Résumé.

Je traite dans se travail des questions assez variées cencernant les afineurs antisymétriques et les invariants intégraux, en se servant des méthodes du Calcul tensoriel. Dans la première partie j'établis d'abord une correspondance entre les afineurs antisymétriques et les densités afinorielles de poids ± 1 et j'introduis un nouvel opérateur différentiel, analogue à l'opérateur Xf et déduit d'une densité vectorielle. La suite est consacrée aux propriétés du prolongement d'une transformation infinitésimale aux composantes des afineurs et des densités afinorielles; j'indique ici, entre autres, une classification des afineurs relative à une transformation infinitésimale. Je donne ensuite les plus simples applications des considérations précédentes à la théorie des invariants intégraux. La fin de cette partie contient quelques théorèmes relatifs aux invariants intégraux du système de Liouville.

La seconde partie du travail est consacrée à la théorie des invariants intégraux du système de Hamilton. Je généralise ici plusieurs théorèmes dus à Poisson, Poincaré, Cartan, De Donder, et Schuntner. Une partie des résultats donnés dans ce travail à été présentée à l'Académie R. de Belgique le 6 Juin 1931.

La dernière partie à pour objet les invariants intégraux du système auquel M. De Donder à donné le nom d'équations généralisées de Hamilton. Je montre ici, entre autres, une liaison étroite entre la théorie de ce système et la théorie des groupes de fonctions de Lie.

Gewöhnliche Differentialgleichungen der allgemeinen Analysis [1]

(Równania różniczkowe zwyczajne w Analizie ogólnej)

von

M. Kerner

I. Einleitung.

1. Der Gegenstand der Arbeit. Die allgemeine Analysis beschäftigt sich mit Operationen, die einem Elemente eines abstrakten Raumes ein Element eines anderen oder auch desselben Raumes zuordnen. Ist der Raum linear und normiert, so kann man für diese Operationen den Begriff des Differentials bilden [2]. Doch ist es im allgemeinen unmöglich auch den Begriff der Ableitung auf abstrakte Operationen zu übertragen.

Ein wichtiger spezieller Fall eignet sich gut zur Einführung des Begriffs der Ableitung. Das ist der Fall der Operationen, die einer reellen Zahl ein Element eines abstrakten, linearen und normierten Raumes zuordnen. Solche Operationen werden wir *abstrakte Funktionen* nennen. Für diese hat Herr Fréchet [3]) eine Definition der Ableitung eingeführt, die wir im folgenden Paragraphen anbringen werden. Sie ist eine Verallgemeinerung der in der Hilbertschen Geometrie gebräuchlichen [4]).

Besitzt man den Begriff der Ableitung, so kann mann auch den der gewöhnlichen Differentialgleichungen auf die allgemeine Analysis übertragen.

---

[1]) Die vorliegende Arbeit ist eine Entwicklung des Vortrags, der in Wilno (Polen) den 26 September 1931 auf dem Zweiten Konreß der Polnischen Mathematiker gehalten wurde.

[2]) Fréchet, Annales de l'École Normale Supérieure (3) **42** (1925) S. 293—323.

[3]) Loc. cit. S. 312. Vgl. auch Kerner, Annali di Matematica (4) **10** (1232) S. 147.

[4]) Vgl. z. B. Vitali, Geometria nello spazio hilbertiano, Bologna (1929) S. 77.

Wir werden kurz diese Verallgemeinerung *abstrakte Differentialgleichungen* nennen, weil es sich um Elemente eines abstrakten Raumes handelt. Die Ableitung einen unbekannten abstrakten Funktion ist in diesen Gleichungen mittels eines Operation durch die Funktion selbst und (was in den Anwendungen weniger wichtig ist) durch die unabhängige Veränderliche ausgedrückt. Auch abstrakte Parameter können in diesen Gleichungen auftreten. Auf solch eine Gleichung bin ich gestossen, indem ich die Extremalen eines Variationsproblems im Hilbertschen Raume und insbesondere die geodätischen Linien eines krummen Raumes von unendlich vielen Dimensionen untersucht habe [5]. Die abstrakte Differentialgleichungen umfassen die Systeme von endlich oder unendlich vielen gewöhnlichen Differentialgleichungen, auch die partiellen Differentialgleichungen und Integro-Differentialgleichungen als Sonderfälle.

Der letzte Abschnitt der vorliegenden Arbeit ist dem Existenzbeweise für die abstrakten Differentialgleichungen gewidmet. Für diesen Beweis, der nach der Methode der sukzessiven Approximationen vollführt wird, ist der Begriff des Integrals einer abstrakten Funktion unentbehrlich. Dieser ist von Herrn Graves [6] gebildet und untersucht worden. Da wir aber einige bei Herrn Graves nicht enthaltenen Eigenschaften der Integrale brauchen, so war es für uns bequemer die Integraltheorie kurz von neu zu entwickeln. Das ist der Gegenstand des zweiten Abschnittes, der auch die Taylorschen Formeln für abstrakte Funktionen enthält. Der Raum wird dabei nicht nur als *linear* und *normiert*, sondern auch als *vollständig* also *Banachisch* vorausgesetzt [7].

Im dritten Abschnitte bilde ich zwei Verallgemeinerung der Taylorschen Formel für beliebige Operationen, die sich von der Verallgemeinerung von Herrn Graves [6] ein wenig untescheiden, und die in dieser Arbeit nur als ein Nebenziel angesehen werden sollen. Als eine spezielle Anwendung zeigen wir, daß für allgemeine Operationen aus dem Vorhandensein des Differentials das Bestehen der Lipschitzschen Bedingung folgt [8].

2. Vorbemerkungen. Im folgenden bezeichnen wir mit großen Buchstaben die Elemente (die Punkte) eines oder mehrerer *Banachschen*, das heißt *linearen*, *normierten* und *vollständigen* Räume [7].

Sei $F(u)$ eine abstrakte Funktion, die jeder reellen Zahl u eines abgeschlossenen Intervalls (a, b) ein Element P zuordnet. Gibt es ein Element Q derart, daß

$$\left\| \frac{F(u+h)-F(u)}{h} - Q \right\|$$

[5]) Annali di matematica (4) **10** (1932) S. 183—202.
[6]) Transactions of the American Mathematical Society **29** (1927) S. 163—177.
[7]) Vgl. z. B. Banach, Fundamenta Mathematicae **3** (1922) S. 134—136.
[8]) Vgl. auch Kerner, Studia Mathematica **3** (1931) S. 162—166.

mit $|h|$ gegen Null strebt, so heißt Q die *Ableitung von* $F(u)$ *nach* u [8]). Man schreibt

$$Q = F'(u) = \frac{dF(u)}{du}.$$

Für diese Ableitungen gelten dieselben formalen Regeln, wie für gewöhnliche Funktionen. Ist insbesondere $f(u)$ eine gewöhnliche und $F(u)$ eine abstrakte differenzierbare Funktion, so ist auch $f(u)\cdot F(u)$ differenzierbar und

$$[f(u)\cdot F(u)]' = f(u)\cdot F'(u) + f'(u)\cdot F(u). \tag{1}$$

Ist $F(P)$ eine beliebige Operation, so bezeichnen wir mit

$$dF(P;X)$$

das *Differential von* $F(P)$ *nach* P [8]); X ist dabei der Zuwachs der unabhängigen Veränderlichen P [9]). Dementsprechend bezeichnen wir mit

$$d^n F(P;X_1;\ X_2;\dots X_n)$$

das n-te Differential von $F(P)$; die Zuwächse $X_1, X_2, \dots X_n$ können im allgemeinen verschieden sein [8]).

