Studja z teorji afinorów skośnie symetrycznych i niezmienników całkowych

(Sur la théorie des affineurs symétriques gauches et des invariants intégraux)

przez

W. Ślebodzińskiego

Przedmiotem niniejszej pracy są różne zastosowania metod rachunku tensorjalnego do teorji symbolicznych form różniczkowych i do teorji niezmienników całkowych. Wiadomo, iż w literaturze poświęconej tym teorjom rzadko i w wąskim jedynie zakresie korzystano dotychczas z rachunku tensorjalnego, aczkolwiek jego metody formalne osiągnęły w ostatnich latach wysoki stopień doskonałości, głównie dzięki pracom holenderskiego matematyka J. A. Schoutena. Zastosowanie tych metod do wspomnianych teoryj daje dwie znaczne korzyści: przedewszystkiem uzyskujemy na tej drodze uproszczenia dowodów wielu twierdzeń oraz możność traktowania ich w sposób bardziej jednolity niż się to działo dotychczas; powtóre, metody te dają nam szereg nowych twierdzeń i związków, których bezpośrednie odkrycie byłoby, zdaje się, rzeczą dość trudną. Nadmienić także można, że niektóre znane związki znajdują swe pełne wyjaśnienie tylko przy systematycznem operowaniu metodami rachunku tensorjalnego.

Pierwsza część pracy poświęcona jest operacjom na skośnych afinorach i na gęstościach afinalnych oraz niektórym ogólnym zastosowaniom tych operacyj do teorji niezmienników całkowych. Między innemi ustalono tutaj (ust. **1, 2**) odpowiedniość między afinorami skośnemi a gęstościami afinalnemi o ciężarze ± 1. O ile mi wiadomo, odpowiedniość ta, pozostająca w bliskim związku z dualizmem w kinematyce ośrodków ciągłych zauważonym przez E. Vessiota, nie została dotychczas stwierdzona w takiej ogólności, w jakiej to uczyniono w niniejszej pracy. Przedmiotem następnych dwóch ustępów (**3, 4**) są własności operatora $\overline{X}f$, który otrzymujemy ze zwykłego operatora Xf, przedłużając odpowiadające mu przekształcenie infinitezymalne na składowe afinorów. W ust. 5 wprowadzamy nowy operator $\mathfrak{W}f$, który powstaje z przeciwzmienniczej gęstości wektorjalnej o ciężarze $+1$ w ten sam sposób, w jaki znany operator Xf powstaje z przeciwzmienniczego wektora. Ust. 6 zawiera kilka zastosowań poprzednich rozważań do teorji bezwzględnych niezmienników całkowych. W ust. 7 rozwinięto klasyfikację afinorów skośnych ze względu na dane przekształcenie infinitezymalne oraz wskazano na zastosowanie tej klasyfikacji do teorji symbolicznych form różniczkowych. Ostatnie dwa ustępy pierwszej części poświęcone są operacjom różniczkowym, oznaczonym symbolami $\mathfrak{div}$ i *div*, oraz własnościom t. zw. układów Liouville'a. — Treścią drugiej części jest teorja niezmienników całkowych układów Hamiltona; okazuje się tutaj, że szereg znanych twierdzeń Poissona, Poincarégo, Cartana, De Dondera i innych można przedstawić jako szczególne przypadki pewnych twierdzeń ogólniejszych. Ostatnia wreszcie część pracy poświęcona została układom równań różniczkowych, nazwanym przez Th. De Dondera uogólnionemi układami Hamiltona. Wskazano tutaj, między innemi, na bliski związek teorji takich układów z teorją grup funkcyj Liego; związek ten dotychczas, o ile mi wiadomo, nie został zauważony.

Przedmioty poruszone w tej rozprawie i uzyskane w niej rezultaty pozostają z natury rzeczy w bliskim związku z pracami wielu matematyków. W każdym poszczególnym przypadku związek ten, o ile był wiadomy, zaznaczono zapomocą odpowiedniej cytaty.

W całej pracy zastosowano symbolikę i terminologję przyjętą przez J. A. Schoutena w jego znanej książce p. t. *Der Ricci-Kalkül* (Berlin 1924). Dla zrozumienia niniejszej pracy wystarczy znajomość rozdziału pierwszego i pierwszych dwóch §§ rozdziału drugiego tej książki, którą w dalszym ciągu oznaczać będziemy zapomocą skrótu: Schouten, R. K.

I.

1. Niechaj $x^\alpha\,(\alpha=1,2,\dots,n)$ oznaczają spółrzędne punktu n-wymiarowej rozciągłości X_n. Załóżmy, że dane jest przekształcenie spółrzędnych

$$x^\alpha = x^\alpha('x^1, 'x^2, \dots, 'x^n) \tag{1}$$

takie, że

$$\Delta = \frac{D(x^1, x^2, \dots, x^n)}{D('x^1, 'x^2, \dots, 'x^n)} \neq 0.$$

Jeżeli $U\{u_{\varkappa_1\dots\varkappa_r}\}$ jest skośnym afinorem spółzmienniczym rzędu r rozciągłości

X_n, składowe jego przekształcają się przy zmianie spółrzędnych według wzorów

$$'u_{\varkappa_1\dots\varkappa_r} = \sum_{(\varrho)} \frac{D(x^{\varrho_1}, \dots, x^{\varrho_r})}{D('x^{\varkappa_1}, \dots, 'x^{\varkappa_r})}\, u_{\varrho_1\dots\varrho_r}. \tag{2}$$

Podobnie składowe przeciwzmienniczego afinora skośnego $V\{v^{\lambda_1\dots\lambda_s}\}$ rzędu s przekształcają się przy zmianie układu według formuły

$$'v^{\lambda_1\dots\lambda_s} = \sum_{(\sigma)} \frac{D('x^{\lambda_1}, \dots, 'x^{\lambda_s})}{D(x^{\sigma_1}, \dots, x^{\sigma_s})}\, v^{\sigma_1\dots\sigma_s}. \tag{3}$$

We wzorach powyższych symbole $\sum\limits_{(\varrho)}$, $\sum\limits_{(\sigma)}$ oznaczają sumowanie dla wszystkich kombinacyj po r wzgl. s elementów z pośród ciągu $1, 2, \dots, n$ jako wartości wskaźników niemych. Przyjmujemy tu i w dalszym ciągu stałą umowę, iż wskaźniki składowych afinorów skośnych wypisane są zawsze w porządku rosnącym. Wrazie potrzeby rząd afinora będziemy oznaczali zapomocą litery umieszczonej w nawiasie obok symbolu afinora; będziemy więc np. pisali $U_{(r)}$, $V^{(s)}$.

Oprócz afinorów skośnych wprowadzimy także do naszych rozważań (skośne) gęstości afinalne w znaczeniu O. Veblena[1]). Wielkość $\overset{k}{\mathfrak{w}}$ jest skalarną gęstością o ciężarze k, jeżeli przy zmianie układu (1) przekształca się według wzoru

$$'\overset{k}{\mathfrak{w}} = \Delta^k . \overset{k}{\mathfrak{w}}. \tag{3'}$$

Składowe spółzmienniczej wzgl. przeciwzmienniczej gęstości afinalnej[2]) $\overset{k}{\mathfrak{U}}\{\overset{k}{\mathfrak{u}}_{\varkappa_1\dots\varkappa_r}\}$ i $\overset{k}{\mathfrak{V}}\{\overset{k}{\mathfrak{v}}^{\lambda_1\dots\lambda_s}\}$ przekształcają się odpowiednio według wzorów

$$'\overset{k}{\mathfrak{u}}_{\varkappa_1\dots\varkappa_r} = \Delta^k \sum_{(\varrho)} \frac{D(x^{\varrho_1}, \dots, x^{\varrho_r})}{D('x^{\varkappa_1}, \dots, 'x^{\varkappa_r})}\, \overset{k}{\mathfrak{u}}_{\varrho_1\dots\varrho_r}, \tag{4}$$

$$'\overset{k}{\mathfrak{v}}^{\lambda_1\dots\lambda_s} = \Delta^k \sum_{(\sigma)} \frac{D('x^{\lambda_1}, \dots, 'x^{\lambda_s})}{D(x^{\sigma_1}, \dots, x^{\sigma_s})}\, \overset{k}{\mathfrak{v}}^{\sigma_1\dots\sigma_s}. \tag{5}$$

Wzory te można zastąpić przez równoważne im

$$\Delta^k \overset{k}{\mathfrak{u}}_{\mu_1\dots\mu_r} = \sum_{(\varrho)} \frac{D('x^{\varrho_1}, \dots, 'x^{\varrho_r})}{D(x^{\mu_1}, \dots, x^{\mu_r})}\, '\overset{k}{\mathfrak{u}}_{\varrho_1\dots\varrho_r}, \tag{4'}$$

$$\Delta^k \overset{k}{\mathfrak{v}}_{|\nu_1\dots\nu_s} = \sum_{(\sigma)} \frac{D(x^{\nu_1}, \dots, x^{\nu_s})}{D('x^{\sigma_1}, \dots, 'x^{\sigma_s})}\, '\overset{k}{\mathfrak{v}}^{\sigma_1\dots\sigma_s}. \tag{5'}$$

---

[1]) O stosunku teorji gęstości Veblena do teorji gęstości Weyla por. J. A. Schouten u. V. Hlavatý, Zur Theorie der linearen Übertragung, Math. Zeitschr., t. XXX, 1929, str. 429.

[2]) W dalszym ciągu mówiąc o gęstościach afinalnych, będziemy mieli na myśli stale skośne gęstości afinalne.

W równościach ostatnich litera k oznacza dowolną liczbę całkowitą. Jeżeli $k=0$, równości (4) i (5) przechodzą oczywiście w zależności (2) wzgl. (3).

Przyjmiemy w dalszym ciągu umowę: jeżeli $\varkappa_1, \varkappa_2, \dots, \varkappa_r$ jest dowolnym ciągiem rosnącym liczb wyjętych z ciągu $1, 2, \dots, n$, to $\overline{\varkappa}_1, \overline{\varkappa}_2, \dots, \overline{\varkappa}_{n-r}$ oznacza ciąg utworzony z pozostałych elementów ciągu $1, 2, \dots, n$, napisanych również w porządku rosnącym; dwa takie ciągi nazywać będziemy **ciągami uzupełniającemi się**.

Niechaj teraz $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$ będzie dowolnym ciągiem rosnącym utworzonym z wyrazów ciągu $1, 2, \dots, n$; przyjmijmy $\varkappa = \sum_{l=1}^{r} \varkappa_l$, $\mu = \sum_{l=1}^{r} \mu_l$ i pomnóżmy obie strony równości (4) przez wyrażenie

$$(-1)^{\varkappa+\mu} \frac{D(x^{\overline{\mu}_1}, \dots, x^{\overline{\mu}_{n-r}})}{D('x^{\overline{\varkappa}_1}, \dots, 'x^{\overline{\varkappa}_{n-r}})}$$

a następnie wykonajmy sumowanie względem wskaźników $\varkappa_1, \dots, \varkappa_r$, rozciągnięte na wszystkie kombinacje po r elementów z ciągu $1, 2, \dots, n$; otrzymamy w ten sposób

$$(6) \qquad (-1)^{\mu} \sum_{(\varkappa)} (-1)^{\varkappa} \frac{D(x^{\overline{\mu}_1}, \dots, x^{\overline{\mu}_{n-r}})}{D('x^{\overline{\varkappa}_1}, \dots, 'x^{\overline{\varkappa}_{n-r}})} \, '\overset{k}{\mathfrak{u}}_{\varkappa_1 \dots \varkappa_r}$$

$$= \Delta^k \sum_{(\varrho)} \overset{k}{\mathfrak{u}}_{\varrho_1 \dots \varrho_\varkappa} \sum_{(\varkappa)} (-1)^{\varkappa+\mu} \frac{D(x^{\overline{\mu}_1}, \dots, x^{\overline{\mu}_{n-r}})}{D('x^{\overline{\varkappa}_1}, \dots, 'x^{\overline{\varkappa}_{n-r}})} \frac{D(x^{\varrho_1}, \dots, x^{\varrho_\varkappa})}{D('x^{\varkappa_1}, \dots, 'x^{\varkappa_r})}.$$

Na podstawie twierdzenia **Laplace'a** jest jednak

$$\sum_{(\varkappa)} (-1)^{\varkappa+\mu} \frac{D(x^{\overline{\mu}_1}, \dots, x^{\overline{\mu}_{n-r}})}{D('x^{\overline{\varkappa}_1}, \dots, 'x^{\overline{\varkappa}_{n-r}})} \cdot \frac{D(x^{\mu_1}, \dots, x^{\mu_r})}{D('x^{\varkappa_1}, \dots, 'x^{\varkappa_r})} = \Delta;$$

jeżeli zaś ciąg $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_r$ jest różny od ciągu $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$, to jest — również na podstawie twierdzenia **Laplace'a** —

$$\sum_{(\varkappa)} (-1)^{\varkappa+\mu} \frac{D(x^{\overline{\mu}_1}, \dots, x^{\overline{\mu}_{n-r}})}{D('x^{\overline{\varkappa}_1}, \dots, 'x^{\overline{\varkappa}_{n-r}})} \cdot \frac{D(x^{\varrho_1}, \dots, x^{\varrho_r})}{D(x^{\varkappa_1}, \dots, x^{\varkappa_r})} = 0.$$

Równość (6) przyjmuje więc postać

$$(7) \qquad \sum_{(\varkappa)} (-1)^{\varkappa} \frac{D(x^{\overline{\mu}_1}, \dots, x^{\overline{\mu}_{n-r}})}{D('x^{\overline{\varkappa}_1}, \dots, 'x^{\overline{\varkappa}_{n-r}})} \, '\overset{k}{\mathfrak{u}}_{\varkappa_1 \dots \varkappa_r} = \Delta^{k+1} \cdot (-1)^{\mu} \, \overset{k}{\mathfrak{u}}_{\mu_1 \dots \mu_r}.$$

Porównywając równości (5′) i (7), dochodzimy do wniosku, że wielkości $(-1)^{\mu} \overset{k}{\mathfrak{u}}_{\mu_1 \dots \mu_r}$ przekształcają się przy zmianie układu spółrzędnych tak, jak składowe przeciwzmienniczej gęstości afinalnej rzędu $n-r$ a o ciężarze $k+1$.

Możemy więc przyjąć następujące oznaczenia

$$(8) \qquad \overset{k+1}{\mathfrak{u}}{}^{\overline{\mu}_1 \dots \overline{\mu}_{n-r}} = (-1)^{\mu + \frac{n(n-1)}{2}} \overset{k}{\mathfrak{u}}_{\mu_1 \dots \mu_r};$$

korzystając z nich, będziemy mogli równość (7) napisać w następujący sposób, jeżeli równocześnie zmienimy nieznacznie oznaczenia,

$$\sum_{(\varkappa)} \frac{D(x^{\mu_1}, \dots, x^{\mu_{n-r}})}{D('x^{\varkappa_1}, \dots, 'x^{\varkappa_{n-r}})} \, '\overset{k+1}{\mathfrak{u}}{}^{\varkappa_1 \dots \varkappa_{n-r}} = \Delta^{k+1} \overset{k+1}{\mathfrak{u}}{}^{\mu_1 \dots \mu_{n-r}}$$

albo

$$'\overset{k+1}{\mathfrak{u}}{}^{\varkappa_1 \dots \varkappa_{n-r}} = \Delta^{k+1} \sum_{(\mu)} \frac{D('x^{\varkappa_1}, \dots, 'x^{\varkappa_{n-r}})}{D(x^{\mu_1}, \dots, x^{\mu_{n-r}})} \overset{k+1}{\mathfrak{u}}{}^{\mu_1 \dots \mu_{n-r}}.$$

Wychodząc ze wzorów (5), możemy w podobny sposób wykazać, że wielkości

$$(9) \qquad \overset{k-1}{\mathfrak{v}}_{\overline{\lambda}_1 \dots \overline{\lambda}_{n-s}} = (-1)^{\lambda + \frac{n(n-1)}{2}} \overset{k}{\mathfrak{v}}{}^{\lambda_1 \dots \lambda_s} \quad \left(\lambda = \sum_{l=1}^{s} \lambda_l\right),$$

przekształcają się jak składowe spółzmienniczej gęstości afinalnej rzędu $n-s$ a o ciężarze $k-1$.

