung dieser Bindungen erhält. Z. B. für ein System einer endlichen Anzahl von Punkten ist die „mehrdimensionale Reaktion“ die Gesamtheit der Komponenten der Reaktionen, die an jedem einzelnen Punkte angreifen, und die Kenntnis diese Reaktion sichert uns die Kenntnis jeder dieser einzelnen Reaktionen. Für einen starren Körper gibt dagegen die mehrdimensionale Reaktion nur die Resultierende und das Moment der Reaktionskräfte (im gewöhnlichen Sinne), die an verschiedenen Punkten des Körpers angreifen. Diese Reaktionen werden schon im allgemeinen durch die mehrdimensionale Reaktion nicht bestimmt sein.

Wir stellen folgende Aufgaben:

1° Für glatte Bindungen ist die äquivalente Reaktion explizit zu berechnen.

2° Wie findet die Komposition der Reaktionen statt? D. h.: wie hängt die Reaktion, die mehrere Bindungen ersetzt, von den Reaktionen, die diese Bindungen einzeln ersetzen?

3° Wie verändert sich die Reaktion bei einer Verstärkung der Bindungen, d. h. bei Hinzufügung einer neuen?

4° Wie unterscheidet sich die Reaktion in der reellen Bewegung von Reaktionen in den virtuellen Bewegungen?

Wir erhalten die Beantwortung aller dieser Fragen als einfache Konsequenz eines fundamentalen Satzen, den wir sofort beweisen werden. Dieser Satz, den man als eine ziemlich entfernte Verallgemeinerung des Meusnierschen Theorems betrachten kann, betrifft die Änderung der Reaktionskräfte bei Verstärkung der Bindungen. Das Meusniersche Theorem betrifft die

[20]) Dem Problem der Reaktionskräfte wurden in der letzten Zeit mehrere Arbeiten von E. Gugino gewidmet. Wir nennen: Sur la détermination des forces de réaction dans le mouvement d'un système matériel, C. R. Paris, 191, p. 1118 und Sul problema dinamico di un qualsivoglia sistema vincolato ridotto all'analogo problema relativo ad un sistema libero, Rend. Lincei, XII, S. 307. Unter demselben Titel finden wir noch die Arbeit von A. Quarleri, Boll. Un. Mat. It. X (1931). Diese Autoren beweisen, daß die Reaktionskräfte nur vom Zustande abhängig sind und zeigen einen Weg zur ihren Berechnung durch den Zustand, geben aber keine expliziten Formeln an.

Flächenkurven, die in demselben Punkte eine gemeinsame Richtung haben, und sagt etwas über die Projektion des Krümmung auf die Flächennormale. Unseres Theorem betrifft Bewegungen, die mit den Bindungen verträglich sind, und durch dieselbe Lage mit denselben Geschwindigkeit führen und sagt etwas über die Komponente der Reaktion in der zum virtuellen Raume transversalen Richtung. Man sieht sofort, wie sich die Sätze entsprechen. Um uns bequem ausdrücken zu können, definieren wir:

Zwei Bewegungen berühren sich, wenn sie durch dieselbe Lage (Konfiguration, Punkt) mit denselben Geschwindigkeiten aller Punkte führen.

Wir müssen hier von virtuellem Raume sprechen, da wir den allgemeinen rheonomen Fall betrachten. Wir bezeichnen ein ganz beliebiges System mit $[\mathfrak{A}]$, also wie den ihm entsprechenden Unterraum. Unser Theorem lautet:

(62) *Für alle tangente Bewegungen des Systems $[\mathfrak{A}]$, die mit den Bindungen $[\mathfrak{B}]$ verträglich sind, hat die Reaktionskraft, die für das System $[\mathfrak{A}]$ die Bindungen $[\mathfrak{B}]$ ersetzt, dieselbe Projektion auf die Richtung, die in $\mathfrak{A}$ liegt und zu $\mathfrak{B}$ orthogonal ist.*

Beweis. Die Gleichungen der virtuellen Bewegung des Systems $[\mathfrak{A}]$ lauten:

$$\frac{\delta v}{dt} + W v = S + Q + R,$$

wo R die Reaktion bezeichnet, die der virtuellen Bewegung entspricht. Ander Bezeichnungen brauchen keine Erklärung: einfachheitshalber haben wir die unteren Striche aufgegeben. Wir haben auch die Indizes unterlassen, was wohl keine Mißverständnisse droht. Die Bindungen $[\mathfrak{B}]$ nehmen wir sofort in der kanonischen Gestalt (36):

$$c v = B,$$

wo c den Einheitstensor des Raumes $\mathfrak{C}$, der in $\mathfrak{A}$ zu $\mathfrak{B}$ vollständig orthogonal ist.