Ist $F(P)$ eine beliebige Operation und $P(u)$ eine abstrakte Funktion, so ist auch $F[P(u)]$ eine abstrakte Funktion. Besitzt $F(P)$ für $P = P(u)$ ein Differential und $P(u)$ für u eine Ableitung, so kann man beweisen [10]), daß auch $F[P(u)]$ eine Ableitung hat, und daß

$$\frac{dF[P(u)]}{du} = dF[P(u); P'(u)].$$

Ist insbesondere $P(u) = A + Bu$ linear, und besitzt $F(P)$ für $P = A + Bu$ das n-te Differential, so hat $F[A + Bu]$ die n-te Ableitung, und es gilt die Formel

$$\frac{d^n F[A+Bu]}{du} = d^n F[A + Bu; B; B; \dots B]. \tag{2}$$

II. Integrale der abstrakten Funktionen.

3. Definition des Integrals. Sei $F(u)$ eine im Intervall (a,b) erklärte abstrakte Funktion.

Mit Π bezeichnen wir eine beliebige Zerlegung des Intervals (a, b) in Teilintervalle $(a, u_1) = (u_0, u_1)$, (u_1, u_2), (u_2, u_3), $\dots (u_{n-1}, u_n) = (u_{n-1}, b)$, wobei in je-

[9]) Was die Schreibweise betrifft, vgl. Kerner, loc. cit. unter [8]), S. 163.
[10]) Der Beweis stimmt mit dem vom Verfasser, loc. cit. unter [8]), S. 147, gegebenen überein.

dem Intervalle (u_{k-1}, u_k) eine ihm angehörende Zahl v_k festgelegt wird. Es ist

$$a = u_0 \leqslant v_1 \leqslant u_1 \leqslant v_2 \leqslant u_2 \leqslant \ldots \leqslant u_{n-1} \leqslant v_n \leqslant u_n = b.$$

Dabei sind alle u_k verschieden. Zwei Zerlegungen sollen als verschieden betrachtet werden. wenn sie sich untereinander nur mit v_k, nicht aber mit u_k unterscheiden. Die obere Schranke δ der Teilintervallen werden wir Feinheit der Zerlegung nennen. Jedem π soll ein Element entsprechen

$$\Sigma = \sum_{k=1}^{n} (u_k - u_{k-1}) F(v_k).$$

Wird es sich um mehrere Zerlegungen $\pi, \pi', \pi_1 \ldots$ handeln, so werden die entsprechenden Feinheiten mit $\delta, \delta', \delta_1 \ldots$ und Summen mit $\Sigma, \Sigma', \Sigma_1 \ldots$ bezeichnet werden.

Definition. *Ist für jede Folge der Zerlegungen π_n, für die die Folge der Feinheiten δ_n gegen Null strebt, die Folge der Summen Σ_n konvergent, so heißt die Funktion $F(u)$ in (a, b) intergrierbar. Die Grenze von Σ_n heißt dann das bestimmte (Riemannsche) Integral der abstrakten Funktion $F(u)$ und wird mit*

$$\int_a^b F(u)\, du$$

bezeichnet. Ist $b < a$, so bezeichnet man

$$\int_a^b F(u)\, du = -\int_b^a F(u)\, du.$$

Die Definition ist eindeutig. Wären die Grenzen von zwei Σ-Folgen verschieden, so könnte man leicht divergente Σ-Folgen bilden.

Es lassen sich, wie gewöhnlich, die Sätze über die Additivität in bezug auf die Intervalle, wie auch über Integrierung der Summe und des Produktes mit einem konstanten Faktor beweisen.

4. Abschätzungen des Integrals. Sei $a < b$, und sei $f(u)$ eine gewöhnliche nicht-negative, $F(u)$ eine abstrakte Funktion in (a, b). Sei weiter $f(u) \cdot F(u)$ und $f(u) \cdot \|F(u)\|$ in (a, b) integrierbar. Bilden wir für $f(u) \cdot F(u)$ *eine Summe*

$$\Sigma = \sum_{k=1}^{n} (u_k - u_{k-1}) f(v_k) F(v_k),$$

so gilt

(3) $$\|\Sigma\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} (u_k - u_{k-1}) f(v_k) \cdot \|F(v_k)\|.$$

Die rechte Seite entspricht derselben Zerlegung für die gewöhnliche Funktion $f(u) \cdot \|F(u)\|$. Geht man zur Grenze über, indem die Feinheiten der Zerlegungen gegen Null streben, so wird

$$\left\| \int_a^b f(u)\, F(u)\, du \right\| \leqslant \int_a^b f(u) \cdot \|F(u)\|\, du.$$

Will man auch den Fall, wo $b < a$ oder $f(u)$ nicht-positif ist, umfassen, so bildet man den

Satz 1. *Wechselt $f(u)$ in (a, b) bzw. (b, a) sein Zeichen nicht, ist $f(u)\, F(u)$ und $f(u) \cdot \|F(u)\|$ in (a, b) bzw. (b, a) integrierbar, so gilt die Beziehung*

(4) $$\left\| \int_a^b f(u)\, F(u)\, du \right\| \leqslant \left| \int_a^b f(u) \cdot \|F(u)\|\, du \right|.$$

Ist $a < b$, und ist $f(u)$ nicht-negativ, $f(u)\, F(u)$ und $f(u)$ in (a, b) integrierbar, endlich $F(u)$ beschränkt, so ist nach (3)

$$\|\Sigma\| \leqslant m \cdot \sum_{k=1}^{n} (u_k - u_{k-1}) f(v_k),$$

wo

$$\|F(u)\| \leqslant m.$$

Daraus folgt

$$\left\| \int_a^b f(u)\, F(u)\, du \right\| \leqslant m \,.\, \int_a^b f(u)\, du.$$

Allgemeiner, gilt der

Satz 2. *Wechselt $f(u)$ in (a, b) bzw. (b, a) sein Zeichen nicht, ist $f(u)\, F(u)$ und $f(u)$ in (a, b) bzw. (b, a) integrierbar, ist $F(u)$ beschränkt*

(5) $$\|F(u)\| \leqslant m,$$

so gilt die Beziehung

$$\left\| \int_a^b f(u)\, F(u)\, du \right\| \leqslant m \cdot \left| \int_a^b f(u)\, du \right|.$$