Możemy więc stwierdzić, że **za pośrednictwem wzorów** (8) i (9) **każdej spółzmienniczej gęstości afinalnej rzędu** r **i o ciężarze** k **możemy przyporządkować określoną przeciwzmienniczą gęstość afinalną rzędu** $n-r$ **a o ciężarze** $k+1$, **i nawzajem.** Gęstości w ten sposób przyporządkowane będziemy nazywali **gęstościami odpowiadającemi sobie**, a oznaczać je będziemy zapomocą tej samej litery głównej. Odpowiedniość omawiana pozostaje w bliskim związku z dualizmem w kinematyce ośrodków ciągłych zauważonym przez E. **Vessiota**[3]).

Zwrócimy uwagę na kilka szczególnych przypadków ustalonej poprzednio odpowiedniości.

1⁰. Wyjdźmy z gęstości o ciężarze $k=0$ czyli z afinorów. Wzory (8) i (9) przyjmują w tym przypadku postać następującą

$$(10) \qquad \overset{1}{\mathfrak{u}}{}^{\overline{\varkappa}_1 \dots \overline{\varkappa}_{n-r}} = (-1)^{\varkappa + \frac{n(n-1)}{2}} u_{\varkappa_1 \dots \varkappa_r},$$

$$(11) \qquad \overset{-1}{\mathfrak{v}}_{\overline{\varkappa}_1 \dots \overline{\varkappa}_{n-s}} = (-1)^{\varkappa + \frac{n(n-1)}{2}} v^{\varkappa_1 \dots \varkappa_s}.$$

Wynika z nich, że afinory o składowych $u_{\varkappa_1 \dots \varkappa_r}$, $v^{\varkappa_1 \dots \varkappa_r}$ można przekształcić na gęstości afinalne rzędu $n-r$ a o ciężarze $+1$ wzgl. -1. Jeżeli np. jest $r=n$,

[3]) E. **Vessiot**, Sur la cinématique des milieux continus à n dimensions, C. R. Ac. de Paris, t. 152, 1911, str. 1732. Por. także Th. **De Donder**, Sur la cinématique des milieux continus, Bull. Ac. R. de Belgique, 1912.

to zależności powyższe przyjmą postać

$$\overset{1}{\mathfrak{u}} = u_{12\ldots n}, \qquad \overset{-1}{\mathfrak{v}} = v^{12\ldots n}. \tag{12}$$

Wynika z nich znany fakt, iż afinorowi spółzmienniczemu rzędu n odpowiada gęstość skalarna o ciężarze $+1$, a afinorowi przeciwzmienniczemu rzędu n gęstość skalarna o ciężarze -1.

2⁰. Załóżmy, że w przypadku $n=3$ dany jest wektor spółzmienniczy o składowych $u_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, 3$). Z wektora tego tworzymy spółzmienniczy afinor skośny rzędu drugiego o składowych

$$u_{\varkappa_1\varkappa_2} = 2\,\partial_{[\varkappa_1} u_{\varkappa_2]}. \tag{13}$$

(Za przykładem J. A. Schoutena przyjmujemy tutaj i w dalszym ciągu oznaczenie następujące

$$\partial_\varkappa f = \frac{\partial f}{\partial x^\varkappa}).$$

Afinorowi o składowych (13) odpowiada na mocy wzoru (10) wektorjalna gęstość o ciężarze 1 i o składowych

$$\overset{1}{\mathfrak{u}}{}^{\varkappa} = (-1)^{\varkappa_1+\varkappa_2+1}\, 2\,\partial_{[\varkappa_1} u_{\varkappa_2]} \qquad (\varkappa_1 < \varkappa_2),$$

gdzie $\varkappa$ oznacza liczbę ciągu $1, 2, 3$, różną od liczb $\varkappa_1, \varkappa_2$. Będzie więc

$$\overset{1}{\mathfrak{u}}{}^{1} = \partial_2 u_3 - \partial_3 u_2, \quad \overset{1}{\mathfrak{u}}{}^{2} = \partial_3 u_1 - \partial_1 u_3, \quad \overset{1}{\mathfrak{u}}{}^{3} = \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1.$$

Afinor o składowych (13) jest, jak wiadomo, wirem wektora spółzmienniczego o składowych $u_\varkappa$; z poprzedniego wyniku, że w przypadku $n=3$ wir możemy pojmować jako skośny afinor spółzmienniczy rzędu drugiego albo jako przeciwzmienniczą gęstość wektorjalną o ciężarze $+1$. W przypadku $n > 3$ wir wektora spółzmienniczego możemy określić jako skośny afinor spółzmienniczy rzędu drugiego albo jako afinalną gęstość przeciwzmienniczą rzędu $n-2$ i o ciężarze 1.

2. Wyniki uzyskane w poprzedzającym ustępie możemy zastosować do wyprowadzenia wzorów na pochodne spółzmiennicze gęstości afinalnych. Załóżmy w tym celu, że w rozciągłości X_n zostało określone przesunięcie równoległe o spółczynnikach $\Gamma^{\mu}_{\varkappa\lambda}$ i przyjmijmy $\Gamma_\lambda = \Gamma^{\varrho}_{\varrho\lambda}$. Dla afinorów skośnych rzędu n-go o składowych $u_{12\ldots n}$, $v^{12\ldots n}$ mamy, jak wiadomo

$$\nabla_\varkappa u_{12\ldots n} = \partial_\varkappa u_{12\ldots n} - \Gamma_\varkappa u_{12\ldots n},$$

$$\nabla_\varkappa v^{12\ldots n} = \partial_\varkappa v^{12\ldots n} + \Gamma_\varkappa u_{12\ldots n}.$$

Na mocy wzorów (11) będzie więc także

$$\nabla_\varkappa \overset{1}{\mathfrak{u}} = \partial_\varkappa \overset{1}{\mathfrak{u}} - \Gamma_\varkappa \overset{1}{\mathfrak{u}},$$

$$\nabla_\varkappa \overset{-1}{\mathfrak{v}} = \partial_\varkappa \overset{-1}{\mathfrak{v}} + \Gamma_\varkappa \overset{-1}{\mathfrak{v}}.$$

Ponieważ każdą gęstość skalarną o ciężarze $k \gtrless 0$ możemy przedstawić jako jako iloczyn $|k|$ czynników, z których każdy jest gęstością skalarną o ciężarze $+1$ wzgl. -1 zależnie od znaku liczby k, przeto z poprzednich wzorów wynika łatwo wzór ogólniejszy

$$\Delta_\varkappa \overset{k}{\mathfrak{a}} = \partial_\varkappa \overset{k}{\mathfrak{a}} - k\,\Gamma_\varkappa \overset{k}{\mathfrak{a}}. \tag{14}$$

Podobnie, przedstawiając dowolną gęstość afinalną o ciężarze k jako iloczyn gęstości skalarnej o ciężarze k i afinora odpowiedniego rzędu, otrzymamy na podstawie poprzednich wyników wzory następujące [4])

$$\nabla_\varkappa \overset{k}{\mathfrak{u}}_{\lambda_1\ldots\lambda_r} = \partial_\varkappa \overset{k}{\mathfrak{u}}_{\lambda_1\ldots\lambda_r} - \sum_{j=1}^{r} \Gamma^{\varrho}_{\lambda_j\varkappa} \overset{k}{\mathfrak{u}}_{\lambda_1\ldots\lambda_{j-1}\varrho\lambda_{j+1}\ldots\lambda_r} - k\,\Gamma_\varkappa \overset{k}{\mathfrak{u}}_{\lambda_1\ldots\lambda_r}, \tag{15 a}$$

$$\nabla_\varkappa \overset{k}{\mathfrak{v}}{}^{\mu_1\ldots\mu_s} = \partial_\varkappa \overset{k}{\mathfrak{v}}{}^{\mu_1\ldots\mu_s} + \sum_{h=1}^{s} \Gamma^{\mu_h}_{\varrho\varkappa} \overset{k}{\mathfrak{v}}{}^{\mu_1\ldots\mu_{h-1}\varrho\mu_{h+1}\ldots\mu_s} - k\,\Gamma_\varkappa \overset{k}{\mathfrak{v}}{}^{\mu_1\ldots\mu_s}. \tag{15 b}$$

3. Załóżmy, że w rozciągłości X_n dane jest przekształcenie infinitezymalne

$$Xf = X^\varrho \partial_\varrho f; \tag{16}$$

w równości powyższej symbolami X^ϱ oznaczyliśmy funkcje zmiennych x^α ($\alpha = 1, 2, \ldots, n$). Niechaj symbole $A^{\lambda_1\ldots\lambda_t}_{\varkappa_1\ldots\varkappa_s}$ oznaczają składowe dowolnego afinora mieszanego $\boldsymbol{A}$ rzędu $s+t$. Przedłużając przekształcenie $X(f)$ na afinory, znajdujemy wzory

$$\begin{aligned} X(A^{\lambda_1\ldots\lambda_t}_{\varkappa_1\ldots\varkappa_s}) = {} & X^\varrho \partial_\varrho A^{\lambda_1\ldots\lambda_t}_{\varkappa_1\ldots\varkappa_s} + \sum_{i=1}^{s} A^{\lambda_1\ldots\lambda}_{\varkappa_1\ldots\varkappa_{i-1}\varrho\varkappa_{i+1}\ldots\varkappa_s} \partial_{\varkappa_i} X^\varrho \\ & - \sum_{j=1}^{t} A^{\lambda_1\ldots\lambda_{j-1}\sigma\lambda_{j+1}\ldots\lambda_t}_{\varkappa_1\ldots\varkappa} \partial_\sigma X^{\lambda_j}. \end{aligned} \tag{17}$$

Wzory te są najzupełniej ogólne, t. zn. ważne dla dowolnego afinora rozciągłość X_n. W przypadku afinora spółzmienniczego dowolnego rzędu i przeciwzmienniczego tensora (afinora symetrycznego) rzędu drugiego znajdujemy je po raz pierwszy w pracach prof. Żorawskiego [5]); spotykamy je również,

[4]) J. A. Schouten u. V. Hlavatý, Zur Theorie der linearen Übertragung, Math. Zeitschr. t. 30. 1929, § 6. — V. Hlavatý, Théorie des densités dans le déplacement général, Annali di Mat. ser. IV, t. V, 1927/8.

[5]) K. Żorawski, O własnościach pewnej całki wielokrotnej, Prace mat.-fiz., t. 13, 1002. — Id., Über gewisse Relationen, welche Deformationen u. kontinuierliche Bewegungen betreffen, Bull. Ac. de Cracovie, 1915, str. 122—163.

rozszerzone na afinory przeciwzmiennicze dowolnego rzędu, w książce prof. R. Weitzenböck'a [6]). Operatora $\overline{X}$ użył poraz pierwszy, w przypadku skośnych afinorów spółzmienniczych, Th. Lepage [7]).

Twierdzenie 1. Jeżeli wielkości $A^{\lambda_1\ldots\lambda_t}_{\varkappa_1\ldots\varkappa_s}$ są składowemi afinora mieszanego A rzędu $s+t$, to wielkości $\overline{X}(A^{\lambda_1\ldots\lambda_t}_{\varkappa_1\ldots\varkappa_s})$ są również składowemi afinora mieszanego rzędu $s+t$.

Ażeby to twierdzenie udowodnić, określamy w rozciągłości X_n przesunięcie równoległe o spółczynnikach $\Gamma^{\mu}_{\varkappa\lambda}$ i oznaczamy symbolem ∇_ι odpowiadające mu różniczkowanie spółzmiennicze. Będziemy wówczas mogli napisać [8])

$$\nabla_\varrho A^{\lambda_1\ldots\lambda_t}_{\varkappa_1\ldots\varkappa_s} = \partial_\varrho A^{\lambda_1\ldots\lambda_t}_{\varkappa_1\ldots\varkappa_s} - \sum_{l=1}^{s} \Gamma^{\tau}_{\varkappa_l\varrho} A^{\lambda_1\ldots\lambda_t}_{\varkappa_1\ldots\varkappa_{l-1}\tau\varkappa_{l+1}\ldots\varkappa_s} + \sum_{j=1}^{t} \Gamma^{\lambda_j}_{\tau\varrho} A^{\lambda_1\ldots\lambda_{j-1}\tau\lambda_{j+1}\ldots\lambda_t}_{\varkappa_1\ldots\varkappa_s},$$

$$\nabla_{\varkappa_l} X^\varrho = \partial_{\varkappa_l} X^\varrho + \Gamma^{\varrho}_{\tau\varkappa_l} X^\tau,$$

$$\nabla_\varrho X^{\lambda_j} = \partial_\varrho X^{\lambda_j} + \Gamma^{\lambda_j}_{\tau\varrho} X^\tau.$$

Jeżeli z równości tych obliczymy pochodne $\partial_\varrho A^{\lambda_1\ldots\lambda_t}_{\varkappa_1\ldots\varkappa_s}$, $\partial_{\varkappa_l} X^\varrho$, $\partial_\varrho X^{\varrho_j}$, a otrzymane wyrażenia podstawimy we wzorze (17), wzór ten przyjmie postać

$$\begin{aligned}\overline{X}(A^{\lambda_1\ldots\lambda_t}_{\varkappa_1\ldots\varkappa_s}) &= X^\varrho \nabla_\varrho A^{\lambda_1\ldots\lambda_t}_{\varkappa_1\ldots\varkappa_s} + \sum_{l=1}^{s} A^{\lambda_1\ldots\lambda_t}_{\varkappa_1\ldots\varkappa_{l-1}\varrho\varkappa_{l+1}\ldots\varkappa_s} \nabla_{\varkappa_l} X^\varrho \\ &- \sum_{j=1}^{t} A^{\lambda_1\ldots\lambda_{j-1}\varrho\lambda_{j+1}\ldots\lambda_t}_{\varkappa_1\ldots\varkappa} \nabla_\varrho X^{\lambda_j} + 2\sum_{l=1}^{s} S_{\varkappa_l\varrho}{}^{\sigma} A^{\lambda_1\ldots\lambda_t}_{\varkappa_1\ldots\varkappa_{l-1}\sigma\varkappa_{l+1}\ldots\varkappa_s} X^\varrho \\ &- 2\sum_{j=1}^{t} S_{\varrho\sigma}{}^{\lambda_j} A^{\lambda_1\ldots\lambda_{j-1}\varrho\lambda_{j+1}\ldots\lambda_t}_{\varkappa_1\ldots\varkappa_s} X^\sigma.\end{aligned} \tag{18}$$

We wzorze powyższym symbole $S_{\varkappa\lambda}{}^{\mu}$ oznaczają składowe skręcenia przestrzeni X_n z przesunięciem równoległem o współczynnikach $\Gamma^{\mu}_{\varkappa\lambda}$. Ponieważ każdy wyraz wzoru (18) jest składową pewnego afinora mieszanego rzędu $s+t$, przeto tę samą własność posiadać musi wielkość oznaczona symbolem $\overline{X}(A^{\lambda_1\ldots\lambda_t}_{\varkappa_1\ldots\varkappa_s})$, co właśnie mieliśmy udowodnić. — Afinor, którego składowe otrzymujemy ze składowych afinora A za pomocą wzorów (17), oznaczać będziemy symbolem $\overline{X}(A)$.