Wir erhalten den Satz sofort durch Projektion auf $\mathfrak{C}$, d. h. durch Multiplikation mit c:

$$c\frac{\delta v}{dt} = -cWv + cS + cQ + cR.$$

Wir transformieren nun die linke Seite dieser Gleichung, indem wir zeigen, daß sie ausschließlich von der Lage und der Geschwindigkeit, also vom Zustande abhängt, nicht aber von der Beschleuning $\frac{\delta v}{dt}$. Das ist der springende Punkt:

$$c\frac{\delta v}{dt} = \frac{\delta c v}{dt} - v\frac{\delta c}{dt} = \frac{\delta B}{dt} - v\frac{\delta c}{dt}.$$

Wir haben also für die transversale Komponente der Reaktion:

(63) $$\underset{T}{R} = cR = cWv - v\frac{\delta c}{dt} + \frac{\delta B}{dt} - cS - cQ.$$

Hier ist die rechte Seite eine quadratische Funktion der v^i und der Lage, denn die Ableitungen sind längs der Bewegung genommen, also lineare (im allgemeinen wegen der Rheonomität) nicht homogene Funktionen der v^i, also auch der $\dot{x}^i$. Die rechte Seite hängt also ausschließlich vom Zustande, und nicht von den Beschleunigungen ab, und hat also für alle taugenten Bewegungen, die mit $[\mathfrak{B}]$ verträglich sind, denselben Wert. Setzen wir voraus, daß $[\mathfrak{A}]$ der euklidische Raum, $[\mathfrak{B}]$ eine Fläche in diesem Raume, $Q = 0$ und $t = s$ (Bogenlänge) ist, so wird die Reaktionskraft der Krümmung gleich und wir erhalten den Meusnierschen Satz.

Prinzip der kleinsten Reaktion.

Der wirklichen Bewegung entspricht eine kleinere Reaktion, als jeder anderen möglichen Bewegung.

Das ist die Antwort auf die 4. Frage. Den Beweis erhält man sofort. In der wirklichen Bewegung ist die Reaktion R zum virtuellen Raume normal, deckt sich also mit ihrer transversalen Komponente. In jeder anderen möglichen Bewegung hat die Reaktion nach dem obigen Satze (62) die transversale Komponente R, ist also größer als ihre Projektion $\underset{T}{R}$.

Wir bemerken noch, daß dieser Satz nicht nur für die totale, sondern auch für jede partielle Reaktionskraft einzeln gilt.

31. Wir beantworten die Frage 2. des vorigen §-en.

Bei einer Verstärkung der Bindungen wächst die Reaktion um eine zu ihr orthogonale Komponente.

Beweis. Wir kehren zum System $[\mathfrak{A}]$ zurück und setzen voraus, daß zu den Bindungen $[\mathfrak{B}]$ neue hingezufügt worden sind, so daß der entsprechende rheonome Unterraum zu $[\overline{\mathfrak{B}}]$ zusammengeschrumpft ist. Wir bezeichnen mit $\bar{c}$ den Einheitstensor des Raumes $\overline{\mathfrak{C}}$, der in $\mathfrak{A}$ zum neuen virtuellen Unterraume $\overline{\mathfrak{B}}$ orthogonal ist.

Wir können dann schreiben:

$$c = c + (\bar{c} - c).$$

Die den Bindungen $[\overline{\mathfrak{B}}]$ entsprechende Bewegung ist für die Bindungen $[\mathfrak{B}]$ eine mögliche. Nach dem Fundamentalsatze haben wir, wenn wir die Reaktionskraft in dieser Bewegung mit $\overline{R}$ bezeichnen:

$$\bar R = \bar c \bar R = c \bar R + (\bar c - c)\bar R = \underset{T}{R} + (\bar c - c)\bar R,$$

da doch $\bar R$ in $\mathfrak{C}$ liegt. Aber $\bar c - c$ ist offenbar der Einheitstensor des Unterraumes, der in $\bar{\mathfrak{C}}$ liegt und dort zu $\mathfrak{C}$ transversal ist. Der Vektor $(\bar c - c) R$ liegt in diesem Raume, ist also zu $\mathfrak{C}$ orthogonal, also auch zu R, wie es angesagt wurde.