Insbesondere für $f(u) = 1$ ist unter der Voraussetzung (5)

(6) $$\left\| \int_a^b F(u)\, du \right\| \leqslant m \cdot |b - a|.$$

5. Mittelwertsatz. Sei $a < b$, und sei $f(u)$ nicht-negativ, $f(u)\,F(u)$ und $f(u)$ in (a, b) integrierbar. Sei $\mathfrak{M}$ eine beliebige abgeschlossene konvexe Menge, die das Bild des Intervalls (a, b) mittels der Funktion $F(u)$ enthält. Für beliebige Zerlegung Π gehört das Element

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} (u_k - u_{k-1})\, f(v_k)\, F(v_k)}{\sum\limits_{k=1}^{n} (u_k - u_{k-1})\, f(v_k)}$$

der Menge $\mathfrak{M}$ an. Geht man zur Grenze über, so strebt dieses Element gegen

$$P = \frac{\int\limits_a^b f(u)\, F(u)\, du}{\int\limits_a^b f(u)\, du}.$$

Da $\mathfrak{M}$ abgeschlossen ist, gehört auch P der Menge $\mathfrak{M}$ an.

Etwa allgemeiner, gilt der

Satz 3. *Wechselt $f(u)$ in (a, b) bzw. (b, a) sein Zeichen nicht, ist $f(u)\,F(u)$ und $f(u)$ in (a, b) bzw. (b, a) integrierbar, ist $\mathfrak{M}$ eine beliebige (z. B. die kleinste) abgeschlossene konvexe Menge, die das Bild von (a, b) bzw. (b, a) mittels der Funktion $F(u)$ enthält, so gibt es in $\mathfrak{M}$ ein Element P derart, daß*

$$\int\limits_a^b f(u)\, F(u)\, du = P \cdot \int\limits_a^b f(u)\, du.$$

Insbesondere gibt es in $\mathfrak{M}$ ein P, für das

$$\int\limits_a^b F(u)\, du = P(b - a).$$

6. Folgen der Integrale. Für die Integrale abstrakter Funktionen, wie für die gewöhnlichen, gilt der

Satz 4. *Konvergiert die Folge der integrierbaren abstrakten Funktionen $F_n(u)$ in (a, b), bzw. (b, a) gegen $F(u)$ gleichmäßig, so ist auch $F(u)$ integrierbar, und*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b F_n(u)\, du = \int\limits_a^b F(u)\, du. \tag{7}$$

Beweis. Es genügt sich zum Falle $a < b$ zu beschränken. Sei ε eine beliebige positive Zahl. Da $F_n(u)$ gegen $F(u)$ gleichmäßig strebt, so kann man ein n_0 wählen derart, daß für $n \geqslant n_0$

$$\|F_n(u) - F(u)\| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}.$$

Ist Π eine beliebige Zerlegung, so folgt daraus für $n \geqslant n_0$

$$\begin{aligned} &\left\| \sum_{k=1}^{p} (u_k - u_{k-1})\, F_n(v_k) - \sum_{k=1}^{p} (u_k - u_{k-1})\, F(v_k) \right\| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{p} (u_k - u_{k-1}) \cdot \|F_n(v_k) - F(v_k)\| < \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned} \tag{8}$$

Sei Π_m eine willkürliche Folge der Zerlegungen

$$a = u_0^{(m)} \leqslant v_1^{(m)} \leqslant u_1^{(m)} \leqslant v_2^{(m)} \leqslant u_2^{(m)} \leqslant \ldots \leqslant u_{p_m-1}^{(m)} \leqslant v_{p_m}^{(m)} \leqslant u_{p_m}^{(m)} = b,$$

für die die Feinheit δ_m gegen Null strebt. Die Folge

$$\Sigma_m = \sum_{k=1}^{p_m} (u_k^{(m)} - u_{k-1}^{(m)})\, F_{n_0}(v_k^{(m)})$$

ist nach Voraussetzung des Satzes gegen $\int\limits_a^b F_{n_0}(u)\, du$ konvergent. Sei m_0 eine Zahl derart, daß für $m > m_0$ und $l > m_0$

$$\|\Sigma_m - \Sigma_l\| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{9}$$

Macht man in (8) $n = n_0$, so folgt für $\Pi = \Pi_m$ und $\Pi = \Pi_l$

$$\left\|\Sigma_m - \sum_{k=1}^{p_l} (u_k^{(m)} - u_{k-1}^{(m)})\, F(v_k^{(m)})\right\| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{10}$$

$$\left\|\Sigma_l - \sum_{k=1}^{p_m} (u_k^{(l)} - u_{k-1}^{(l)})\, F(v_k^{(l)})\right\| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{11}$$

Aus (9), (10) und (11) folgt für $m > m_0$ und $l > m_0$

$$\left\| \sum_{k=1}^{p_m} (u_k^{(m)} - u_{k-1}^{(m)})\, F(v_k^{(m)}) - \sum_{k=1}^{p_l} (u_k^{(l)} - u_{k-1}^{(l)})\, F(v_k^{(l)}) \right\| < \varepsilon.$$

Da der Raum vollständig ist, so schließt man daraus, daß die Folge

$$\sum_{k=1}^{p_m} (u_k^{(m)} - u_{k-1}^{(m)})\, F(v_k^{(m)})$$

konvergent ist. Dies findet statt für jede Folge Π_m, für die δ_m gegen Null strebt. Also ist $F(u)$ integrierbar.

Aus (8) folgt, indem man zur Grenze für $\delta \to 0$ übergeht, daß für $n \geqq n_0$

$$\left\| \int_a^b F_n(u)\, du - \int_a^b F(u)\, du \right\| < \frac{\varepsilon}{3},$$

woraus (7) folgt.

7. Stetige Funktionen. Von jetzt ab wenden wir uns zur Betrachtung stetiger abstrakter Funktionen zu.

Ist $F(u)$ eine stetige Funktion in einem abgeschlossenen Intervalle (a, b), so kann man, wie üblich, beweisen, daß sie gleichmäßig stetig und beschränkt ist.

Hilfssatz. *Ist Π eine Zerlegung derart, daß für zwei Werte u' und u'' eines Teilintervalls der Zerlegung*

$$\|F(u'') - F(u')\| < \eta,$$

ist weiter Π' eine Zerlegung, die von Π durch Hinzufügung neuer Teilungspunkte entsteht, so ist

(12) $$\|\Sigma' - \Sigma\| < \eta\,(b-a).$$

Beweis. Geht man von Σ' zu Σ über, so soll man in jedem Bestandteil von Σ' den Wert v_k durch einen anderen ersetzen, der demselben Teilenintervall von Π angehört. Nach der Voraussetzung des Hilfssatzes überschreitet nicht die Norm der Abänderung des Bestandteils das Produkt von der Länge des Teilsintervalls von Π' und η. Daraus folgt für die ganze Summe die Beziehung (12).