Z poprzedniego wynika, że równości

$$X(A^{\lambda_1\ldots\lambda_t}_{\varkappa_1\ldots\varkappa_s}) = 0 \tag{19}$$

zachowują się niezmienniczo względem przekształceń (1) układu spółrzędnych.

---

[6]) R. Weitzenböck, Invariantentheorie, 1923, XIV Absch., § 5. — Por. także Th. De Donder, Théorie des invariants intégraux, 1927, Ch. VIII (przypadek skośnych afinorów przeciwzmienniczych).

[7]) Th. Lepage, Sur les propriétés invariantives des covariants symétriques gauches, Mémoires Ac. R. de Belgique, t. 10, 1929.

[8]) J. A. Schouten, R. K., p. 65.

Jeżeli składowe pewnego afinora A spełniają związki (19), będziemy mówili, że afinor ten jest niezmienniczy dla przekształcenia $X(f)$.

Jest rzeczą widoczną, że operator $\overline{X}$ podlega prawom formalnym różniczkowania iloczynu. Jeżeli np. dane są dwa afinory $A\{A_{\varkappa\lambda\mu}\}$ i $B\{B^{\varrho\sigma}\}$, to mamy

$$\overline{X}(A_{\varkappa\lambda\varrho} B^{\varrho\mu}) = \overline{X}(A_{\varkappa\lambda\varrho}) \cdot B^{\varrho\mu} + A_{\varkappa\lambda\varrho} \overline{X}(B^{\varrho\mu}).$$

Równość tę możemy sprawdzić z łatwością, opierając się na wzorze (17).

Twierdzenie 2. Jeśli dwa przekształcenia infinitezymalne

$$X(f) = X^\varrho \partial_\varrho f, \quad Y(f) = Y^\varrho \partial_\varrho f$$

przedłużymy na składowe afinorów, to operacja $\overline{X}\,\overline{Y} - \overline{Y}\,\overline{X}$ będzie przedłużeniem operacji $XY - YX$ czyli

$$(\overline{X}\,\overline{Y}) = (\overline{XY}).$$

Obliczając symbol $X(Y(f)) - Y(X(f))$, znajdujemy

$$X(Y(f)) - Y(X(f)) = (X^\varrho \partial_\varrho Y^\sigma - Y^\varrho \partial_\varrho X^\sigma)\partial_\sigma f;$$

na podstawie wzoru (17) możemy jednak napisać

$$X^\varrho \partial_\varrho Y^\sigma - Y^\varrho \partial_\varrho X^\sigma = \overline{X}(Y^\sigma), \tag{20}$$

będzie więc

$$X(Y(f)) - Y(X(f)) = \overline{X}(Y^\sigma)\partial_\sigma f. \tag{21}$$

Załóżmy teraz, że dany jest dowolny wektor spółzmienniczy $A\{A_\alpha\}$. W myśl wzoru (17) możemy napisać

$$\overline{X}(A_\alpha) = X^\varrho \partial_\varrho A_\alpha + \partial_\alpha X^\varrho \cdot A_\varrho, \quad \overline{Y}(A_\alpha) = Y^\varrho \partial_\varrho A_\alpha + \partial_\alpha Y^\varrho \cdot A_\varrho.$$

Obliczając przy pomocy tych wyrażeń różnicę $\overline{X}(\overline{Y}(A_\alpha)) - \overline{Y}(\overline{X}(A_\alpha))$, znajdujemy

$$\begin{aligned}\overline{X}(\overline{Y}(A_\alpha)) - \overline{Y}(\overline{X}(A_\alpha)) = (X^\varrho \partial_\varrho Y^\sigma - Y^\varrho \partial_\varrho X^\sigma)\partial_\varrho A_\alpha + A_\sigma \partial_\alpha [X^\varrho \partial_\varrho Y^\sigma \\ - Y^\varrho \partial_\varrho X^\sigma].\end{aligned} \tag{22}$$

Na podstawie zależności (20) równości ostatniej możemy nadać postać następującą

$$\overline{X}(\overline{Y}(A_\alpha)) - \overline{Y}(\overline{X}(A_\alpha)) = \overline{X}(Y^\sigma)\partial_\sigma A_\alpha + A_\sigma \partial_\alpha(\overline{X}(Y^\sigma)).$$

W analogiczny sposób znajdziemy dla wektora przeciwzmienniczego $B\{B^\beta\}$ wzór

$$\overline{X}(\overline{Y}(B^\beta)) - \overline{Y}(\overline{X}(B^\beta)) = \overline{X}(Y^\sigma)\partial_\sigma B^\beta - B^\sigma \partial_\sigma(\overline{X}(Y^\beta)).$$

Porównywając dwie ostatnie równości z zależnością (20), widzimy, że twierdzenie nasze jest już uzasadnione w przypadku afinorów spółzmienniczych i przeciwzmienniczych rzędu pierwszego (wektorów); teraz więc łatwo uzasadnić je dla dowolnego afinora mieszanego, przedstawiając go jako iloczyn czynników Aronholda-Clebscha [9]).

Twierdzenie 3. Jeżeli istnieje czynnik k taki, że jest tożsamościowo

$$X(Y(f)) - Y(X(f)) = kX(f), \tag{23}$$

to jest także

$$\overline{X}(\overline{Y}(A)) - \overline{Y}(\overline{X}(A)) = k\overline{X}(A))$$

dla każdego spółzmienniczego afinora skośnego $A\{A_{\varkappa_1\dots\varkappa_s}\}$, którego składowe spełniają zależności

$$A_{\varkappa_1\dots\varkappa_{s-1}\varrho} X^\varrho = 0. \tag{24}$$

Twierdzenie to udowodnimy najpierw w przypadku wektora spółzmienniczego o składowych A_α. Posługując się oznaczeniami użytemi przy dowodzie poprzedniego twierdzenia, możemy założenie (23) zastąpić równością

$$\overline{X}(Y^\varrho)\partial_\varrho f = kX(f),$$

z której otrzymujemy

$$\overline{X}(Y^\varrho) = k \cdot X^\varrho,$$

czyli (w myśl wzoru (17))

$$X^\sigma \partial_\sigma Y^\varrho - Y^\sigma \partial_\sigma X^\varrho = kX^\varrho.$$

Poddając tę równość operacji ∂_α, znajdujemy

$$X^\sigma \partial_\sigma \partial_\alpha Y^\varrho = -\partial_\alpha X^\sigma \cdot \partial_\sigma Y^\varrho + \partial_\alpha Y^\sigma \cdot \partial_\sigma X^\varrho + Y^\sigma \partial_\alpha \partial_\sigma X^\varrho$$
$$+ k\partial_\alpha X^\varrho + X^\varrho \partial_\alpha k.$$

Jeżeli wyrażenia na $X^\sigma \partial_\sigma Y^\varrho$; $X^\sigma \partial_\sigma \partial_\alpha Y^\varrho$, obliczone z dwóch ostatnich równości, podstawimy w zależności (22), dojdziemy do wyniku

$$\overline{X}(\overline{Y}(A_\alpha)) - \overline{Y}(\overline{X}(A_\alpha)) = kX^\varrho \partial_\varrho A_\alpha + kA_\varrho \partial_\alpha X^\varrho + A_\varrho X^\varrho \cdot \partial_\alpha k. \tag{25}$$

Zważmy, że założenie (24) w przypadku wektora przyjmuje postać

$$A_\varrho X^\varrho = 0,$$

oraz, że na podstawie wzoru (17) możemy napisać

$$X^\varrho \partial_\varrho A_\alpha + A_\varrho \partial_\alpha X^\varrho = \overline{X}(A_\alpha).$$

Z zależności (25) wynika więc równość

$$\overline{X}(\overline{Y}(A_\alpha)) - \overline{Y}(\overline{X}(A_\alpha)) = k \cdot \overline{X}(A_\alpha),$$

[9]) J. A. Schouten, R. K., str. 28.

co właśnie mieliśmy wykazać. Przy pomocy czynników symbolicznych Aronholda-Clebscha łatwo teraz rozszerzyć twierdzenie na dowolne spółzmiennicze afinory skośne spełniające warunki (24).

4. Zajmiemy się obecnie przedłużeniem przekształcenia infinitezymalnego $X(f) = X^\varrho \partial_\varrho f$ na składowe gęstości afinalnych o ciężarze $+1$ i -1. Obierzmy w tym celu dowolny skośny afinor spółzmienniczy n-go rzędu o składowych $u_{\varkappa_1\dots\varkappa_n}$ i skośny afinor przeciwzmienniczy n-go rzędu o składowych $v^{\lambda_1\dots\lambda_n}$. Dla afinorów tych wzór (17) redukuje się do następujących zależności

$$\overline{X}(u_{12\dots n}) = X^\varrho \partial_\varrho u_{12\dots n} + u_{12\dots n} \partial_\varrho X^\varrho,$$

$$\overline{X}(v^{12\dots n}) = X^\varrho \partial_\varrho v^{12\dots n} - v^{12\dots n} \partial_\varrho X^\varrho.$$

Na zasadzie równości (12) wzorom tym można nadać postać

$$\begin{aligned} \overline{X}(\overset{1}{\mathfrak{u}}) &= X^\varrho \partial_\varrho \overset{1}{\mathfrak{u}} + \overset{1}{\mathfrak{u}} \partial_\varrho X^\varrho, \\ \overline{X}(\overset{-1}{\mathfrak{v}}) &= X^\varrho \partial_\varrho \overset{-1}{\mathfrak{v}} - \overset{-1}{\mathfrak{v}} \partial_\varrho X^\varrho. \end{aligned} \tag{26}$$

Załóżmy obecnie, iż dane są dwie dowolne gęstości afinalne $\mathfrak{U}\{\overset{1}{\mathfrak{u}}{}^{\varkappa_1\dots\varkappa_r}\}$ i $\mathfrak{V}\{\overset{-1}{\mathfrak{v}}_{\lambda_1\dots\lambda_s}\}$. Na podstawie uwagi, że każdą gęstość afinalną o ciężarze ± 1 można przedstawić jako iloczyn pewnego afinora skośnego i gęstości skalarnej o odpowiednim ciężarze, otrzymujemy z łatwością przy pomocy wzorów (17) i (26) następujące wzory

$$\begin{aligned} \overline{X}(\overset{1}{\mathfrak{u}}{}^{\varkappa_1\dots\varkappa_r}) &= X^\varrho \partial_\varrho \overset{1}{\mathfrak{u}}{}^{\varkappa_1\dots\varkappa_r} + \sum_{l=1}^{r} \overset{1}{\mathfrak{u}}{}^{\varkappa_1\dots\varkappa_{l-1}\varrho\varkappa_{l+1}\dots\varkappa_r} \partial_\varrho X^{\varkappa_l} + \overset{1}{\mathfrak{u}}{}^{\varkappa_1\dots\varkappa_r} \partial_\varrho X^\varrho, \\ \overline{X}(\overset{-1}{\mathfrak{v}}_{\varkappa_1\dots\varkappa_s}) &= X^\varrho \partial_\varrho \overset{-1}{\mathfrak{v}}_{\varkappa_1\dots\varkappa_s} - \sum_{j=1}^{s} \overset{-1}{\mathfrak{v}}_{\varkappa_1\dots\varkappa_{j-1}\varrho\varkappa_{j+1}\dots\varkappa_s} \partial_{\varkappa_j} X^\varrho - \overset{-1}{\mathfrak{v}}_{\varkappa_1\dots\varkappa_s} \partial_\varrho X^\varrho. \end{aligned} \tag{27}$$

Metodą podobną do tej, której użyliśmy w ust. 3, można stwierdzić, że wielkości $\overline{X}(\overset{1}{\mathfrak{u}})$ i $\overline{X}(\overset{-1}{\mathfrak{v}})$ są gęstościami skalarnemi o ciężarze $+1$, wzgl. -1. Analogiczną uwagę można uczynić o wielkościach $\overline{X}(\overset{1}{\mathfrak{u}}{}^{\varkappa_1\dots\varkappa_r})$ oraz $\overline{X}(\overset{-1}{\mathfrak{v}}_{\varkappa_1\dots\varkappa_s})$.

Uwaga. Dla gęstości o dowolnym ciężarze $k \gtreqless 0$ zachodzą związki

$$\overline{X}(\overset{k}{\mathfrak{v}}) = X^\varrho \partial_\varrho \overset{k}{\mathfrak{v}} + k\overset{k}{\mathfrak{v}} \partial_\varrho X^\varrho,$$

$$\overline{X}(\overset{k}{\mathfrak{u}}_{\varkappa_1\dots\varkappa_s}) = X^\varrho \partial_\varrho \overset{k}{\mathfrak{u}}_{\varkappa_1\dots\varkappa_r} + \sum_{l=1}^{r} \overset{k}{\mathfrak{u}}_{\varkappa_1\dots\varkappa_{l-1}\varrho\varkappa_{l+1}\dots\varkappa_r} \partial_{\varkappa_l} X^\varrho + k\overset{k}{\mathfrak{u}}_{\varkappa_1\dots\varkappa_r} \partial_\varrho X^\varrho,$$

$$\overline{X}(\overset{k}{\mathfrak{v}}{}^{\lambda_1\dots\lambda_s}) = X^\varrho \partial_\varrho \overset{k}{\mathfrak{v}}{}^{\lambda_1\dots\lambda_s} - \sum_{j=1}^{s} \overset{k}{\mathfrak{v}}{}^{\lambda_1\dots\lambda_{j-1}\varrho\lambda_{j+1}\dots\lambda_s} \partial_\varrho X^{\lambda_j} + k\overset{k}{\mathfrak{v}}{}^{\lambda_1\dots\lambda_s} \partial_\varrho X^\varrho,$$

które łatwo możemy wyprowadzić z poprzednich. Ze wzorów tych nie będziemy jednak w dalszym ciągu korzystali.

5. Każdemu wektorowi przeciwzmienniczemu $X\{X^\alpha\}$ odpowiada przekształcenie infinitezymalne $X(f) = X^\varrho \partial_\varrho f$. Podobnie każdej przeciwzmienniczej gęstości wektorowej o ciężarze $+1$ $\mathfrak{W}\{\overset{1}{\mathfrak{w}}{}^\alpha\}$ możemy przyporządkować operację

$$\mathfrak{W} f = \overset{1}{\mathfrak{w}}{}^\varrho\, \partial_\varrho f. \tag{28}$$

Wyrażenie $\mathfrak{W} f$ jest gęstością skalarną o ciężarze 1, mamy więc przy przejściu do nowego układu spółrzędnych zapomocą podstawienia (1) zależność następującą [10])

$$'\mathfrak{W}'f = \Delta\, \mathfrak{W} f.$$

Obliczymy teraz symbol Poissona $(X\mathfrak{W})$; na podstawie wzorów (26) i (28) mamy

$$\overline{X}(\mathfrak{W} f) - \mathfrak{W}(Xf) = X^\varrho \partial_\varrho \mathfrak{W} f + \mathfrak{W} f \cdot \partial_\varrho X^\varrho - \overset{1}{\mathfrak{w}}{}^\varrho \partial_\varrho (X^\sigma \partial_\sigma f).$$

Po rozwinięciu rachunków otrzymamy stąd

$$\overline{X}(\mathfrak{W} f) - \mathfrak{W}(Xf) = [X^\varrho \partial_\varrho \overset{1}{\mathfrak{w}}{}^\sigma - \overset{1}{\mathfrak{w}}{}^\varrho \partial_\varrho X^\sigma + \overset{1}{\mathfrak{w}}{}^\sigma \partial_\varrho X^\varrho]\, \partial_\sigma f$$

Przy zastosowaniu pierwszego ze wzorów (27) spółczynnik przy $\partial_\sigma f$ w ostatniej równości można zastąpić wyrażeniem $\overline{X}(\overset{1}{\mathfrak{w}}{}^\sigma)$. Będzie więc ostatecznie

$$(X\mathfrak{W}) = \overline{X}(\overset{1}{\mathfrak{w}}{}^\sigma)\, \partial_\sigma f. \tag{29}$$

Związek powyższy obejmuje jako szczególny przypadek ($n = 3$) jeden ze wzorów prof. Żorawskiego [11]). Zauważyć należy, iż równość (29) została uzasadniona przy założeniu, iż wielkości $\overset{1}{\mathfrak{w}}{}^\sigma$ są składowemi przeciwzmienniczej gęstości wektorjalnej o ciężarze $+1$; wzór prof. Żorawskiego został wyprowadzony przy założeniu bardziej specjalnem, iż odpowiadająca gęstość wektorjalna jest wirem pewnego wektora.