Skleronome Bindungen. Wir setzen voraus, daß das System [$\mathfrak{B}$] skleronom ist, also nach (56) ist $W = 0$, $B = S = 0$ und $\nabla_t c = 0$. Die Formel für die normale Komponente der Reaktion nimmt eine bemerkenswerte Gestalt an. Wir haben

$$\underset{T}{R^i} = - v^j v^k \nabla_k c^i_j - c^i_k Q^k.$$

Da ∇ Differentiation in $\mathfrak{A}$ bedeutet, so wird

$$- v^j v^k \nabla_k c^i_j = v^j v^k \nabla_k b^i_j = b^k_\alpha b^j_\beta \nabla_k b^i_j v^\alpha v^\beta = H^{\;\;i}_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta$$

da v^i offenbar in $\mathfrak{B}$ liegt. Wir erhalten endlich:

(64) $$\underset{T}{R^i} = H_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\, i} v^\alpha v^\beta - \underset{T}{Q^i},$$

wo wir mit $\underset{T}{Q^i}$ die transversale Komponente der verallgemeinerten Kraft bezeichnet haben. Die Formel (64) ist eine Verallgemeinerung der bekannten inneren Bewegungsgleichungen auf einer Fläche:

$$\frac{m v^2}{\varrho_n} = F_n + R_n.$$

Zusammensetzung der Reaktionen. Wir kehren zum Problem 2. des § 30, und formulieren es wie folgt: Wir betrachten die Systeme [$\mathfrak{B}_a$], $a = 1, \ldots, k$, die aus [$\mathfrak{A}$] durch neue Bindungen entstehen und bezeichnen mit R^i_a die Reaktionskraft, die für dieses System diese Bindungen für einen bestimmten Zustand ersetzt. Wie erhält man dann die Reaktion, die für denselben Zustand alle diese Bindungen gleichzeitig ersetzt? Wir setzen dabei natürlich die Unabhängigkeit der Bindungen voraus.

Wir bezeichnen mit [$\mathfrak{B}$] das System, das nach gleichzeitiger Einführung aller Bindungen entsteht, durch $\mathfrak{C}$ den in $\mathfrak{A}$ zu seinem virtuellen Unterraume transversalen Raum, durch $\mathfrak{C}_a$ den zu $\mathfrak{B}_a$ transversalen Raum. Da $\mathfrak{B}$ der gemeinsame Durchschnitt aller $\mathfrak{B}_a$ ist, so wird $\mathfrak{C}$ reziprok die (niedrigste) Vereinigung aller $\mathfrak{C}_a$. Also:

(65) *Die resultierende Reaktion liegt in dem niedrigsten Raume, der alle Transversalräume zu den partiellen virtuellen Räumen enthält.*

Die Bewegung des Systems [$\mathfrak{B}$] wird jedenfalls eine mögliche Bewegung des Systems [$\mathfrak{B}_a$]. Wir bezeichnen mit R die resultierende Reaktion und haben dann nach dem Fundamentalsatze (62):

$$\underset{a}{c^i_k} R^k = R^i_a,$$

woraus der Satz:

(66) *Die Projektion der resultierenden Reaktionskraft auf den zu einem partiellen virtuellen Raume orthogonalen Raum ist gleich der entsprechenden partiellen Reaktionskraft.*

Wir behaupten, daß die Sätze (65) und (66) die Reaktion vollständig bestimmen. In der Tat, es kann nicht zwei Vektoren in $\mathfrak{C}$ geben, die dieselben Projektionen auf $\mathfrak{C}_a$ haben (wie das der Satz (65) verlangt), denn ihre Differenz wäre ein Vektor in $\mathfrak{C}$, der auf jeden $\mathfrak{C}_a$ eine Projektion Null hätte, also auf ihm senkrecht stünde. Aber so ein Vektor existiert nicht, denn jeder Vektor aus $\mathfrak{C}$ ist eine lineare Kombinationen gewisser Vektoren aus $\mathfrak{C}_a$, kann also nicht zu allen $\mathfrak{C}_a$ gleichzeitig orthogonal sein.

Der Sinn der bewiesenen Sätzen ist eigentlich der folgende:

Die resultierende Reaktion hängt nicht unmittelbar vom Zustande, sondern ist durch die partiellen Reaktionen und rein geometrische Data vollständig bestimmt.

Diese Folgerung ist keineswegs evident, denn die partiellen Reaktionen bestimmen durchaus nicht den Zustand, dem sie entsprechen.

Wir kommen zu mehr bestimmten Ergebnissen, wenn die Dimension jedes $\mathfrak{B}_a$ nur um 1 von der Dimension von $\mathfrak{A}$ kleiner ist. Dann werden die normalen Räume einfach Gerade. Auf jeder dieser Geraden liegt nach (66) der Vektor R^i_a $(a = 1, \ldots, k)$ und die resultierende Reaktion ist ein Vektor, der in dem durch die R^i_a aufgespannten Raume liegt, und auf die Richtung jedes dieser Vektoren eine seiner Länge gleiche Projektion hat. Man kann die resultierende Reaktion als eine *orthogonale Summe der partiellen Reaktionen* bezeichnen.