Satz 5. *Eine stetige abstrakte Funktion $F(u)$ im Intervalle (a, b) ist integrierbar.*

Beweis. Sei Π_n eine willkürliche Folge der Zerlegungen, für die δ_n gegen Null strebt. Sei ε eine positive Zahl. Da $F(u)$ gleichmäßig stetig ist, kann man ein solches positives σ wählen, daß für $|u'' - u'| < \sigma$ die Ungleichung

$$\|F(u'') - F(u')\| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

gilt. Sei n_0 eine Zahl derart, daß für $n > n_0$ die Feinheit $\delta_n < \delta$. Ist $m > n_0$

und $n > n_0$, so ist für zwei Werte u' und u'' eines Teilintervalls von Π_m oder Π_n

$$\|F(u'') - F(u')\| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Bilden wir die Zerlegung Π', die durch Aufeinandersetzung von Π_m und Π_n entsteht (v_k können in Π' willkürlich gewählt werden), so ist sie zu Π_m und Π_n in demselben Verhältnis, wie Π' zu Π im Hilfssatze. Dabei ist $\eta = \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$ zu setzen. Es folgt daraus

$$\|\Sigma_m - \Sigma'\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\|\Sigma_n - \Sigma'\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Also ist für $m > n_0$ und $n > n_0$

$$\|\Sigma_n - \Sigma_m\| < \varepsilon.$$

Da der Raum vollständig ist, so ist die Folge Σ_n konvergent. Da uber Π_n willkürlich war, so ist $F(u)$ integrierbar.

8. Primitive Funktionen. Die abstrakte Funktion

(13) $$\Phi(x) = \int_a^x F(u)\, du$$

(wenn sie existiert) nennen wir das *unbestimmte Integral von* $F(u)$.

Satz 6. *Ist $F(x)$ für ein x stetig, so ist*

(14) $$\frac{d\,\Phi(x)}{dx} = F(x).$$

Beweis. Für hinreichend kleines h gelten die Beziehungen

$$\Phi(x+h) - \Phi(x) = \int_x^{x+h} F(u)\, du,$$

$$F(x) \cdot h = \int_x^{x+h} F(x)\, du.$$

Daraus

$$\Phi(x+h) - \Phi(x) - F(x) \cdot h = \int_x^{x+h} [F(u) - F(x)]\, du.$$

Bezeichnet m das Maximum von $\|F(u)-F(x)\|$ für $x \leqslant u \leqslant x+h$ bzw. $x+h \leqslant u \leqslant x$, so folgt aus dem Satze 2, Formel (6)

$$\|\Phi(x+h)-\Phi(x)-F(x)\cdot h\| \leqslant m \cdot |h|,$$

$$\left\|\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}-F(x)\right\| \leqslant m.$$

Da $F(x)$ für x stetig ist, so strebt m mit h gegen Null. Daraus folgt, daß $F(x)$ wirklich die Ableitung von $\Phi(x)$ ist.

Satz 7. *Ist* $\Phi(a)=0$ *und* $\dfrac{d\,\Phi(x)}{dx}=0$ *für* $a \leqslant x \leqslant b$, *so ist auch* $\Phi(x)=0$ *für* $a \leqslant x \leqslant b$ [11]).

Beweis. Man schließt, wie folgt:

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}\right\|=0,$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|\Phi(x+h)\|-\|\Phi(x)\|}{h}=0,$$

$$\frac{d\,\|\Phi(x)\|}{dx}=0,$$

und da $\|\Phi(a)\|=0$, so gilt für jedes x die Gleichheit $\|\Phi(x)\|=0$ und $\Phi(x)=0$.

Satz 8. *Das unbestimmte Integral* (13) *ist eine einzige Lösung der Differentialgleichung* (14), *die für* $x=a$ *verschwindet.*

Beweis. Gäbe es noch eine andere Funktion $\Phi_1(x)$, für die

$$\Phi_1(a)=0,$$

$$\frac{d\,\Phi_1(x)}{dx}=F(x),$$

so könnte man schließen

$$\Phi_1(a)-\Phi(a)=0,$$

$$\frac{d[\Phi_1(x)-\Phi(x)]}{dx}=0,$$

woraus nach dem Satze 8 die Beziehung folgt:

$$\Phi_1(x)-\Phi(x)=0.$$

Der Satz 6 lehrt über die Existenz einer primitiven Funktion einer gegebenen stetigen abstrakten Funktion. Der Satz 8 lehrt über ihre Eindeutigkeit, wenn man von einem additiven konstanten Element abstrahiert.

[11]) Vgl. Fréchet, loc. cit. S. 313.

9. Die Sätze über endliche Zuwächse. Aus den Sätzen 2 und 8 folgt unmittelbar der

Satz 9. *Besitzt* $F(u)$ *im Intervalle* (a,b) *bzw.* (b,a) *eine stetige Ableitung* $F'(u)$, *und ist* $\|F'(u)\| \leqslant m$, *so gilt die Beziehung*

$$\|F(b)-F(a)\| \leqslant m\,|b-a|.$$

Ähnlich folgt aus den Sätzen 3 und 8 der

Satz 10. *Besitzt* $F(u)$ *im Intervalle* (a,b) *bzw.* (b,a) *eine stetige Ableitung* $F'(u)$, *und ist* $\mathfrak{M}$ *eine abgeschlossene konvexe Menge, die das Bild des Intervalls* (a,b) *bzw.* (b,a) *mittels der Funktion* $F'(u)$ *enthält, so gibt es in* $\mathfrak{M}$ *ein Element* P *derart, daß*

$$F(b)-F(a)=P(b-a).$$

10. Partielle Integration und Taylorsche Sätze. Aus der Formel 1 folgt unmittelbar der

Satz 11. *Besitzen die gewöhnliche Funktion* $f(u)$ *und die abstrakte* $F(u)$ *in* (a,b) *bzw.* (b,a) *stetige Ableitungen* $f'(u)$ *und* $F'(u)$, *so gilt die Formel*

$$\int_a^b f(u)\,F'(u)\,du+\int_a^b f'(u)\,F(u)\,du=f(b)\,F(b)-f(a)\,F(a). \tag{15}$$

Dieser Satz kann in zweifacher Weise zur partiellen Integration benutzt werden.