6. W ustępie tym zajmiemy się kilku najprostszemi zastosowaniami poprzednich rozważań do teorji niezmienników całkowych (bezwzględnych). Załóżmy w tym celu, że dana jest r-krotna zewnętrzna forma różniczkowa

$$\Omega = \sum_{(\varrho)} A_{\varrho_1 \ldots \varrho_r}\, dx^{\varrho_1} \ldots dx^{\varrho_r}.$$

[10]) K. Żorawski, Über Einteilung der Bewegungen kontinuierlicher Medien in gewisse Kategorien, Bull. Ac. de Cracovie, 1917, str. 6, równość (17).

[11]) K. Żorawski, Über gewisse Eigenschaften der Wirbel, Bull. Ac. de Cracovie, 1915, str. 191, wzór (7).

Ażeby całka $\int \Omega$ była niezmiennikiem przekształcenia $Xf = X^\varrho \partial_\varrho f$, potrzeba, jak wiadomo, i wystarcza, ażeby było [12])

$$\overline{X}(A_{\varrho_1 \ldots \varrho_r}) = 0.$$

Warunki te można przedstawić w bardzo prostej postaci w przypadku $r = n - 1$. Istotnie przyjmijmy, że całka

$$\int \sum_{(\varrho)} w_{\varrho_1 \ldots \varrho_{n-1}}\, dx^{\varrho_1} \ldots dx^{\varrho_{n-1}}$$

jest niezmiennikiem przekształcenia Xf. Mamy więc

$$\overline{X}(w_{\varrho_1 \ldots \varrho_{n-1}}) = 0. \tag{30}$$

Na podstawie wzorów (10) ustępu 1 afinorowi skośnemu o składowych $w_{\varrho_1 \ldots \varrho_{n-1}}$ możemy przyporządkować przeciwzmienniczą gęstość wektorjalną o ciężarze $+1$; oznaczmy składowe tej gęstości symbolami $\overset{1}{\mathfrak{w}}{}^\sigma$ i przyjmijmy $\mathfrak{W} f = \overset{1}{\mathfrak{w}}{}^\sigma \partial_\sigma f$. Warunki (30) możemy więc zastąpić równoważnemi im równościami

$$\overline{X}(\overset{1}{\mathfrak{w}}{}^\sigma) = 0.$$

Ze względu na tożsamość (29) ostatnie zależności dają

$$(X\mathfrak{W}) = 0.$$

Ażeby więc rozważana całka $(n-1)$-krotna była niezmiennikiem przekształcenia Xf, potrzeba i wystarcza, ażeby operacje Xf i $\mathfrak{W} f$ były operacjami przemiennemi. Warunki powyższe są równoważne warunkom znalezionym przez G. Koenigsa [13]).

Utwórzmy teraz uogólnione równanie Pfaffa

$$\Omega = \sum_{(\varrho)} A_{\varrho_1 \ldots \varrho_r}\, dx^{\varrho_1} \ldots dx^{\varrho} = 0;$$

ażeby to równanie było niezmiennicze dla przekształcenia Xf, potrzeba i wystarcza, ażeby istniał czynnik m taki, ażebyśmy mieli tożsamościowo $X(\Omega) = m\,\Omega$ czyli

$$\overline{X}(A_{\varrho_1 \ldots \varrho_r}) = m\, A_{\varrho_1 \ldots \varrho_r}.$$

Uczynimy jeszcze jedną uwagę: jeżeli oprócz przekształcenia Xf dane jest drugie przekształcenie infinitezymalne $Yf = Y^\varrho \partial_\varrho f$, to mamy

$$X(Yf) - Y(Xf) = (X^\varrho \partial_\varrho Y^\sigma - Y^\varrho \partial_\varrho X^\sigma)\, \partial_\sigma f.$$

[12]) K. Żorawski, O własnościach pewnej całki wielokrotnej, Prace mat.-fiz., t. 13, 1902.

[13]) G. Koenigs, Sur les invariants intégraux, C. R. Ac. de Paris, t. 122, 186. — Zob. także E. Goursat, Leçons sur le problème de Pfaff, 1922, str. 223.

Jeżeli zastosujemy wzór (17), to równość ostatnią będziemy mogli napisać w jednej z dwóch równoważnych postaci

$$(31)\qquad X(Yf)-Y(Xf)=\overline{X}(Y^\sigma)\,\partial_\sigma f=-\overline{Y}(X^\sigma)\,\partial_\sigma f.$$

Ażeby równanie $Xf=0$ dozwalało na przekształcenie Yf, potrzeba i wystarcza, ażeby było też samościowo

$$X(Yf)-Y(Xf)=k\,Xf,$$

gdzie k oznacza stosownie dobrany czynnik. Na podstawie poprzedniego warunek powyższy można wyrazić zapomocą jednej z dwóch równości

$$(32)\qquad \overline{X}(Y^\sigma)=k\,X^\sigma,\qquad \overline{Y}(X^\sigma)=-k\,X^\sigma.$$

W szczególności, warunki, ażeby przekształcenia Xf i Yf były operacjami przemiennemi, można wyrazić zapomocą równości

$$(33)\qquad \overline{X}(Y^\sigma)=0\quad\text{albo}\quad \overline{Y}(X^\sigma)=0.$$

Po tych uwagach wstępnych udowodnimy kilka twierdzeń tyczących się niezmienników całkowych i przekształceń infinitezymalnych.

Twierdzenie 1. Jeżeli całka r-krotna

$$(34)\qquad I_r=\int\sum_{(\varrho)}A_{\varrho_1\ldots\varrho_r}\,dx^{\varrho_1}\ldots dx^{\varrho_r}$$

jest niezmiennikiem przekształcenia $Xf=X^\varrho\,\partial_\varrho f$ i jeżeli przekształcenie Xf jest przemienne z przekształceniem $Yf=Y^\varrho\,\partial_\varrho f$, to całka $(r-1)$-krotna

$$I_{r-1}=\int\sum_{(\varrho)}A_{\varrho_1\ldots\varrho_{r-1}\sigma}\,Y^\sigma\,dx^{\varrho_1}\ldots dx^{\varrho_{r-1}}$$

jest także niezmiennikiem przekształcenia Xf.

W myśl poprzednich uwag założenia twierdzenia możemy przedstawić w następujący sposób:

$$\overline{X}(A_{\varrho_1\ldots\varrho_r})=0,\qquad \overline{X}(Y^\sigma)=0.$$

Będzie więc

$$\overline{X}(A_{\varrho_1\ldots\varrho_{r-1}\sigma}\,Y^\sigma)=\overline{X}(A_{\varrho_1\ldots\varrho_{r-1}\sigma})\cdot Y+A_{\varrho_1\ldots\varrho_{r-1}\sigma}\,\overline{X}(Y^\sigma)=0,$$

co wyraża, iż całka I_{r-1} jest niezmiennikiem przekształcenia Xf.

Twierdzenie powyższe stanowi analogję pewnego twierdzenia E. Cartana[14]), tyczącego się niezmienników całkowych nieskończonej grupy przekształceń $m\,Xf$, gdzie m oznacza dowolną funkcję zmiennych x^α. Możemy je

[14]) E. Cartan, Leçons sur les invariants intégraux, 1922, N° 88, wzór (4).

z łatwością uogólnić. Załóżmy w tym celu, że dany jest szereg przekształceń $Y_i f=Y_i^\varrho\,\partial_\varrho f$ $(i=1,2,\ldots,q)$, takich, że układ $Y_i f=0$ $(i=1,2,\ldots,q)$ składa się z równań niezależnych i przyjmijmy

$$Y^{\alpha_1\ldots\alpha_q}=Y_1^{[\alpha_1}\,Y_2^{\alpha_2}\ldots Y_q^{\alpha_q]}.$$

Wielkości $Y^{\alpha_1\ldots\alpha_q}$ są oczywiście składowemi pewnego skośnego afinora przeciwzmienniczego rzędu q.

Twierdzenie 2. Jeżeli całka (34) jest niezmiennikiem przekształcenia Xf i jeżeli przekształcenia $Y_i f$ $(i=1,2,\ldots,q)$ są operacjami przemiennemi z przekształceniem Xf, to całka

$$I_{r-q}=\int\sum_{(\varrho)}A_{\varrho_1\ldots\varrho_{r-q}\sigma_1\ldots\sigma_q}\,Y^{\sigma_1\ldots\sigma_q}\,dx^{\varrho_1}\ldots dx^{\varrho_{r-q}}$$

jest także niezmiennikiem przekształcenia Xf.

Z założeń twierdzenia wynikają równości

$$\overline{X}(A_{\varrho_1\ldots\varrho_r})=0,\qquad \overline{X}(Y_i^\sigma)=0\quad(i=1,2,\ldots q),$$

stąd zaś

$$\overline{X}(Y^{\alpha_1\ldots\alpha_q})=\sum_{i=1}^{q}Y_1^{[\alpha_1}\ldots Y_{i-1}^{\alpha_{i-1}}\,\overline{X}(Y_i^{\alpha_i})\,Y_{i+1}^{\alpha_{i+1}}\ldots Y_q^{\alpha_q]}=0$$

oraz

$$\overline{X}(A_{\varrho_1\ldots\varrho_{r-q}\sigma_1\ldots\sigma_q}\,Y^{\sigma_1\ldots\sigma_q})=\overline{X}(A_{\varrho_1\ldots\varrho_{r-q}\sigma_1\ldots\sigma_q})\,Y^{\sigma_1\ldots\sigma_q}+A_{\varrho_1\ldots\varrho_{r-q}\sigma_1\ldots\sigma_q}\,\overline{X}(Y^{\sigma_1\ldots\sigma_q})=0,$$

co mieliśmy udowodnić. — Twierdzenie powyższe zachowuje oczywiście swą ważność przy założeniu $r>q$; w przypadku $r=q$ funkcja skalarna

$$A_{\varrho_1\ldots\varrho_r}\,Y^{\varrho_1\ldots\varrho_r}$$

jest całką równania $Xf=0$.

Załóżmy teraz, że dane są dwie formy całkowe $(n-1)$-go i n-go stopnia

$$\Omega_{n-1}=\sum_{(\varrho)}A_{\varrho_1\ldots\varrho_{n-1}}\,dx^{\varrho_1}\ldots dx^{\varrho_{n-1}},\qquad \Omega_n=\sum_{(\sigma)}B_{\sigma_1\ldots\sigma_n}\,dx^{\sigma_1}\ldots dx^{\sigma_n}$$

i oznaczmy symbolami $B^{\alpha_1\ldots\alpha_n}$ składowe skośnego afinora przeciwzmienniczego n-go rzędu takiego, że

$$(35)\qquad B^{12\ldots n}=\frac{1}{B_{12\ldots n}};$$

przyjmijmy nadto

$$(36)\qquad B^\varkappa=B^{\varkappa\varrho_1\ldots\varrho_{n-1}}A_{\varrho_1\ldots\varrho_{n-1}}\quad\text{oraz}\quad Bf=B^\varrho\,\partial_\varrho f.$$

Posługując się temi oznaczeniami, możemy wypowiedzieć następujące

Twierdzenie 3. Jeżeli całki

$$I_{n-1}=\int\Omega_{n-1},\qquad I_n=\int\Omega_n$$

są niezmiennikami przekształcenia Xf, to równania $Xf=0$, $Bf=0$ tworzą układ zupełny Jacobi'ego (czyli: przekształcenia Xf i Bf są operacjami przemiennemi).

Na podstawie założeń możemy napisać

(37) $$\overline{X}(A_{\varrho_1\ldots\varrho_{n-1}})=0, \qquad \overline{X}(B_{\sigma_1\ldots\sigma_n}).$$

Ponieważ wielkości $B_{\sigma_1\ldots\sigma_n}$ są składowemi afinora skośnego n-go rzędu, przeto druga grupa z ostatnich równań redukuje się do następującej zależności (wzór (17) ust. 3):

$$X^\varrho \partial_\varrho B_{12\ldots n} + B_{12\ldots n}\partial_\varrho X^\varrho = 0;$$

równość tę możemy napisać w następujący sposób

$$X^\varrho \partial_\varrho \left(\frac{1}{B_{12\ldots n}}\right) - \frac{1}{B_{12\ldots n}}\cdot \partial_\varrho X^\varrho = 0.$$

Ze względu na (35) wynika stąd

$$X^\varrho \partial_\varrho B^{12\ldots n} - B^{12\ldots n}\partial_\varrho X^\varrho = 0.$$

Wzór (17) pozwala równości tej nadać postać następującą

$$\overline{X}(B^{12\ldots n})=0;$$

oczywistą jest rzeczą, że wynik ten możemy przedstawić także w postaci zależności

(38) $$\overline{X}(B^{\sigma_1\ldots\sigma_n}) = 0.$$

Z pierwszego ze wzorów (36) wynika

$$\overline{X}(B^{\varkappa}) = \overline{X}(B^{\varkappa\varrho_1\ldots\varrho_{n-1}})\,A_{\varrho_1\ldots\varrho_{n-1}} + B^{\varkappa\varrho_1\ldots\varrho_{n-1}}\,\overline{X}(A_{\varrho_1\ldots\varrho_{n-1}})$$

czyli, ze względu na (37) i (38),

$$\overline{X}(B^{\varkappa}) = 0.$$

W myśl jednej z uwag uczynionych na początku tego ustępu (równość (33)) równość ostatnia wyraża twierdzenie, które mieliśmy udowodnić.

7. Zajmiemy się obecnie klasyfikacją afinorów skośnych ze względu na dane przekształcenie infinitezymalne Xf. Oznaczmy w tym celu symbolem $\boldsymbol{A}$ dowolny afinor skośny i przyjmijmy

$$\overline{X}^{(0)}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}, \quad \overline{X}^{(k)}(\boldsymbol{A}) = \overline{X}(\overline{X}^{(k-1)}(\boldsymbol{A})) \quad (k=1,2,\ldots).$$

Utwórzmy ciąg nieskończony afinorów

(40) $$\overline{X}^{(0)}(\boldsymbol{A}),\ \overline{X}^{(1)}(\boldsymbol{A}),\ldots,\ \overline{X}^{(k)}(\boldsymbol{A}),\ldots$$

Będziemy mówili, że $\boldsymbol{A}$ jest afinorem k-ej kategorji ze względu na przekształcenie Xf, jeżeli są spełnione następujące warunki:

1°) między afinorami $\overline{X}^{(0)}(\boldsymbol{A})$, $\overline{X}^{(1)}(\boldsymbol{A}),\ldots,$ $\overline{X}^{(k)}(\boldsymbol{A})$ zachodzi zależność linjowa postaci

(41) $$\mu_0\overline{X}^{0}(\boldsymbol{A}) + \mu_1\overline{X}^{(1)}(\boldsymbol{A}) + \ldots + \mu_k\overline{X}^{(k)}(\boldsymbol{A}) = 0,$$

w której przynajmniej jeden ze spółczynników $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_k$ jest różny od zera;

2°) między pierwszemi k wyrazami ciągu (40) nie zachodzi żadna zależność postaci (41).