Streszczenie.

Praca niniejsza zawiera podstawy dwóch teoryj: Jedną z nich jest geometrja reonomiczna, *gemetrja odkształcających się przestrzeni riemannowskich*, a więc taka, jakąby sobie mogli zbudować ewentualni mieszkańcy takiej przestrzeni. Druga — to *budowana w języku geometrji wielowymiarowej mechanika układów reonomicznych* (t. j. we więzach zależnych od czasu), przyczem rozważamy odrazu najogólniejszy przypadek układów zarazem nieholonomicznych. Teorji układów reonomicznych właściwie dotąd niema, bo poprawna taka teorja

powinna operować wielkościami niezależnemi od przypadkowego doboru dopuszczalnych parametrów. Spostrzeżenie to prowadzi do wniosku, że *mechanika układów reonomicznych powinna być teorją niezmienników przekształceń*

$$(*) \qquad x^i = x^i(x^I, t),$$

podczas gdy geometrja jest teorją niezmienników przekształceń tylko punktowych:

$$x^i = x^i(x^I).$$

Z takiego postawienia sprawy wynika, że *geometrja reonomiczna i mechanika „bezwzględna"* — jak ją nazywamy przez analogję do „rachunku różniczkowego bezwzględnego" — *są formalnie identyczne z teorją niezmienników grupy* (*) *i pewnej niejednorodnej kwadratowej formy różniczkowej*, a więc z pewnym uogólnionym *„mocnym" rachunkiem tensorów* Ponieważ pragniemy objąć również układy nieholonomiczne, więc rozszerzamy naszą grupę do wszystkich przekształceń

$$dx^i = a^i_I\,dx^I + \omega^i\,dt,$$

co jeszcze wzmacnia nasz rachunek tensorów.

Niezmienniki uzyskane nazywamy *wielkościami mechanicznemi bezwzględnemi* i one to przedstawiają poprawne, właściwe i adekwatne terminy do rozstrzygnięcia takich zagadnień, jak kryterja sklero-, holonomiczności, istnienia całki energji. One to pozwalają uzyskać łatwo *ogólne, bezwzględne równania ruchu dla układów reonieholonomicznych*:

$$\frac{\delta v}{dt} + Wv = S + Q,$$

znacznie prostsze od spotykanych dotąd w literaturze, bo wypisane w terminach istotnych.

Zaczynamy od zbudowania podstawowych wielkości geometrji reonomicznej, które między innemi stosujemy do uzyskania warunków izometrji (wyginania bez rozciągania) dla rodziny powierzchni. Uogólniamy pojęcia geometrji riemannowskiej na przestrzenie reonomiczne, potem przechodzimy do interpretacji mechanicznej tych wielkości, a więc do *wielowymiarowego ujęcia mechaniki.* Podajemy kryterja skleronomiczności układu, holonomiczności, równania ruchu w terminach bezwzględnych, *adekwatną klasyfikację układów mechanicznych, uogólnienie równań wewnętrznych ruchu na układy dowolne*, równania warjacyjne i kończymy *teorją reakcyj dla dowolnych układów*, rozwiązując dzięki interpretacji wielowymiarowej bardzo prosto szereg zadań, poruszanych ostatnio przez kilku autorów.

Sur le produit $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\sum\frac{\alpha_n}{n^s}$

(O iloczynie $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\sum\frac{\alpha_n}{n^s}$)

par

S. Mandelbrojt

Le but de ce travail est de donner une relation de la forme

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta_\varphi(s) = F(s) + \int_0^\infty P(t)\,e^{-\frac{(s-1)\,t}{2}}\,dt,$$

où $\zeta_\varphi(s) = \sum\frac{\varphi(n)}{n^s}$, $F(s)$ est une fonction entière et où $P(t)$ s'exprime au moyen des α_n; $\Sigma\,\alpha_n m^{2n} = \varphi(m)$.

N° 1. Soit $\varphi(u) = \sum_1^\infty \alpha_n u^{2n}$ une fonction entière telle que

$$(1) \qquad |\varphi(u)| < e^{2\vartheta\pi|u|} \quad \text{où} \quad 0 < \vartheta < 1.$$

On a, dans ces conditions:

$$(2) \qquad \Sigma\,|\alpha_n u^{2n}| < e^{c|u|}$$

où c est une constante positive, et la série

$$(3) \qquad \sum\frac{|\alpha_n|\,(2n)!}{(2\pi)^{2n}} = C_1$$

converge.

Ou sait d'aprés une formule bien connue que pour $y > 0$ et ν réel

$$(4) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi y u^2 + 2\pi\nu u i}\,du = \frac{1}{\sqrt{y}}\,e^{-\frac{\pi\nu^2}{y}}.$$