Setzt man in (15) $f(u)$ gleich $\dfrac{(b-u)^{n-1}}{(n-1)!}$ und $F(u)$ gleich $F^{(n-1)}(u)$, wo $F(u)$ eine abstrakte Funktion ist, die eine stetige n-te Ableitung $F^{(n)}(u)$ besitzt, so bekommt man

$$\int_a^b \frac{(b-u)^{n-1}}{(n-1)!}F^{(n)}(u)\,du=-\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}F^{(n-1)}(a)+\int_a^b\frac{(b-u)^{n-2}}{(n-2)!}F^{(n-1)}(u)\,du.$$

Setzt man in der Formel (15) $f(u)$ gleich $\dfrac{(b-u)^{n-2}}{(n-2)!}$ und $F(u)$ gleich $F^{(n-2)}(u)$, so bekommt man eine analoge Umformung des letzten Integrals. Setzt man dieses Verfahren fort, so gelangt man zum

Satz 12. *Besitzt* $F(u)$ *in* (a,b) *bzw.* (b,a) *eine stetige* n*-te Ableitung, so gilt die Formel*

$$F(b)=F(a)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(b-a)^k}{k!}F^{(k)}(a)+\int_a^b\frac{(b-u)^{n-1}}{(n-1)!}F^{(n)}(u)\,du. \tag{16}$$

Wendet man auf das letzte Integral von (16) zuerst den Satz 2 und dann den Satz 3, so bekommt man zwei Sätze, die als Verallgemeinerungen des Taylorschen betrachtet werden sollen:

Satz 13. *Besitzt $F(u)$ in (a,b) bzw. (b,a) eine stetige n-te Ableitung $F^{(n)}(u)$, und ist $\|F^{(n)}(u)\| \leqslant m$, so gilt die Formel*

$$\|F(b)-F(a)-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(b-a)^k}{k!}F^{(k)}(a)\| \leqslant m\cdot\frac{|b-a|^n}{n!}.$$

Satz 14. *Besitzt $F(u)$ in (a,b) bzw. (b,a) eine stetige n-te Ableitung $F^{(n)}(u)$, und ist $\mathfrak{M}$ eine abgeschlossene konvexe Menge, die das Bild des Intervalls (a,b) bzw. (b,a) mittels der Funktion $F^{(n)}(u)$ enthält, so gibt es in $\mathfrak{M}$ ein Element P derart, daß*

$$F(b)=F(a)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(b-a)^k}{k!}F^{(k)}(a)+P\cdot\frac{(b-a)^n}{n!}.$$

Die Sätze 13 und 14 enthalten die Sätze 9 und 10 als Sonderfälle, die der Annahme $n=1$ entsprechen.

III. Beliebige Operationen.

11. Taylorsche Sätze für beliebige Operationen. Sei $F(P)$ eine Operation, die den Elementen eines Banachschen Raumes, den wir als P-Raum bezeichnen, die Elemente eines anderen, den wir als Q-Raum bezeichnen, zuordnet.

Seien P_0 und P_0+X zwei Elemente des P-Raumes. Die Elemente $P=P_0+uX$ für $0\leqslant u\leqslant 1$ bilden eine gerade Strecke, die P und $P+X$ verbindet. Wir setzen voraus, daß längs dieser Strecke $F(P)$ ein n-tes Differential $d^nF(P;X_1;X_2;\dots X_n)$ besitzt, das stetig in bezug auf P bleibt.

Die abstrakte Funktion

$$\Phi(u)=F(P_0+uX)$$

besitzt n Ableitungen, die nach der Formel (2) gleich

$$\Phi^{(k)}(u)=d^kF(P_0+uX;X;X;\dots X)$$
$$(k=1,2,\dots,n)$$

sind. Diese sind in bezug auf u für $0\leqslant u\leqslant 1$ stetig. Wir wenden auf $\Phi(u)$ die Sätze 13 und 14 an, indem wir $a=0$ und $b=1$ setzen. Man berechnet:

$$\Phi(0)=F(P_0),$$
$$\Phi(1)=F(P_0+X),$$

$$\Phi^{(k)}(0)=d^kF(P_0;X;X;\dots X)$$
$$(k=1,2,\dots,n-1).$$

Wir bekommen in dieser Weise zwei folgende Sätze:

Satz 15. *Besitzt die Operation $F(P)$ längs der geraden Strecke, die P_0 mit P_0+X verbindet, das n-te Differential $d^nF(P;X_1;X_2;\dots X_n)$, das stetig in bezug auf P bleibt, ist weiter für jedes P dieser Strecke $\|d^nF(P;X;X;\dots X)\|\leqslant m$, so gilt die Formel*

$$\|F(P_0+X)-F(P_0)-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k!}d^kF(P_0;X;X;\dots X)\|\leqslant\frac{m}{n!}. \tag{17}$$

Satz 16. *Besitzt die Operation $F(P)$ längs der geraden Strecke, die P_0 mit P_0+X verbindet, das n-te Differential $d^nF(P;X_1;X_2;\dots X_n)$, das stetig in bezug auf P bleibt, ist $\mathfrak{M}$ eine konvexe abgeschlossene Menge des Q-Raumes, die das Bild dieser Strecke mittels der Operation $d^nF(P;X;X;\dots X)$, wo X konstant und P längs der Strecke veränderlich ist, enthält, so gibt es in $\mathfrak{M}$ ein Element Q derart, daß*

$$F(P_0+X)=F(P_0)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k!}d^kF(P_0;X;X;\dots X)+\frac{1}{n!}Q.$$

Die beide Sätze lassen sich im Falle $n=1$ unmittelbar aus den Sätzen 9 und 10 folgern.

12. Die Lipschitzsche Bedingung. Im Falle $n=1$ wollen wir noch die Ungleichung (17) ein wenig umformen.

Ist $m(P)$ die Norm der in bezug auf X linearen Operation $dF(P;X)$, so ist für jedes P

$$\|dF(P;X)\|\leqslant m(P)\cdot\|X\|.$$

Ist $m(P)$ *beschränkt in einer konvexen Menge des P-Raumes*, so gibt es eine Zahl m derart, daß für jedes P der Menge.

$$\|dF(P;X)\|\leqslant m\cdot\|X\|. \tag{18}$$

Nun seien P_0 und P_1 zwei Elemente der Menge, Da längs ihrer Verbindungsstrecke die Ungleichung (18) erfüllt ist, so gilt der Satz 15, wo $n=1$, P_1-P_0 anstatt X und $m\cdot\|P_1-P_0\|$ anstatt m zu setzen ist:

$$\|F(P_1)-F(P_0)\|\leqslant m\cdot\|P_1-P_0\|.$$

Das ist die *Lipschitzsche Bedingung*. Ihr Bestehen unter den obigen Voraussetzungen habe ich an anderem Orte [8]) ohne den Integralbegriff in einer weniger einfachen Weise bewiesen. Sogar war der Beweis von der Voraussetzung über die Stetigkeit des Differentials frei. Auch dort habe ich bewiesen, daß ein Element sich immer mit einer konvexen Menge umgeben läßt, in der $m(P)$ beschränkt ist, falls für dieses Element das Differential $dF(P;X)$ in bezug auf P stetig ist. Daraus folgt, daß aus der Existenz und Stetigkeit des Differentials kann man das Bestehen der Lipschitzschen Bedingung *im kleinen* schließen.

IV. Abstrakte Differentialgleichungen.

13. Existenzsatz. Der Begriff des Integrals einer abstrakten Funktion gestattet es den Existenzbeweis einer Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{dP}{du}=F(P,u)$$

zu herstellen. Hier bedeutet u eine reelle Veränderliche, P ein unbekanntes Element eines Banachschen Raumes, endlich F eine Operation, die dem Elemente P und der Zahl u ein Element desselben Raumes zuordnet, P soll als abstrakte Funktion von u bestimmt werden.