Załóżmy, że warunki powyższe są spełnione; zależność (41) będziemy mogli zastąpić związkiem

(42) $$\overline{X}^{(k)}(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{k}\lambda_i\overline{X}^{(k-i)}(\boldsymbol{A}).$$

Utwórzmy afinor

(43) $$\boldsymbol{A}^* = \sum_{i=1}^{k}\varrho_i\overline{X}^{(k-i)}(\boldsymbol{A})$$

i zbadajmy, jakie warunki muszą spełniać spółczynniki $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_k$, ażeby afinor $\boldsymbol{A}^*$ był afinorem niezmienniczym dla przekształcenia Xf, tj., ażeby było

$$\overline{X}(\boldsymbol{A}^*) = 0.$$

Jeżeli w ostatniej równości symbol $\boldsymbol{A}^*$ zastąpimy wyrażeniem (43), jeżeli nadto uwzględnimy wzór (42), to otrzymamy równość następującą

$$\begin{aligned}&[X(\varrho_1)+\lambda_1\varrho_1+\varrho_2]\,\overline{X}^{(k-1)}(\boldsymbol{A}) + [X(\varrho_2)+\lambda_2\varrho_1+\varrho_3]\,\overline{X}^{(k-2)}(\boldsymbol{A}) + \ldots\\ &\quad + [X(\varrho_{k-1})+\lambda_{k-1}\varrho_1+\varrho_k]\,\overline{X}^{(1)}(\boldsymbol{A}) + [X(\varrho_k)+\lambda_k\varrho_1]\,\overline{X}^{(0)}(\boldsymbol{A}) = 0.\end{aligned}$$

Ponieważ afinor $\boldsymbol{A}$ należy do k-ej kategorji, przeto wszystkie spółczynniki w ostatniej równości muszą być równe zeru. Otrzymujemy w ten sposób następujące warunki

$$\begin{aligned}X(\varrho_1)+\lambda_1\varrho_1+\varrho_2&=0,\\ X(\varrho_2)+\lambda_2\varrho_1+\varrho_3&=0,\\ &\ldots\ldots\ldots\\ X(\varrho_{k-1})+\lambda_{k-1}\varrho_1+\varrho_k&=0,\\ X(\varrho_k)+\lambda_k\varrho_1&=0.\end{aligned}$$

Jeżeli z równości powyższych wyrugujemy $\varrho_2, \varrho_3, \ldots, \varrho_k$, otrzymamy następującą zależność, którą musi spełniać niewiadoma ϱ_1:

(44) $$\begin{aligned}&X^{(k)}(\varrho_1) + X^{(k-1)}(\lambda_1\varrho_1) - X^{(k-2)}(\lambda_2\varrho_1) + \ldots + (-1)^{i-1}X^{(k-i)}(\lambda_i\varrho_1)\\ &\quad + \ldots + (-1)^{k-1}X^{(0)}(\lambda_k\varrho_1) = 0.\end{aligned}$$

Pozostałe niewiadome obliczamy zapomocą wzorów

$$\begin{aligned}\varrho_i = (-1)^{i-1}\,[X^{(i-1)}(\varrho_1) + X^{(i-2)}(\lambda_1\,\varrho_1) - \ldots + (-1)^{l-1} X^{(i-l-1)}(\lambda_l\,\varrho_1) \\ + \ldots + (-1)^{i-2}\,X^{(0)}(\lambda_{i-1}\,\varrho_1)] \qquad (i = 2, 3, \ldots, k).\end{aligned} \tag{45}$$

Widzimy więc, że każdemu rozwiązaniu równania (44) odpowiada afinor A^* niezmienniczy dla przekształcenia Xf tj. taki, że

$$\overline{X}(A^*) = 0.$$

Zastosujemy poprzednie rozważania do dwóch szczególnych przypadków.

1⁰) Załóżmy, że afinor A jest skośnym afinorem spółzmienniczym rzędu r o składowych $A_{\varkappa_1\ldots\varkappa_r}$; składowe afinora A^* określonego wzorem (43) oznaczmy symbolami $A^*_{\varkappa_1\ldots\varkappa_r}$ i przyjmijmy

$$\Omega = \sum_{(\varkappa)} A_{\varkappa_1\ldots\varkappa_r}\, dx^{\varkappa_1}\ldots dx^{\varkappa_r}, \quad \Omega^* = \sum_{(\varkappa)} A^*_{\varkappa_1\ldots\varkappa_r}\, dx^{\varkappa_1}\ldots dx^{\varkappa_r}.$$

Wynik otrzymany poprzednio możemy wypowiedzieć w następujący sposób: jeżeli A jest afinorem k-ej kategorji ze względu na przekształcenie Xf i jeżeli we wzorze (43) ϱ_1 oznacza jeden z pierwiastków równania (44), a $\varrho_2, \ldots, \varrho_\varkappa$ mają wartości określone wzorami (45), to całka $\int \Omega^*$ jest niezmiennikiem przekształcenia Xf. Jeżeli $k = 1$, mamy następujący wniosek: jeżeli uogólnione równanie Pfaffa $\Omega = 0$ dozwala na przekształcenie Xf: $X(\Omega) = \lambda\,\Omega$, to całka $\int \varrho\,\Omega$ jest niezmiennikiem przekształcenia Xf dla każdego czynnika ϱ, spełniającego równanie $X(\log\varrho) + \lambda = 0$ [15]).

2⁰) Załóżmy teraz, że afinor A, o którym była mowa na początku tego ustępu, jest przeciwzmienniczym wektorem o składowych $A^\varkappa$ i oznaczmy symbolami $A^{*\lambda}$ składowe afinora A^* określonego wzorem (43); przyjmijmy nadto $A^*f = A^*\,\partial_\varkappa f$. Możemy więc teraz powiedzieć: jeżeli we wzorze (43) ϱ_1 oznacza jakąkolwiek całkę równania (44), a $\varrho_2, \ldots, \varrho_\varkappa$ wyrażenia (45), to przekształcenie infinitezymalne A^*f jest przemienne z przekształceniem Xf (ust. **6**).

Klasyfikacja afinorów skośnych, o której była mowa w tym ustępie, jest uogólnieniem klasyfikacji, którą po raz pierwszy zastosował prof. Żorawski do wektorów przestrzeni trójwymiarowej [16]).

8. Przedmiotem tego ustępu będzie operacja na przeciwzmienniczych gęstościach afinalnych, zwana dywergencją i jej związek z operacją Xf. Założmy mianowicie, że w przestrzeni X_n dana jest przeciwzmiennicza gęstość afinalna $\mathfrak{v}$ o ciężarze k, rzędu s. Niechaj symbole $\overset{k}{\mathfrak{v}}{}^{\mu_1\ldots\mu_s}$ będą składowemi gęstości $\mathfrak{v}$. Ustalmy w przestrzeni X_n dowolne, symetryczne przesunięcie równoległe o spółczynnikach $\Gamma^\mu_{\varkappa\lambda}$. Zachowując oznaczenia ust. 2, mamy na podstawie wzoru (15b)

$$\nabla_\varkappa \overset{k}{\mathfrak{v}}{}^{\mu_1\ldots\mu_s} = \partial_\varkappa \overset{k}{\mathfrak{v}}{}^{\mu_1\ldots\mu_s} + \sum_{j=1}^{s} \Gamma^{\mu_j}_{\varrho\varkappa}\, \overset{k}{\mathfrak{v}}{}^{\mu_1\ldots\mu_{j-1}\varrho\,\mu_{j+1}\ldots\mu_s} - k\,\Gamma_\varkappa \overset{k}{\mathfrak{v}}{}^{\mu_1\ldots\mu_s}.$$

Poddajmy tę równość operacji zwężenia (Verjüngung, saturation) za pośrednictwem wskaźników $\varkappa$ i μ_s; będzie

$$\begin{aligned}\nabla_\sigma \overset{k}{\mathfrak{v}}{}^{\mu_1\ldots\mu_{s-1}\sigma} = \partial_\sigma \overset{k}{\mathfrak{v}}{}^{\mu_1\ldots\mu_{s-1}\sigma} + \sum_{j=1}^{s-1} \Gamma^{\mu_s}_{\varrho\sigma}\, \overset{k}{\mathfrak{v}}{}^{\mu_1\ldots\mu_{j-1}\varrho\,\mu_{j+1}\ldots\mu_{s-1}\sigma} \\ + \Gamma^\sigma_{\varrho\sigma} \overset{k}{\mathfrak{v}}{}^{\mu_1\ldots\mu_{s-1}\sigma} - k\,\Gamma_\sigma \overset{k}{\mathfrak{v}}{}^{\mu_1\ldots\mu_{s-1}\sigma}.\end{aligned} \tag{46}$$

Ponieważ wielkości $\Gamma^{\mu_j}_{\varrho\sigma}$ są w myśl założenia symetryczne w dolnych wskaźnikach, a wielkości $\overset{k}{\mathfrak{v}}{}^{\mu_1\ldots\mu_s}$ skośnie symetryczne we wszystkich wskaźnikach, przeto jest

$$\Gamma^{\mu_j}_{\varrho\sigma}\, \mathfrak{v}^{\mu_1\ldots\mu_{j-1}\varrho\,\mu_{j-1}\ldots\mu_{s-1}\sigma} = 0.$$

Mamy nadto (ust. 2)

$$\Gamma^\sigma_{\varrho\sigma} = \Gamma_\varrho.$$

Z równości (46) wynika więc następujący wzór

$$\nabla_\sigma \overset{k}{\mathfrak{v}}{}^{\mu_1\ldots\mu_{s-1}\sigma} = \partial_\sigma \overset{k}{\mathfrak{v}}{}^{\mu_1\ldots\mu_{s-1}\sigma} - (k-1)\,\Gamma_\sigma \overset{k}{\mathfrak{v}}{}^{\mu_1\ldots\mu_{s-1}\sigma}.$$

W szczególności dla gęstości o ciężarze $+1$ będzie

$$\nabla_\sigma \overset{1}{\mathfrak{v}}{}^{\mu_1\ldots\mu_{s-1}\sigma} = \partial_\sigma \overset{1}{\mathfrak{v}}{}^{\mu_1\ldots\mu_{s-1}\sigma}.$$

Z równości tej wynika, że wielkości $\partial_\sigma \overset{1}{\mathfrak{v}}{}^{\mu_1\ldots\mu_{s-1}\sigma}$ są składowemi przeciwzmienniczej gęstości afinalnej rzędu $s-1$ [17]). Gęstość tę będziemy oznaczali symbolami $\mathfrak{div}\,\mathfrak{v}$. Jest jak łatwo stwierdzić

$$\mathfrak{div}\,\mathfrak{div}\,\mathfrak{v} = 0.$$

Istotnie, w myśl definicji składowemi tej gęstości afinalnej są wielkości $\partial_\varrho\,\partial_\sigma \overset{1}{\mathfrak{v}}{}^{\mu_1\ldots\mu_{s-2}\varrho\,\sigma}$; ponieważ operacje ∂_ϱ i ∂_σ są przemienne, a wielkości $\overset{1}{\mathfrak{v}}{}^{\mu_1\ldots\mu_{s-2}\varrho\,\sigma}$ są skośnie symetryczne we wszystkich wskaźnikach, przeto

$$\partial_\varrho\,\partial_\sigma \overset{1}{\mathfrak{v}}{}^{\mu_1\ldots\mu_{s-2}\varrho\,\sigma} = 0,$$

co mieliśmy wykazać.

[15]) Por. notę autora w C. R. Ac. de Paris, t. 192, 1931, str. 867.

[16]) K. Żorawski, Über gewisse Eigenschaften der Wirbel, Bull. Ac. de Cracovie, 1915; Über Einteilung der Bewegungen kontinuierlicher Medien in gewisse Kategorien, Ibid., 1917; Über gewisse Relationen, welche Deformationen und kontinuierliche Bewegungen von Medien betreffen, Ibid., 1915.

[17]) Por. H. Weyl, Raum-Zeit-Materie, 5. Aufl., 1923, str. 111.

Zachowując w dalszym ciągu założenie, że gęstość $\mathfrak{V}$ posiada ciężar $+1$, obliczmy symbol Poissona dla operacyj $\overline{X}(\mathfrak{V})$ i $\mathfrak{div}(\mathfrak{V})$ czyli wyrażenie $\overline{X}(\mathfrak{div}\,\mathfrak{V}) - \mathfrak{div}\,\overline{X}(\mathfrak{V})$. Mamy przy zastosowaniu wzoru (27)

$$\overline{X}(\partial_\sigma \overset{1}{\mathfrak{v}}{}^{\mu_1\cdots\mu_{s-1}\sigma}) = X^\varrho\,\partial_\varrho\,\partial_\sigma \overset{1}{\mathfrak{v}}{}^{\mu_1\cdots\mu_{s-1}\sigma} - \sum_{j=1}^{s-1}\partial_\sigma \overset{1}{\mathfrak{v}}{}^{\mu_1\cdots\mu_{j-1}\varrho\,\mu_{j+1}\cdots\mu_{s-1}\sigma}\,\partial_\varrho X^{\mu_j}$$
$$+\,\partial_\sigma \overset{1}{\mathfrak{v}}{}^{\mu_1\cdots\mu_{s-1}\sigma}\,\partial_\varrho X^\varrho,$$

$$\partial_\sigma \overline{X}(\overset{1}{\mathfrak{v}}{}^{\mu_1\cdots\mu_{s-1}\sigma}) = \partial_\sigma[X^\varrho\,\partial_\varrho \overset{1}{\mathfrak{v}}{}^{\mu_1\cdots\mu_{s-1}\sigma} - \sum_{j=1}^{s-1}\overset{1}{\mathfrak{v}}{}^{\mu_1\cdots\mu_{j-1}\varrho\,\mu_{j+1}\cdots\mu_{s-1}\sigma}\,\partial_\varrho X^{\mu_j}$$
$$-\,\overset{1}{\mathfrak{v}}{}^{\mu_1\cdots\mu_{s-1}\varrho}\,\partial_\varrho X^\sigma + \overset{1}{\mathfrak{v}}{}^{\mu_1\cdots\mu_{s-1}\sigma}\,\partial_\varrho X^\varrho].$$

Jeżeli wykonamy operację ∂_σ w ostatniej równości, otrzymamy

$$\partial_\sigma \overline{X}(\overset{1}{\mathfrak{v}}{}^{\mu_1\cdots\mu_{s-1}\sigma}) = X^\varrho\,\partial_\sigma\partial_\varrho \overset{1}{\mathfrak{v}}{}^{\mu_1\cdots\mu_{s-1}\sigma} + \partial_\sigma X^\varrho\,\partial_\varrho \overset{1}{\mathfrak{v}}{}^{\mu_1\cdots\mu_{s-1}\sigma}$$
$$-\sum_{j=1}^{s-1}\overset{1}{\mathfrak{v}}{}^{\mu_1\cdots\mu_{j-1}\varrho\,\mu_{j+1}\cdots\mu_{s-1}\sigma}\,\partial_\sigma\partial_\varrho X^{\mu_j} - \sum_{j=1}^{s-1}\partial_\sigma \overset{1}{\mathfrak{v}}{}^{\mu_1\cdots\mu_{j-1}\varrho\,\mu_{j+1}\cdots\mu_{s-1}\sigma}\,\partial_\varrho X^{\mu_j}$$
$$-\,\overset{1}{\mathfrak{v}}{}^{\mu_1\cdots\mu_{s-1}\varrho}\,\partial_\sigma\partial_\varrho X^\sigma - \partial_\sigma \overset{1}{\mathfrak{v}}{}^{\mu_1\cdots\mu_{s-1}\varrho}\,\partial_\varrho X^\sigma + \partial_\sigma \overset{1}{\mathfrak{v}}{}^{\mu_1\cdots\mu_{s-1}\sigma}\,\partial_\varrho X^\varrho + \overset{1}{\mathfrak{v}}{}^{\mu_1\cdots\mu_{s-1}\sigma}\,\partial_\varrho\partial_\sigma X^\varrho.$$