Satz 17. 1) *Ordnet die Operation $F(P,u)$ jedem P einer Umgebung von P_0 in einem Banachschen Raume und jeder reellen Zahl u in einer Umgebung von u_0 ein Element desselben Raumes zu,*

2) *ist $F(P,u)$ für gewisse Umgebungen von P_0 und u_0 stetig in bezug auf P und u,*

3) *besitzt $F(P,u)$ in gewissen Umgebungen von P_0 und u_0 ein Differential $dF(P,u;X)$, das in bezug auf P und u stetig bleibt,* so *gibt es eine Umgebung von u_0, in der die Gleichung*

$$\frac{dP}{du}=F(P,u) \tag{19}$$

genau eine Lösung $P=\Phi(u)$ hat, für die

$$\Phi(u_0)=P_0. \tag{20}$$

Diese Lösung besitzt eine stetige erste Ableitung.

Beweis. Aus der Voraussetzung 3) folgt nach der am Ende des § 12 gemachten Bemerkung, daß es für P_0 und u_0 Umgebungen gibt, in den die *Lipschitzsche Bedingung*

$$\|F(P',u)-F(P,u)\|\leqslant m\cdot\|P'-P\| \tag{21}$$

gilt. Das Vorhandensein der Veränderlichen u beeinflußt die in der obigen Bemerkung enthaltene Behauptung nicht [12]).

[12]) Vgl. die unter [8]) zitierte Arbeit, S. 166.

Sei μ das Maximum von $\|F(P,u)\|$, wenn P und u gleichzeitig allen erwähnten Umgebungen von P_0 und u_0 angehören. Sei b eine Zahl derart, daß sich die Kugel $\mathcal{K}(P_0,b)$, deren Mittelpunkt P_0 und Halbmesser b ist, in allen erwähnten Umgebungen von P_0 enthält. Endlich sei a eine Zahl derart, daß

$$a\leqslant\frac{b}{\mu} \tag{22}$$

und daß sich das Intervall (u_0-a, u_0+a) in allen erwähnten Umgebungen von u_0 enthält.

Wir werden beweisen, daß die Behauptung unseres Satzes gilt, wenn u dem Intervall (u_0-a, u_0+a) angehört.

Dazu bilden wir eine Folge der abstrakten Funktionen $\Phi_n(u)$, die folgendermaßen entsteht:

1. Für jedes u des Intervalls $(u_0-a\ u_0+a)$

$$\Phi_0(u)=P_0.$$

2. Für jedes u desselben Intervalls

$$\Phi_{n+1}(u)=P_0+\int_{u_0}^{u}F[\Phi_n(u),u]\,du. \tag{23}$$

Diese Konstruktion ist für jedes n möglich. In der Tat ist $\Phi_0(u)$ in der Kugel $\mathcal{K}(P_0,b)$ enthalten und konstant, also stetig. Ist $\Phi_n(u)$ für ein beliebiges n in dieser Kugel enthalten und stetig, so beweist man leicht, daß dasselbe die Funktion $\Phi_{n+1}(u)$ betrifft. Dazu ist zu bemerken, daß $F[\Phi_n(u),u]$ als Funktion von u nach der Voraussetzung 2. stetig ist, also auch ein stetiges Integral (23) besitzt, und daß nach (23) wegen (6)

$$\|\Phi_{n+1}(u)-P_0\|\leqslant\mu\cdot|u-u_0|<\mu\cdot a\leqslant b, \tag{24}$$

also $\Phi_{n+1}(u)$ in der Kugel $\mathcal{K}(P_0,b)$ liegt.

Wir behaupten, daß für jeden n

$$\|\Phi_n(u)-\Phi_{n-1}(u)\|\leqslant\frac{\mu\,m^{n-1}\cdot|u-u_0|^n}{n!} \tag{25}$$

In der Tat ist erstens für $n=1$ nach (24), wo man $n=0$ setzt,

$$\|\Phi_1(u)-\Phi_0(u)\|\leqslant\mu\cdot|u-u_0|.$$

Und dann, ist (25) für ein beliebiges n erfüllt, so kann man es für $n+1$, wie folgt, beweisen. Nach (23) berechnet man

$$\|\Phi_{n+1}(u)-\Phi_n(u)\|=\left\|\int_{u_0}^{u}\{F[\Phi_n(u),u]-F[\Phi_{n-1}(u),u]\}\,du\right\|.$$

Dann, nach (4), wo man $f(u)=1$ legt,

$$\|\Phi_{n+1}(u)-\Phi_n(u)\| \leqslant \left|\int_{u_0}^{u} \|F[\Phi_n(u),u]-F[\Phi_{n-1}(u),u]\|\,du\right|.$$

Aus (21) folgt, daß

$$\|\Phi_{n+1}(u)-\Phi_n(u)\| \leqslant \left|\int_{u_0}^{u} m\cdot\|\Phi_n(u)-\Phi_{n-1}(u)\|\,du\right|, \tag{26}$$

und aus (25), das für n als gültig vorausgesetzt wurde,

$$\|\Phi_{n+1}(u)-\Phi_n(u)\| \leqslant \left|\int_{u_0}^{u} \frac{\mu m^n\cdot|u-u_0|^n}{n!}\,du\right|,$$

oder

$$\|\Phi_{n+1}(u)-\Phi_n(u)\| \leqslant \frac{\mu m^n\cdot|u-u_0|^{n+1}}{(n+1)!},$$

was mit (25) übereinstimmt, wenn man $n+1$ anstatt n einsetzt.

Die Reihe

$$\Phi_0(u),\ \Phi_1(u)-\Phi_0(u),\dots\ \Phi_{n+1}(u)-\Phi_n(u),\dots$$

ist nach (25) für $u_0-a\leqslant u\leqslant u_0+a$ konvergent [13]). Da dies eine gleichmäßige Konvergenz ist, so ist ihre Summe stetig. Wir bezeichnen sie mit $\Phi(u)$. Dann ist

$$\Phi(u)=\lim_{n\to\infty}\Phi_n(u).$$

Daraus folgt unter Berücksichtigung der Voraussetzung 2., daß

$$\lim_{n\to\infty}F[\Phi_n(u),u]=F[\Phi(u),u],$$

und nach dem Satze 4, daß

$$\lim_{n\to\infty}\int_{u_0}^{u}F[\Phi_n(u),u]\,du=\int_{u_0}^{u}F[\Phi(u),u]\,du.$$

Geht man in der Gleichung (23) beiderseits zur Grenze über, so folgt

$$\Phi(u)=P_0+\int_{u_0}^{u}F[\Phi(u),u]\,du, \tag{27}$$

Nach dem Satze 6 ist

$$\frac{d\,\Phi(u)}{du}=F[\Phi(u),u]$$

[13]) Vgl. Banach, loc. cit. S. 138—139 (théorème 8)

also besitzt $\Phi(u)$ eine stetige Ableitung und erfüllt die Gleichung (19). Setzt man $u=u_0$ in (27), so sieht man, daß $\Phi(u)$ auch die Gleichung (20) erfüllt. Damit ist die geforderte Lösung der Gleichung (19) gebildet.

Jetzt wollen wir die Eindeutigkeit der Lösung beweisen. Gebe es im Gegensatz außer der Lösung $\Phi(u)$ noch eine andere $\overline{\Phi}(u)$, für die

$$\Phi(u_1)=\overline{\Phi}(u_1). \tag{28}$$

Nach (19) ist

$$\frac{d[\overline{\Phi}(u)-\Phi(u)]}{du}=F[\overline{\Phi}(u),u]-F[\Phi(u),u],$$

und nach dem Satze 8 der Gleichung (28) wegen

$$\overline{\Phi}(u)-\Phi(u)=\int_{u_1}^{u}\{F[\overline{\Phi}(u),u]-F[\Phi(u),u]\}\,du, \tag{29}$$

wenn nur u dem Intervall (u_0-a, u_0+a) angehört. Sei c eine Zahl derart, daß

$$c<\frac{1}{m},$$

daß sich das Intervall $(u_1-c,\ u_1+c)$ in dem Intervalle $(u_0-a,\ u_0+a)$ enthält, und daß die Funktion $\overline{\Phi}(u)$, die für $u=u_1$ gleich $\Phi(u_1)$ ist, noch für $u_1-c\leqslant u\leqslant u_1+c$ in der Kugel $\mathscr{K}(P_0,b)$ liegt. Dann folgt aus (29), wie in (26), für jedes u des Intervalls $(u_1-c,\ u_1+c)$

$$\|\overline{\Phi}(u)-\Phi(u)\|\leqslant\left|\int_{u_1}^{u}m\cdot\|\overline{\Phi}(u)-\Phi(u)\|\,du\right|$$

Ist λ das Maximum von $\|\overline{\Phi}(u)-\Phi(u)\|$ in dem Intervalle $(u_1-c,\ u_1+c)$, so folgt

$$\|\overline{\Phi}(u)-\Phi(u)\|\leqslant m\lambda\cdot|u-u_1|,$$

$$\lambda\leqslant m\lambda\cdot c,$$

was nach der Definition von c nur für $\lambda=0$ bestehen kann. Also stimmen die Funktionen $\Phi(u)$ und $\overline{\Phi}(u)$ im ganzen Intervall $(u_1-c,\ u_1+c)$ überein.

Wir haben bewiesen, daß die Funktionen $\Phi(u)$ und $\overline{\Phi}(u)$, falls sie für ein u_1 im Innern des Intervalls $(u_0-a,\ u_0+a)$ gleich sind, stimmen in einem gewissen Intervalle $(u_1-c,\ u_1+c)$ überein. Da sie für $u=u_0$ gleich sind, so folgt daraus, daß sie im ganzen Intervall $(u_0-a,\ u_0+a)$ übereinstimmen müssen, woraus die Eindeutigkeit der Lösung folgt.

14. Abhängigkeit vom Anfangswert. Betrachtet man u_0 als konstant und P_0 als veränderlich, so wird die abstrakte Funktion $\Phi(u)$ eine Operation der beiden Veränderlichen P_0 und u, die wir mit $\Phi(P_0, u)$ bezeichnen.

Zusatz. *Unter den Voraussetzungen des Satzes 17 ist die Operation $\Phi(P_0, u)$ stetig in bezug auf beide Veränderlichen zusammen.*

Beweis. Sei ε eine willkürliche positive Zahl, die kleiner als b ist. Mit $\overline{P}_0$ bezeichnen wir einen beliebigen Punkt der Kugel $\mathcal{K}(P_0, \varepsilon)$. Dann ist die Kugel $\mathcal{K}(\overline{P}_0, b-\varepsilon)$ in $\mathcal{K}(P_0, b)$ enthalten. Ist anstatt der Ungleichung (22) die folgende

$$a_1 \leqslant \frac{b-\varepsilon}{\mu}$$

erfüllt, so gilt die Behauptung des Satzes 17 in dem Intervalle $(u_0 - a_1, u_0 + a_1)$ nicht nur für den Anfangswert P_0, sondern auch für jedes $\overline{P}_0$ der Kugel $\mathcal{K}(P_0, \varepsilon)$. Wir bezeichnen mit $\Phi_n(P_0, u)$ die durch eine der Formel (23) analoge Rekurenzformel definierte Folge, die anstatt der Folge $\Phi_n(u)$ eintritt und zur Grenze $\Phi(P_0, u)$ hat. Alle Überlegungen des § 13 bleiben für $\Phi(\overline{P}_0, u)$ gültig, falls $\overline{P}_0$ der Kugel $\mathcal{K}(P_0, \varepsilon)$ und u dem neuen Intervalle $(u_0 - a_1, u_0 + a_1)$ angehört.

Aus der modifizierten Formel (23) folgt

$$\Phi_{n+1}(\overline{P}_0, u) - \Phi_{n+1}(P_0, u) = \overline{P}_0 - P_0 + \int_{u_0}^{u} \{F[\Phi_n(\overline{P}_0, u), u] - F[\Phi_n(P_0, u), u]\} du.$$

Daraus, nach (21),

$$(30) \quad \|\Phi_{n+1}(\overline{P}_0, u) - \Phi_{n+1}(P_0, u)\| \leqslant \|\overline{P}_0 - P_0\| + m \cdot \left| \int_{u_0}^{u} \|\Phi_n(\overline{P}_0, u) - \Phi(P_0, u)\| du \right|.$$

Wir behaupten, daß für jedes n

$$(31) \quad \|\Phi_n(\overline{P}_0, u) - \Phi_n(P_0, u)\| \leqslant \|\overline{P}_0 - P_0\| \cdot \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{m^k \cdot |u-u_0|^k}{k!}\right).$$

In der Tat gilt diese Formel für $n = 0$, weil

$$\Phi_0(P_0, u) = P_0, \quad \Phi_0(\overline{P}_0, u) = \overline{P}_0.$$

Gilt sie für ein beliebiges n, so schließt man mittels (30) ihre Gültigkeit für $n+1$.

Aus (31) folgt

$$\|(\Phi(\overline{P}_0, u) - \Phi(P_0, u)\| \leqslant \|\overline{P}_0 - P_0\| \cdot e^{m \cdot |u-u_0|},$$

woraus die Stetigkeit in bezug auf P_0 folgt. Da mit $\varepsilon \to 0$ das Intervall

$(u_0 - a_1, u_0 + a_1)$ gegen $(u_0 - a, u_0 + a)$ streben kann, so gilt diese Stetigkeit im Innern des Intervalls $(u_0 - a, u_0 + a)$. Da sie gleichgradig in bezug auf u für $u_0 - a < u < u_0 + a$ ist, und da $\Phi(P_0, u)$ in bezug auf u stetig ist, so ist $\Phi(P_0, u)$ stetig in bezug auf beide Veränderlichen zusammen.