Jest jednak

$$\overset{1}{\mathfrak{v}}{}^{\mu_1\cdots\mu_{j-1}\varrho\,\mu_{j+1}\cdots\mu_{s-1}\sigma}\,\partial_\varrho\partial_\sigma X^{\mu_j} = 0,$$

ponieważ wielkości $\partial_\varrho\partial_\sigma X^{\mu_j}$ są symetryczne względem wskaźników ϱ, σ, a wielkości $\overset{1}{\mathfrak{v}}{}^{\mu_1\cdots\mu_{j-1}\varrho\,\mu_{j+1}\cdots\mu_{s-1}\sigma}$ skośnie symetryczne względem tych samych wskaźników. Mamy nadto

$$\partial_\sigma X^\varrho\,\partial_\varrho \overset{1}{\mathfrak{v}}{}^{\mu_1\cdots\mu_{s-1}\sigma} - \partial_\sigma \overset{1}{\mathfrak{v}}{}^{\mu_1\cdots\mu_{s-1}\varrho}\,\partial_\varrho X^\sigma = 0,$$
$$\overset{1}{\mathfrak{v}}{}^{\mu_1\cdots\mu_{s-1}\sigma}\,\partial_\varrho\partial_\sigma X^\varrho - \overset{1}{\mathfrak{v}}{}^{\mu_1\cdots\mu_{s-1}\varrho}\,\partial_\sigma\partial_\varrho X^\sigma = 0.$$

Będziemy więc mogli napisać

$$\partial_\sigma \overline{X}(\overset{1}{\mathfrak{v}}{}^{\mu_1\cdots\mu_{s-1}\sigma}) = X^\varrho\,\partial_\sigma\partial_\varrho \overset{1}{\mathfrak{v}}{}^{\mu_1\cdots\mu_{s-1}\sigma} - \sum_{j=1}^{s-1}\partial_\sigma \overset{1}{\mathfrak{v}}{}^{\mu_1\cdots\mu_{j-1}\varrho\,\mu_{j+1}\cdots\mu_{s-1}\sigma}\,\partial_\varrho X^{\mu_j}$$
$$+\,\partial_\sigma \mathfrak{v}^{\mu_1\cdots\mu_{s-1}\sigma}\,\partial_\varrho X^\varrho.$$

Jeśli tę równość porównamy z poprzednio otrzymanym wzorem na $\overline{X}(\partial_\sigma \overset{1}{\mathfrak{v}}{}^{\mu_1\cdots\mu_{s-1}\sigma})$, znajdziemy

$$\overline{X}(\partial_\sigma \overset{1}{\mathfrak{v}}{}^{\mu_1\cdots\mu_{s-1}\sigma}) = \partial_\sigma \overline{X}(\overset{1}{\mathfrak{v}}{}^{\mu_1\cdots\mu_{s-1}\sigma})$$

czyli

(47) $$\overline{X}(\mathfrak{div}\,\mathfrak{V}) = \mathfrak{div}\,\overline{X}(\mathfrak{V});$$

operacje $\overline{X}(\mathfrak{V})$ i $\mathfrak{div}\,\mathfrak{V}$ są więc przemienne.

9. W poprzedzających ustępach mówiliśmy jedynie o takich operacjach na afinorach skośnych i gęstościach afinalnych, które zachowują się niezmiennie przy wszelkich przekształceniach układu postaci (1). Obecnie będziemy rozważali afinory skośne w takich układach spółrzędnych rozciągłości X_n, które z danego układu x^α $(\alpha = 1, 2, \ldots, n)$ otrzymuje się zapomocą przekształceń o wyznaczniku równym. 1. Układy takie nazywać będziemy układami równoważnemi danemu.

Uważajmy w rozciągłości X_n dowolny skośny afinor przeciwzmienniczy A o składowych $A^{\varkappa_1\cdots\varkappa_r}$. Ustalmy w X_n dowolne symetryczne przesunięcie równoległe o spółczynnikach $\Gamma^\mu_{\varkappa\lambda} = \Gamma^\mu_{\lambda\varkappa}$. Będzie więc [18])

$$\nabla_\lambda A^{\varkappa_1\cdots\varkappa_r} = \partial_\lambda A^{\varkappa_1\cdots\varkappa_r} + \sum_{j=1}^{r}\Gamma^{\varkappa_j}_{\sigma\lambda}\,A^{\varkappa_1\cdots\varkappa_{j-1}\sigma\varkappa_{j+1}\cdots\varkappa_r}.$$

Zwężając tę równość za pośrednictwem wskaźników λ i $\varkappa_r$, otrzymamy

$$\nabla_\varrho A^{\varkappa_1\cdots\varkappa_{r-1}\varrho} = \partial_\varrho A^{\varkappa_1\cdots\varkappa_{r-1}\varrho} + \sum_{j=1}^{r-1}\Gamma^{\varkappa_j}_{\sigma\varrho}\,A^{\varkappa_1\cdots\varkappa_{j-1}\sigma\varkappa_{j+1}\varkappa_{r-1}\varrho} + \Gamma^\varrho_{\sigma\varrho}\,A^{\varkappa_1\cdots\varkappa_{r-1}\sigma}.$$

Jeżeli uwzględnimy, że jest

$$\Gamma^{\varkappa_j}_{\sigma\varrho}\,A^{\varkappa_1\cdots\varkappa_{j-1}\sigma\varkappa_{j+1}\cdots\varkappa_{r-1}\varrho} = 0$$

z powodu symetrji spółczynników $\Gamma^{\varkappa_j}_{\sigma\varrho}$ we wskaźnikach ϱ, σ i skośnej symetrji składowych $A^{\varkappa_1\cdots\varkappa_{j-1}\varrho\varkappa_{j+1}\cdots\varkappa_{r-1}\sigma}$ w tych samych wskaźnikach, oraz jeżeli przyjmiemy

$$\Gamma^\varrho_{\sigma\varrho} = \Gamma_\sigma,$$

to równość ostatnią będziemy mogli napisać w następujący sposób

(48) $$\nabla_\varrho A^{\varkappa_1\cdots\varkappa_{r-1}\varrho} = \partial_\varrho A^{\varkappa_1\cdots\varkappa_{r-1}\varrho} + \Gamma_\sigma A^{\varkappa_1\cdots\varkappa_{r-1}\sigma}.$$

Wiadomo jednak [19]), że przy przejściu do nowego układu spółrzędnych za pośrednictwem przekształcenia (1), wielkości Γ_σ przekształcają się według wzorów

$$'\Gamma_\varrho = \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^\varrho}\Gamma_\sigma + \partial_\varrho \log \Delta.$$

Jeżeli więc nowy układ spółrzędnych $'x^\alpha$ będzie układem równoważnym danemu: $\Delta = 1$, to będziemy mieli zależności

$$'\Gamma_\varrho = \frac{\partial x^\sigma}{\partial' x^\varrho}\Gamma_\sigma,$$

które pokazują, że w układach równoważnych wielkości Γ_σ zachowują się tak

[18]) J. A. Schouten, R. K., str. 65.

[19]) V. Hlavatý, Théorie des densités dans le déplacement général, Annali di Mat., ser. IV, t. 5, (1927/8), str. 76.

jak składowe wektora spółzmienniczego. Z tego wynika, że w równości (48) wyrażenia $\Gamma_\sigma A^{\varkappa_1\dots\varkappa_{r-1}\sigma}$ przekształcają się tak jak składowe przeciwzmienniczego afinora skośnego rzędu $r-1$; ponieważ i lewej stronie wspomnianej równości przysługuje ta sama własność, przeto możemy stwierdzić, że wielkości $\partial_\varrho A^{\varkappa_1\dots\varkappa_{r-1}\varrho}$ zachowują się w układach równoważnych tak jak składowe skośnego afinora przeciwzmienniczego rzędu $s-1$. Afinor ten oznaczymy symbolem $div\, \boldsymbol{A}$. Rachunkiem podobnym do tego, który nas doprowadził do związku (47), znajdziemy łatwo

$$\overline{X}(\partial_\sigma A^{\varkappa_1\dots\varkappa_{r-1}\sigma}) - \partial_\sigma \overline{X}(A^{\varkappa_1\dots\varkappa_{r-1}\sigma}) = A^{\varkappa_1\dots\varkappa_{r-1}\varrho}\,\partial_\varrho\,\partial_\sigma X^\sigma \tag{49}$$

czyli

$$\overline{X}(div\, \boldsymbol{A}) - div\, \overline{X}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}\cdot grad\; div\, \boldsymbol{X}, \tag{49'}$$

gdzie, zgodnie z powszechnym zwyczajem, symbolem $grad\, f$ oznaczyliśmy wektor spółzmienniczy o składowych $\partial_\varrho f$, a symbolem $\boldsymbol{X}$ wektor przeciwzmienniczy o składowych X^ϱ.

Załóżmy, że $div\, \boldsymbol{X} = 0$ i utwórzmy układ równań różniczkowych pierwszego rzędu

$$\frac{dx^\alpha}{X^\alpha} = dt \qquad (\alpha = 1, 2, \dots, n). \tag{50}$$

Za przykładem prof. T. Levi-Civita układ (50), posiadający wymienioną poprzednio własność, nazywać będziemy układem Liouville'a.

W przypadku układu Liouville'a tożsamości (49) i (49′) przyjmują postać

$$\overline{X}(\partial\ A^{\varkappa_1\dots\varkappa_{r-1}\sigma}) = \partial_\sigma \overline{X}(A^{\varkappa_1\dots\varkappa_{r-1}\sigma}) \tag{51}$$

lub

$$\overline{X}(div\, \boldsymbol{A}) = div\, \overline{X}(\boldsymbol{A}). \tag{51'}$$

Udowodnimy poniżej kilka własności układu Liouville'a.

a) Niechaj będzie dany wektor przeciwzmienniczy $\boldsymbol{Y}\{Y^\varrho\}$ i odpowiadające mu przekształcenie infinitezymalne $Yf = Y^\varrho\, \partial_\varrho f$. Załóżmy, że przekształcenia Xf i Yf są przemienne, innemi słowy, że równania $Xf = 0$, $Yf = 0$ tworzą układ zupełny Jacobi'ego. Mamy więc (ust. **6**, równość (33))

$$\overline{X}(Y^\varrho) = 0.$$

Stosując do wektora $\boldsymbol{Y}$ tożsamość (51), znajdujemy

$$X(\partial_\varrho Y^\varrho) = 0,$$

t. zn. funkcja $\partial_\varrho Y^\varrho$ jest całką pierwszą układu (51). Możemy zatem wypowiedzieć następujące

Twierdzenie 1. Jeżeli równanie $Yf = Y^\varrho\, \partial_\varrho f = 0$ tworzy układ zupełny Jacobi'ego z równaniem $Xf = X^\varrho\, \partial_\varrho f = 0$, odpowiadającem układowi Liouville'a, to funkcja $\partial_\varrho Y^\varrho$ jest całką pierwszą układu Liouville'a.

b) W ustępie niniejszym rozważamy tylko takie układy spółrzędnych, które otrzymuje się z danego zapomocą przekształceń o wyznaczniku równym jedności. Przy tego rodzaju przekształceniach zanika oczywiście różnica pomiędzy afinorami a gęstościami afinalnemi (ust. 1). Za pośrednictwem równości (8) i (9) ustaliliśmy poprzednio odpowiedniość wzajemną między spółzmienniczemi gęstościami afinalnemi rzędu r i o ciężarze k a przeciwzmienniczemi gęstościami afinalnemi rzędu $n-r$ i o ciężarze $k+1$. Jeżeli się ograniczymy do układów równoważnych, określonych na początku tego ustępu, to odpowiedniość wspomniana przejdzie w odpowiedniość między skośnemi afinorami spółzmienniczemi rzędu r i skośnemi afinorami przeciwzmienniczemi rzędu $n-r$. Odpowiedniość tę będziemy mogli wypowiedzieć w następujący sposób: 1°) jeżeli $\boldsymbol{A}\{A_{\varkappa_1\dots\varkappa_r}\}$ jest skośnym afinorem spółzmienniczym rzędu r, to wielkości

$$^{*}A^{\bar{\varkappa}_1\dots\bar{\varkappa}_{n-1}} = (-1)^\varkappa A_{\varkappa_1\dots\varkappa_r}, \qquad \varkappa = \sum_{i=1}^{r} \varkappa_i + \frac{n(n-1)}{2} \tag{52}$$

są składowemi przeciwzmienniczego afinora skośnego, który oznaczać będziemy symbolem $^{*}\boldsymbol{A}$. (Zachowaliśmy tutaj wszystkie umowy i oznaczenia, przyjęte w rozważaniach, które doprowadziły nas do równości (7)); 2°) jeżeli afinor $\boldsymbol{B}\{B^{\varkappa_1\dots\varkappa_s}\}$ jest skośnym afinorem przeciwzmienniczym rzędu s, to wielkości

$$B^{*}_{\bar{\varkappa}_1\dots\bar{\varkappa}_{n-s}} = (-1)^\varkappa B^{\varkappa_1\dots\varkappa_s}, \qquad \varkappa = \sum_{i=1}^{r} \varkappa_i + \frac{n(n-1)}{2}, \tag{53}$$

są składowemi spółzmienniczego afinora skośnego, który oznaczać będziemy symbolem $\boldsymbol{B}^{*}$. W dalszym ciągu dla afinorów odpowiadających sobie zachowamy stale sposób oznaczania, przyjęty we wzorach (52) i (53). W ust. **4** przekształcenie infinitezymalne Xf przedłużyliśmy na składowe przeciwzmienniczych gęstości afinalnych o ciężarze $+1$ i spółzmienniczych gęstości afinalnych o ciężarze -1, otrzymując w ten sposób wzory (27). Stosując ówczesne rozważania do przekształcenia Xf, odpowiadającego układowi (50) typu Liouville'a i zachowując poprzednie oznaczenia, możemy wypowiedzieć następujący wniosek: jeżeli zachodzi równość $\overline{X}(\boldsymbol{A}) = 0$ wzgl. $\overline{X}(\boldsymbol{B}) = 0$, to jest także $\overline{X}(^{*}\boldsymbol{A}) = 0$, wzgl. $\overline{X}(\boldsymbol{B}^{*}) = 0$.

c) Niechaj będzie dany przeciwzmienniczy wektor $\boldsymbol{Y}\{Y^\varrho\}$ i odpowiadające mu przekształcenie infinitezymalne Yf; oznaczmy symbolem $\boldsymbol{Y}^{*}\{Y^{*}_{\bar{\varkappa}_1\dots\bar{\varkappa}_{n-1}}\}$ skośny afinor spółzmienniczy rzędu $n-1$ odpowiadający wektorowi $\boldsymbol{Y}$ na mocy poprzedzających rozważań b). Przyjmijmy nadto

$$\Omega_{n-1} = \sum_{(\varrho)} Y^{*}_{\varrho_1\dots\varrho_{n-1}}\, dx^{\varrho_1}\dots dx^{\varrho_{n-1}}.$$

Załóżmy, że równanie $Yf = 0$ tworzy układ zupełny Jacobiego z równaniem $Xf = 0$ odpowiadającem układowi Liouville'a. Jest więc (ust. **6**)

$$\overline{X}(Y) = 0;$$

z poprzedniego wynika przeto

$$\overline{X}(Y^*) = 0;$$

równość ta pokazuje, że całka $I_{n-1} = \int \Omega_{n-1}$ jest niezmiennikiem układu (50). Widoczną jest także rzeczą, że ostatnia równość pociąga tę, która ją poprzedza. Rezultat ten możemy wypowiedzieć w następujący sposób

Twierdzenie 2. Jeżeli dane jest równanie $Yf = 0$, tworzące układ zupełny Jacobiego z równaniem $Xf = 0$, odpowiadającem układowi (50) typu Liouville'a, to tem samem dany jest (bezwzględny) niezmiennik całkowy rzędu $n-1$ układu Liouville'a, i nawzajem.

d) Załóżmy, że całka

$$\int Y_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_{n-2}}\, dx^{\varkappa_1} \ldots dx^{\varkappa_{n-2}}$$

jest niezmiennikiem rzędu $n-2$ układu (50); jest więc

$$\overline{X}(Y_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_{n-2}}) = 0. \tag{54}$$

Oznaczmy symbolem $^*Y\{^*Y^{\lambda_1\lambda_2}\}$ skośny afinor przeciwzmienniczy drugiego rzędu, odpowiadający afinorowi $Y\{Y_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_{n-2}}\}$. Na mocy wyników, uzyskanych w punkcie b), z równości (54) wynika

$$\overline{X}(^*Y^{\lambda_1\lambda_2}) = 0,$$

stąd zaś ze względu na tożsamość (51)

$$\overline{X}(\partial_\varrho Y^{\lambda\varrho}) = 0.$$

Ostatnia równość wyraża fakt (ust. 6), że równanie $Yf = \partial_\varrho Y^{\lambda\sigma} \partial_\lambda f = 0$ tworzy z równaniem $Xf = 0$ układ zupełny Jacobi'ego. Mamy więc

Twierdzenie 3. Znajomość niezmiennika całkowego rzędu $n-2$ układu (50) typu Liouville'a daje zarazem równanie $Yf = 0$, tworzące układ zupełny Jacobi'ego z równaniem $Xf = 0$, odpowiadającem układowi Liouville'a.

II.

10. Niechaj x^α $(\alpha = 1, 2, \ldots, 2n)$ będą spółrzędnemi punktu przestrzeni $(2n)$-wymiarowej X_{2n}. Afinory przestrzeni X_{2n} oznaczać będziemy wielkiemi literami alfabetu łacińskiego, zaopatrzonemi we wskaźniki greckie przebiegające wartości od 1 do $2n$. Jeżeli w pewnym wzorze wskaźnik ograniczony będzie do przyjmowania wartości od 1 do n, oznaczać go będziemy małą literą łacińską; sumowanie rozciągające się na wartości wskaźnika od 1 do n oznaczać będziemy zwykłym symbolem Σ, w przypadku sumowania rozciągniętego na wartości od 1 do $2n$, znak sumy będziemy opuszczali. Przyjmijmy oznaczenie (symbol Poissona)

$$(f, g) = \sum_{i=1}^{n} \frac{D(f, g)}{D(x^r, x^{n+r})},$$

gdzie f, g oznaczają dwie dowolne funkcje zmiennych x^α $(\alpha = 1, 2, \ldots, 2n)$. Załóżmy, że dane jest przekształcenie spółrzędnych

$$'x^\alpha = 'x^\alpha\ (x^1, x^2, \ldots, x^{2n}),$$

spełniające warunki

$$('x^\alpha, 'x^\beta) = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } \beta - \alpha = n, \\ 0, & \quad " \quad |\beta - \alpha| \neq n. \end{cases}$$

Przekształcenie takie („przekształcenie stycznościowe w zmiennych x, p^u według Lie'go) nazywać będziemy przekształceniem (T). Wyznacznik funkcyjny przekształcenia (T) jest, jak wiadomo, równy jedności. W dalszym ciągu używać będziemy tylko takich układów spółrzędnych, które z danego układu otrzymuje się zapomocą przekształcenia (T).

Afinorem zasadniczym przestrzeni X_{2n} nazywać będziemy afinor skośny I o składowych spółzmienniczych $I_{\alpha\beta}$ określonych za pośrednictwem równości

$$I_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } \beta - \alpha = n, \\ 0, & \quad " \quad |\beta - \alpha| \neq n, \end{cases} \tag{55}$$
$$I_{\alpha\beta} + I_{\beta\alpha} = 0.$$

Jak łatwo stwierdzić, jest $\|I_{\alpha\beta}\| = 1$. Oznaczmy symbolem $I^{\alpha\beta}$ minor odpowiadający elementowi $I_{\alpha\beta}$ w wyznaczniku $\|I_{\alpha\beta}\|$ podzielony przez wartość wyznacznika. Wiadomo, iż wielkości $I^{\alpha\beta}$ przekształcają się przy wszelkich zmianach spółrzędnych tak jak składowe przeciwzmienniczego afinora skośnego drugiego rzędu. Z definicji wielkości $I^{\alpha\beta}$ wynikają związki

$$I_{\varrho\alpha} I^{\varrho\beta} = I_{\alpha\varrho} I^{\beta\varrho} = \delta^\beta_\alpha, \tag{56}$$

w których δ^β_α oznacza znany symbol Kroneckera ($\delta^\beta_\alpha = 1$, jeśli $\alpha = \beta$; $\delta^\beta_\alpha = 0$, jeśli $\alpha \neq \beta$). Z tych ostatnich zależności otrzymujemy

$$I^{\alpha\beta} + I^{\beta\alpha} = 0, \qquad I^{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } \beta - \alpha = n, \\ 0, & \quad " \quad |\beta - \alpha| \neq n. \end{cases} \tag{57}$$

Twierdzenie 1. Jeżeli układ spółrzędnych poddamy przekształceniu (T), to będzie $'I_{\alpha\beta} = I_{\alpha\beta}$, $'I^{\alpha\beta} = I^{\alpha\beta}$.

Dla dowodu zauważmy, że forma symboliczna

$$\omega = dx^1\, dx^{n+1} + dx^2\, dx^{n+2} + \ldots + dx^n\, dx^{2n}$$

zachowuje swą postać przy wszelkich przekształceniach (T). Z drugiej strony z równości (55) wynika, iż formę tę możemy przedstawić w postaci sumy

$$\omega = \tfrac{1}{2} I_{\varrho\sigma}\, dx^\varrho\, dx^\sigma.$$

Jeżeli więc w formę ω wprowadzimy nowe zmienne $'x^\alpha$ zapomocą przekształcenie (T), to wynik podstawienia będzie można przedstawić w postaci jednej z dwóch sum $\sum\limits_{r=1}^{n} d'x^r\, d'x^{n+r}$ i $\frac{1}{2}\, 'I_{\varrho\sigma}\, d'x^\varrho\, d'x^\sigma$. Będzie więc

$$\tfrac{1}{2}\, 'I_{\varrho\sigma}\, d'x^\varrho\, d'x^\sigma = \sum_{r=1}^{n} d'x^r\, d'x^{n+r},$$

skąd wnosimy, że spółczynniki $'I_{\varrho\sigma}$ spełniają związki (55), co dowodzi pierwszej części twierdzenia. Z równości $I_{\alpha\beta} = 'I_{\alpha\beta}$ i z definicji wielkości $I^{\alpha\beta}$ wynika, że musi być także $I^{\alpha\beta} = 'I^{\alpha\beta}$.

Afinor $\boldsymbol{I}$ o składowych spółzmienniczych $I_{\alpha\beta}$ odgrywa w dalszych rozważaniach rolę analogiczną do roli tensora zasadniczego w przestrzeniach Riemanna. W szczególności umawiamy się uważać wielkości $I^{\alpha\beta}$ za składowe przeciwzmiennicze afinora $\boldsymbol{I}$. Założmy obecnie, że w przestrzeni X_{2n} dany jest wektor $\boldsymbol{U}$ o składowych spółzmienniczych U_α. Przyjmijmy

$$U^\alpha = I^{\alpha\varrho}\, U_\varrho. \tag{58}$$

Wielkości U^α umawiamy się uważać za składowe przeciwzmiennicze wektora $\boldsymbol{U}$. Od składowych przeciwzmienniczych możemy powrócić do składowych spółzmienniczych zapomocą wzorów

$$U_\alpha = I_{\varrho\alpha}\, U^\varrho. \tag{59}$$

Równoważność równości (58) i (59) można łatwo stwierdzić przy pomocy zależności (56). Zarówno ze wzorów (58) jak i (59), przy uwzględnieniu równości (57) lub (55), wynikają następujące związki między składowemi spółzmienniczemi i przeciwzmienniczemi wektora $\boldsymbol{U}$

$$U^i = U_{n+i}, \qquad U^{n+i} = -U_i. \tag{60}$$

Widzimy więc, że wprowadzenie afinora zasadniczego $\boldsymbol{I}$ usunęło konieczność odróżniania wektorów przeciwzmienniczych i spółzmienniczych. Każdemu wektorowi spółzmienniczemu możemy, jak widać z poprzedniego, przyporządkować określony wektor spółzmienniczy, i nawzajem. Wektory w ten sposób przyporządkowane możemy więc uważać jako jeden i ten sam wektor. W dalszym ciągu nie będziemy mówili o wektorach spółzmienniczych, lecz o składowych spółzmienniczych i przeciwzmienniczych wektora. Umowa powyższa znajduje

analogiczne zastosowanie w przypadku afinorów wyższych rzędów. Tak np., gdy dany jest afinor drugiego rzędu o składowych spółzmienniczych $A_{\alpha\beta}$, to jego składowe mieszane i przeciwzmiennicze obliczać będziemy zapomocą wzorów

$$A_{\alpha}{}^{\cdot\beta} = I^{\beta\varrho} A_{\alpha\varrho}, \qquad A^{\alpha}{}_{\cdot\beta} = I^{\alpha\varrho} A_{\varrho\beta}, \qquad A^{\alpha\beta} = I^{\alpha\varrho} I^{\beta\sigma} A_{\varrho\sigma}.$$

Nawzajem, od składowych przeciwzmienniczych $A^{\alpha\beta}$ możemy powrócić do składowych spółzmienniczych za pośrednictwem wzorów

$$A_{\alpha\beta} = I_{\varrho\alpha} I_{\sigma\beta} A^{\varrho\sigma}.$$

Dla afinora zasadniczego wzory poprzednie przyjmują postać

$$I_{\alpha\beta} = I_{\varrho\alpha} I_{\sigma\beta} I^{\varrho\sigma}, \quad I^{\alpha\beta} = I^{\alpha\varrho} I^{\beta\sigma} I_{\varrho\sigma}, \quad I^{\alpha}{}_{\cdot\beta} = I^{\alpha\varrho} I_{\varrho\beta}, \quad I_{\alpha}{}^{\cdot\beta} = I^{\beta\varrho} I_{\alpha\varrho}. \tag{61}$$

Uwzględniając związki (55) i (57), otrzymamy z zależności poprzednich następujące równości

$$I^{\alpha}{}_{\cdot\beta} = \begin{cases} -1, & \text{jeśli } \alpha = \beta, \\ 0, & \ \alpha \neq \beta; \end{cases} \qquad I_{\alpha}{}^{\cdot\beta} = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } \alpha = \beta, \\ 0, & \ \alpha \neq \beta. \end{cases} \tag{61'}$$

Umowy poprzednie sformułujemy teraz ogólnie. Załóżmy w tym celu, iż dany jest dowolny afinor o składowych $A^{(\alpha)\varkappa(\beta)}_{\cdot\;\cdot\;\cdot\;(\gamma)}$; (α), (β), (γ) oznaczają tutaj grupy, z których każda może być złożona z dowolnej liczby wskaźników. Wskaźnik $\varkappa$ obniżamy zapomocą operacji

$$A^{(\alpha)\cdot(\beta)}_{\cdot\;\varkappa\;\cdot\;(\gamma)} = I_{\varrho\varkappa} A^{(\alpha)\varrho\,(\beta)}_{\cdot\;\cdot\;\cdot\;(\gamma)}. \tag{62 a}$$

Odwrotną zamianę określamy wzorem

$$A^{(\alpha)\varkappa(\beta)}_{\cdot\;\cdot\;\cdot\;(\gamma)} = I^{\varkappa\varrho} A^{(\alpha)\cdot(\beta)}_{\cdot\;\varrho\;\cdot\;(\gamma)}. \tag{62 b}$$

Wynikają stąd, ze względu na równości (55) i (57), następujące prawidła obniżania i podwyższania wskaźnika

$$A^{(\alpha)\,i\,(\beta)}_{\cdot\;\cdot\;\cdot\;(\gamma)} = A^{(\alpha)\;\cdot\;\;(\beta)}_{\cdot\;n+i\;\cdot\;(\gamma)}, \qquad A^{(\alpha)\,n+i\,(\beta)}_{\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;(\gamma)} = -A^{(\alpha)\cdot(\beta)}_{\cdot\;i\;\cdot\;(\gamma)}. \tag{63}$$

Jak widzimy, obniżanie i podwyższanie wskaźnika zapomocą składowych afinora zasadniczego $\boldsymbol{I}$ odbywa się w sposób podobny do analogicznej operacji w przestrzeniach Riemanna, dokonywanej za pośrednictwem składowych $g_{\varkappa\lambda}$ i $g^{\varkappa\lambda}$ zasadniczego tensora metrycznego. Zachodzi tu jednak pewna różnica, wynikająca ze skośnej symetrji afinora $\boldsymbol{I}$; musimy mianowicie podkreślić, że obniżanie wskaźnika dokonywa się zawsze zapomocą pierwszego wskaźnika składowej $I_{\alpha\beta}$ jako wskaźnika niemego, a podwyższanie zapomocą drugiego wskaźnika składowej $I^{\alpha\beta}$ jako wskaźnika niemego. W przestrzeniach Riemanna porządek ten jest oczywiście obojętny z powodu symetrji składowych zasadniczego tensora metrycznego tychże przestrzeni. Z faktu, któryśmy powyżej podkreślili, wynikają pewne różnice w t. zw. „jeu des indices" w porównaniu z przestrzeniami Riemanna. Na jedną z tych różnic musimy tutaj zwrócić uwagę. Załóżmy mianowicie, że dane jest wyrażenie

$$A_{\alpha\varrho} B^{\beta\varrho},$$

w którem ϱ jest wskaźnikiem niemym (wskaźnikiem sumowania). W myśl poprzednich reguł mamy jednak

$$A_{\alpha\varrho} = I_{\sigma\varrho} A_{\alpha}^{\cdot\sigma}, \quad B^{\beta\varrho} = I^{\varrho\tau} B^{\beta}_{\cdot\tau};$$

będzie więc

$$A_{\alpha\varrho} B^{\beta\varrho} = I_{\sigma\varrho} I^{\varrho\tau} A_{\alpha}^{\cdot\sigma} B^{\beta}_{\cdot\tau}.$$

Ponieważ zaś z zależności (61) wynika równość

$$I_{\sigma\varrho} I^{\varrho\tau} = I^{\tau\varrho} I_{\varrho\sigma} = I^{\tau}_{\cdot\sigma},$$

przeto możemy napisać

$$A_{\alpha\varrho} B^{\beta\varrho} = I^{\tau}_{\cdot\sigma} A_{\alpha}^{\cdot\sigma} B^{\beta}_{\cdot\tau},$$

co po uwzględnieniu zależności (61′) daje ostatecznie [20])

$$A_{\alpha\varrho} B^{\beta\varrho} = - A_{\alpha}^{\cdot\varrho} B^{\beta}_{\cdot\varrho}. \tag{64}$$

11. Zajmiemy się obecnie niektóremi operacjami wykonywanemi na afinorach przestrzeni X_{2n}, w której jest dany afinor zasadniczy $\boldsymbol{I}$. Uważajmy najpierw dwa dowolne wektory $\boldsymbol{U}\{U_\alpha\}$, $\boldsymbol{V}\{V_\alpha\}$; iloczynem skalarnym tych wektorów nazywać będziemy wyrażenie

$$I^{\varrho\sigma} U_\varrho V_\sigma$$

i oznaczać je będziemy symbolem $\boldsymbol{UV}$. Stosując reguły poprzedniego ustępu o obniżaniu i podwyższaniu wskaźników (równości (58), (61), (61′) i (64)) możemy iloczyn skalarny przedstawić zapomocą jednego z wyrażeń następujących

$$\boldsymbol{UV} = I^{\varrho\sigma} U_\varrho V_\sigma = I_{\varrho\sigma} U^\varrho V^\sigma = U_\varrho V^\varrho = - U^\varrho V_\varrho. \tag{65}$$

Jeżeli wreszcie uwzględnimy zależności (60), to iloczyn ten przyjmie postać

$$\boldsymbol{UV} = 2 \sum_{r=1}^{n} U_{[r} V_{n+r]} \tag{66a}$$

albo też

$$\boldsymbol{UV} = 2 \sum_{r=1}^{n} U^{[r} V^{n+r]}. \tag{66b}$$

Jeżeli zachodzi równość $\boldsymbol{UV} = 0$, mówić będziemy, iż wektory $\boldsymbol{U}$ i $\boldsymbol{V}$ znajdują się w inwolucji. — Ze wzorów (65) i ze skośnej symetrji afinora zasadniczego wynika, iż jest

$$\boldsymbol{UV} + \boldsymbol{VU} = 0;$$

stąd wynika

$$\boldsymbol{UU} = 0,$$

t. zn. każdy wektor jest ze sobą samym w inwolucji. Zauważmy jeszcze, że, jeśli wektory $\boldsymbol{U}$ i $\boldsymbol{V}$ są gradjentami dwóch funkcyj skalarnych u i v: $U_\alpha = \partial_\alpha u$, $V_\alpha = \partial_\alpha v$, to w myśl wzoru (66a) iloczyn $\boldsymbol{UV}$ staje się identyczny z nawiasem Poissona funkcyj u i v: $\boldsymbol{UV} = (u, v)$.