15. Systeme der Differentialgleichungen. Ein System von zwei oder mehreren Differentialgleichungen von der Gestalt

$$\frac{dP}{du} = F(P, Q, u),$$

$$\frac{dQ}{du} = G(P, Q, u),$$

wo P und Q auch verschiedenen Banachschen Räumen angehören können, bietet kein neues Problem dar. In der Tat genügt es einen neuen Raum mit den Elementen (P, Q) zu betrachten [14]). Dann kann das System als eine Gleichung

$$\frac{d(P, Q)}{du} = H[(P, Q), u]$$

geschrieben werden.

Damit die Voraussetzungen des Satzes 17 erfüllt werden, sollen F und G stetig in bezug auf alle drei Veränderlichen sein und totale Differentiale [15]) in bezug auf P und Q zusammen besitzen, die auch stetig sind.

Auch die Differentialgleichungen höherer Ordnungen lassen sich in der Form eines Systems behandeln.

16. Differentialgleichungen mit Parameter. Wir betrachten jetzt eine Gleichung von der Form

$$\frac{dP}{du} = F(P, Q, u),$$

wo sich um eine Lösung $P = \Phi(Q, u)$ handelt, die für $u = u_0$ mit einer vorgegebenen Operation $\Psi(Q)$ zusammenfällt. Dabei gehört P einem, dem P-Raume, und Q einem anderen, dem Q-Raume, Banachschen Raume an.

Satz 18. 1) *Ordnet die Operation $F(P, Q, u)$ jedem P einer Umgebung von P_0 im P-Raume, jedem Q einer Umgebung von Q_0 im Q-Raume und jeder reellen Zahl u in einer Umgebung von u_0 ein Element des P-Raumes zu,*

2) *ist $F(P, Q, u)$ für gewisse Umgebungen von P_0, Q_0 und u_0 stetig in bezug auf P, Q und u,*

---

[14]) Vgl. Fréchet, loc. cit. S. 317, oder Kerner, loc. cit. unter [3]), S. 153.

[15]) Vgl. Fréchet, loc. cit. S. 318—319.

3) *besitzt $F(P, Q, u)$ in gewissen Umgebungen von P_0, Q_0 und u_0 ein totales Differential in bezug auf P und Q zusammen, das in bezug auf P, Q und u stetig ist,*

4) *ordnet die Operation $\Phi(Q)$ jedem Q einer Umgebung von Q_0 im Q-Raume ein Element des P-Raumes zu,*

5) *ist $\Psi(Q)$ in einer Umgebung von Q_0 stetig,*

6) *ist $\Psi(Q_0) = P_0$,*

so gibt es Umgebungen von Q_0 und u_0, in den die Gleichung

$$\frac{dP}{du} = F(P, Q, u) \tag{32}$$

genau eine Lösung $P = \Phi(Q, u)$ hat, für die

$$\Phi(Q, u_0) = \Psi(Q). \tag{33}$$

Diese Lösung ist in bezug auf Q und u stetig und besitzt die erste Ableitung nach u, die auch in bezug auf Q und u stetig ist.

Beweis. Betrachten wir das folgende System

$$\frac{dP}{du} = F(P, Q, u), \tag{34}$$

$$\frac{dQ}{du} = 0. \tag{35}$$

Für dieses gelten alle Voraussetzungen des Satzes 17, der im § 15 auf Systeme verallgemeinert wurde. Also gibt es zwei Funktionen $P(u)$ und $Q(u)$, die das System erfüllen, und die für $u = u_0$ beliebige Werte $\overline{P}$ und $\overline{Q}$, die genügend kleinen Umgebungen von P_0 und Q_0 angehören, annehmen. Wir drücken die Abhängigkeit dieser Funktionen von $\overline{P}$ und $\overline{Q}$ aus, indem wir sie mit $P(\overline{P}, \overline{Q}, u)$ und $Q(\overline{P}, \overline{Q}, u)$ bezeichnen. Es ist zu bemerken, daß wegen (35) für jedes u

$$Q(\overline{P}, \overline{Q}, u) = \overline{Q}, \tag{36}$$

daß für $u = u_0$

$$P(\overline{P}, \overline{Q}, u_0) = \overline{P}, \tag{37}$$

und daß nach dem Zusatze des § 14 die Operation $P(\overline{P}, \overline{Q}, u)$ in bezug auf $\overline{P}$, $\overline{Q}$ und u zusammen stetig ist.

Führen wir die Operation

$$\Phi(Q, u) = P[\Psi(Q), Q, u]$$

ein. Gehört Q einer genügend kleinen Umgebung von Q_0, so ist dies eine stetige Operation von Q und u. Ist Q konstant, so erfüllen $\Phi(Q, u)$ und Q das

System (34), (35). Also ist $\Phi(Q, u)$ eine Lösung der Gleichung (32). Sie besitzt eine Ableitung nach u, die gleich $F[\Phi(Q, u), Q, u]$, also stetig in bezug auf Q und u ist. Nach (37) ist für $u = u_0$

$$\Phi(Q, u_0) = P[\Psi(Q), Q, u_0] = \Psi(Q),$$

die Funktion $\Phi(Q, u)$ erfüllt also auch die Bedingung (33).

Daß $\Phi(Q, u)$ die einzige Lösung des gestellten Problem ist, überzeugt man sich, indem man bemerkt, daß jede Lösung $\Phi(Q, u)$ der Gleichung (32) mit $Q = \text{const.}$ eine Lösung des Systems (34), (35) liefern muß.

Streszczenie.

Wśród operacyj funkcyjnych, które przyporządkowują elementom przestrzeni Banachowskiej elementy innej lub tej samej przestrzeni, wyróżniają się operacje, nazwane przez nas funkcjami abstrakcyjnemi, a przyporządkowujące liczbom rzeczywistym elementy dowolnej przestrzeni Banachowskiej. Dla tych funkcyj abstrakcyjnych znanem jest pojęcie całki Riemanna. Otóż pierwszem zadaniem pracy jest rozwinięcie tego pojęcia i uzasadnienie pewnych własności całki.

Całka funkcyj abstrakcyjnych oddaje również pewne usługi w przypadku ogólnym. Dzięki niej możemy bowiem zbudować w dwóch postaciach wzór Taylora dla dowolnych operacyj.

Głównym wreszcie przedmiotem pracy są dowody istnienia dla zwyczajnych równań różniczkowych Analizy ogólnej, t. zn. równań, w których pochodna funkcji abstrakcyjnej wyraża się przy pomocy operacji przez samą funkcję i ewentualnie zmienną niezależną i obcy parametr. Dowód w zasadzie jest równoważny najprostszemu dowodowi istnienia dla zwykłego równania różniczkowego, natomiast samo równanie obejmuje jako przypadki szczególne układy skończone i nieskończone równań różniczkowych, równania różniczkowe o pochodnych cząstkowych i równania różniczkowo-całkowe.