Jako iloczyn skalarny dwóch afinorów drugiego rzędu $\boldsymbol{A}\{A_{\alpha\beta}\}$ $\boldsymbol{B}\{B_{\alpha\beta}\}$ przyjmujemy wyrażenie

$$\boldsymbol{AB} = I^{\varrho_1\sigma_1} I^{\varrho_2\sigma_2} A_{\varrho_1\varrho_2} B_{\sigma_1\sigma_2}. \tag{67}$$

Zapomocą reguł ust. **10** o obniżaniu i podwyższaniu wskaźników możemy iloczyn ten przedstawić także w postaci jednego z następujących wzorów:

$$\boldsymbol{AB} = A_{\varrho\sigma} B^{\varrho\sigma} = A^{\varrho\sigma} B_{\varrho\sigma} = - A^{\varrho}_{\cdot\sigma} B_{\varrho}^{\cdot\sigma} = - A_{\varrho}^{\cdot\sigma} B^{\varrho}_{\cdot\sigma}.$$

W szczególności dla afinora zasadniczego mamy

$$\boldsymbol{II} = I_{\varrho\sigma} I^{\varrho\sigma} = I_{\varrho}^{\cdot\sigma} = - I^{\sigma}_{\cdot\sigma} = 2n.$$

Ze względu na późniejsze zastosowania przekształcimy wzór (67) w sposób następujący; mamy

$$\boldsymbol{AB} = \sum_{r=1}^{n} I^{r\sigma_1} I^{\varrho_2\sigma_2} A_{r\varrho_2} B_{\sigma_1\sigma_2} + \sum_{r=1}^{n} I^{n+r\sigma_1} I^{\varrho_2\sigma_2} A_{n+r\varrho_2} B_{\sigma_1\sigma_2}.$$

Z definicji afinora zasadniczego (ust. **10**) wynika, że składowa $I^{r\sigma_1}$ ma wartość 1, jeżeli $\sigma_1 = n + r$, a dla każdej innej wartości wskaźnika σ_1 jest $I^{r\sigma_1} = 0$; z tej samej definicji wynikają także równości $I^{n+rr} = -1$ oraz $I^{n+r\sigma_1} = 0$ dla wartości $\sigma_1 \neq r$. Na podstawie tej uwagi ostatni wzór na iloczyn skalarny $\boldsymbol{AB}$ daje

$$\boldsymbol{AB} = \sum_{r=1}^{n} I^{\varrho_2\sigma_2} (A_{r\varrho_2} B_{n+r\,\sigma_2} - A_{n+r\,\varrho_2} B_{r\,\sigma_2}),$$

co możemy także napisać w następujący sposób

$$\boldsymbol{AB} = \sum_{r=1}^{n} \{ \sum_{s=1}^{n} I^{s\,\sigma_2} (A_{rs} B_{n+r\,\sigma_2} - A_{n+r\,s} B_{r\,\sigma_2}) + I^{n+s\,\sigma_2} (A_{r\,n+s} B_{n+r\,\sigma_2} - A_{n+r\,n+s} B_{r\sigma_2}) \}.$$

Powołując się znowu na definicję składowych $I^{\alpha\beta}$ znajdziemy z łatwością

$$\boldsymbol{AB} = \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} (A_{rs} B_{n+r\,n+s} - A_{n+r\,s} B_{r\,n+s} - A_{r\,n+s} B_{n+r\,s} + A_{n+r\,n+s} B_{rs})$$

czyli

$$\boldsymbol{AB} = 4 \sum_{rs=1}^{n} A_{[r[s} B_{n+r]\,n+s]}. \tag{68}$$

[20]) Por. P. Appell, Traité de Mécanique rationnelle, t. V (1926), str. 39.

Jeżeli jest $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$, to wzór ten przyjmuje postać

(69) $$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}=2\sum_{rs=1}^{n}(A_{rs}A_{n+rn+s}-A_{rn+s}A_{n+rs}).$$

Zauważmy jeszcze, że ze wzoru (67) wynika równość

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}.$$

Rozważania poprzednie uogólnimy, obliczając iloczyn skalarny dwóch afinorów rzędu k: $\boldsymbol{A}\{A_{\alpha_1\ldots\alpha_k}\}$, $\boldsymbol{B}\{B_{\alpha_1\ldots\alpha_k}\}$, Przyjmiemy mianowicie

(70) $$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=I^{\varrho_1\sigma_1}I^{\varrho_2\sigma_2}\ldots I^{\varrho_k\sigma_k}A_{\varrho_1\ldots\varrho_k}B_{\sigma_1\ldots\sigma_k}.$$

Iloczyn ten możemy przedstawić także w inny sposób np.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=A_{\varrho_1\ldots\varrho_k}B^{\varrho_1\ldots\varrho_k}$$

albo

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=(-1)^k A^{\varrho_1\ldots\varrho_k}B_{\varrho_1\ldots\varrho_k}.$$

Z tych ostatnich wzorów wynika równość

(71) $$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=(-1)^k\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}.$$

Jeśli $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=0$, powiadamy, że afinory $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ są względem siebie w inwolucji. Z równości (71), wynika, że każdy afinor rzędu nieparzystego jest w inwolucji względem siebie samego.

Poświęcimy jeszcze kilka uwag operacji zwężania afinorów. Załóżmy w tym celu, że dany jest afinor rzędu k: $\boldsymbol{A}_k\{A_{\alpha_1\ldots\alpha_k}\}$ i przyjmijmy

(72) $$A_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-2}}=A_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-2}\varrho}^{\cdot\quad\cdot\;\;\cdot\;\varrho}.$$

Wielkości $A_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-2}}$ są, jak wiadomo, składowemi afinora rzędu $k-2$, który oznaczymy symbolem $\boldsymbol{A}_{k-2}$. Wyrazimy składowe tego afinora za pomocą składowych spółzmienniczych afinora $\boldsymbol{A}_k$. Zważmy, że równość (72) możemy zastąpić równością następującą

$$A_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-2}}=I^{\varrho\sigma}A_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-2}\varrho\sigma}$$

albo też równością

$$A_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-2}}=\sum_{r=1}^{n}I^{r\sigma}A_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-2}r\sigma}+\sum_{r=1}^{n}I^{n+r\sigma}A_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-2}n+r\sigma}.$$

Uwzględniając definicję składowych $I^{\alpha\beta}$, otrzymujemy stąd

$$A_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-2}}=\sum_{r=1}^{n}(A_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-2}rn+r}-A_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-2}n+rr})$$

czyli

$$A_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-2}}=2\sum_{r=1}^{n}A_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-2}[rn+r]}.$$

Jeżeli afinor $\boldsymbol{A}_k$ jest afinorem skośnym w dwóch ostatnich wskaźnikach, wzór ten przyjmuje postać

(73) $$A_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-2}}=2\sum_{r=1}^{n}A_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-2}rn+r}.$$

Załóżmy obecnie, że dany jest afinor skośny we wszystkich wskaźnikach, rzędu parzystego $2m$: $\boldsymbol{A}_{2m}\{A_{\alpha_1\ldots\alpha_{2m}}\}$. Poddając go m razy operacji zwężania w sposób poprzednio określony, otrzymujemy ciąg afinorów skośnych

$$\boldsymbol{A}_{2m}\{A_{\alpha_1\ldots\alpha_{2m}}\},\ \boldsymbol{A}_{2m-2}\{A_{\alpha_1\ldots\alpha_{2m-2}}\},\ldots,\ \boldsymbol{A}_2\{A_{\alpha_1\alpha_2}\},\ \boldsymbol{A}_0\{A_0\},$$

z których ostatni jest oczywiście skalarem. Składowe tach afinorów są określone wzorami

(74)
$$\begin{aligned}
A_{\alpha_1\ldots\alpha_{2m-2}}&=2\sum_{r_1=1}^{n}A_{\alpha_1\ldots\alpha_{2m-2}r_1n+r_1}\\
A_{\alpha_1\ldots\alpha_{2m-4}}&=2^2\sum_{r_1r_2=1}^{n}A_{\alpha_1\ldots\alpha_{2m-4}r_2n+r_2r_1n+r_1},\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
A_{\alpha_1\alpha_2}&=2^{m-1}\sum_{r_1r_2\ldots r_{m-1}=1}^{n}A_{\alpha_1\alpha_2r_{m-1}n+r_{m-1}\ldots r_2n+r_2r_1n+r_1},\\
A_0&=2^m\sum_{r_1\ldots r_m=1}^{n}A_{r_mn+r_m\ldots r_2n+r_2r_1n+r_1}.
\end{aligned}$$

Podobnie, jeżeli dany jest afinor skośny rzędu nieparzystego $2m+1$: $\boldsymbol{A}_{2m+1}\{A_{\alpha_1\ldots\alpha_{2m+1}}\}$, to zapomocą operacji zwężania możemy z niego otrzymać ciąg afinorów skośnych rzędów nieparzystych:

$$\boldsymbol{A}_{2m+1}\{A_{\alpha_1\ldots\alpha_{2m+1}}\},\ \boldsymbol{A}_{2m-1}\{A_{\alpha_1\ldots\alpha_{2m-1}}\},\ldots\ \boldsymbol{A}_3\{A_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}\},\ \boldsymbol{A}_1\{A_{\alpha_1}\}.$$

Składowe tych afinorów obliczamy zapomocą wzorów analogicznych do wzorów (74).

Celem uniknięcia nieporozumień zaznaczamy, że w dalszym ciągu operację zwężania będziemy wykonywali zawsze na dwóch ostatnich wskaźnikach afinora. Zauważyć tu jeszcze należy, że niektóre ze wzorów otrzymanych w ostatnich dwóch ustępach zachowują swą ważność tylko w tych układach spółrzędnych, które z pierwotnego układu spółrzędnych x^α otrzymuje się za pośrednictwem przekształcenia (T) (ust. **10**). Są to między innemi wzory (60), (63), (66), (68), (69), (73) i (74), które uzyskaliśmy, uwzględniając wartości liczbowe składowych afinora zasadniczego $\boldsymbol{I}$.

Oprócz algebraicznych operacyj mnożenia skalarnego i zwężania afinorów, będziemy w dalszym ciągu stosowali także operację różniczkową, którą w ust. **9** oznaczyliśmy symbolem *div*. Załóżmy mianowicie, że dany jest dowolny afinor rzędu k: $A\{A_{\alpha_1\ldots\alpha_k}\}$. Składowemi wielkości *div* A są wyrażenia

$$\partial_\varrho A_{\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_{k-1}}{}^{\varrho};$$

ponieważ wyznacznik przekształceń (T) jest równy 1 (ust. **10**), przeto wyrażenia te zachowują się spółzmienniczo przy wszelkich zmianach układu typu (T) (ust. **9**). Składowym wielkości *div* A możemy nadać inną postać; mamy mianowicie

$$\partial_\varrho A_{\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_{k-1}}{}^{\varrho} = \sum_{r=1}^{n}(\partial_r A_{\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_{k-1}}{}^{r} + \partial_{n+r} A_{\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_{k-1}}{}^{n+r}).$$

Jeżeli na prawej stronie ostatniej równości zastosujemy regułę (63) tyczącą się obniżania wskaźników, znajdziemy

$$\partial_\varrho A_{\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_{k-1}}{}^{\varrho} = \sum_{r=1}^{n}(\partial_r A_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}\,n+r} - \partial_{n+r} A_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}\,r}). \tag{75}$$

Oczywistą jest rzeczą, iż wzór ten zachowuje swą ważność tylko w tych układach spółrzędnych, które z pierwotnego układu otrzymuje się za pośrednictwem przekształcenia (T).

12. Niechaj będzie dany układ równań Hamiltona

$$\frac{dx^i}{\partial_{n+i}H} = \frac{dx^{n+k}}{-\partial_k H} = dt \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n), \tag{76}$$

w którym symbol H oznacza funkcję zmiennych x^α ($\alpha = 1, 2, \ldots, 2n$). Przyjmijmy, że $H(f)$ przedstawia przekształcenie infinitezymalne odpowiadające układowi (76); będzie więc

$$H(f) = \sum_{r=1}^{n}(\partial_{n+r} H\, \partial_r f - \partial_r H\, \partial_{n+r} f). \tag{77}$$

Wyrażenie $H(f)$ jest więc identyczne z nawiasem Poissona (Hf). Symbolem $\overline{H}(f)$ oznaczymy to przekształcenie infinitezymalne, które powstaje z przekształcenia $H(f)$ przez przedłużenie go na składowe afinorów (ust. **3**).

Twierdzenie 1. Afinor zasadniczy I jest afinorem niezmienniczym dla przekształcenia $\overline{H}(f)$.

Twierdzenie to wyraża, że składowe afinora zasadniczego spełniają zależności (ust. **3**, równość (19))

$$\overline{H}(I_{\alpha\beta}) = 0, \quad \overline{H}(I^{\alpha\beta}) = 0, \quad \overline{H}(I_{\dot{\alpha}}{}^{\beta}) = 0, \quad \overline{H}(I^{\alpha}{}_{\dot{\beta}}) = 0. \tag{78}$$

Na podstawie uwagi uczynionej na początku ust. **6** stwierdzamy, iż pierwsza z równości (78) wyraża twierdzenie Poincaré'go, według którego całka

$$I = \int \omega, \qquad \omega = \tfrac{1}{2} I_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta = \sum_{r=1}^{n} dx^r\, dx^{n+r} \tag{79}$$

jest niezmiennikiem bezwzględnym układu Hamiltona (76). Ażeby uzasadnić drugą z równości (78), zważmy, iż w myśl wzorów (61) mamy

$$I_{\alpha\beta} = I_{\varrho\alpha} I_{\sigma\beta} I^{\varrho\sigma}.$$

Jeżeli tę równość poddamy operacji $\overline{H}$ i uwzględnimy pierwszą z równości (71), znajdziemy

$$I_{\varrho\alpha} I_{\sigma\beta}\, \overline{H}(I^{\varrho\sigma}) = 0.$$

Pomnóżmy tę równość przez $I^{\varkappa\alpha} I^{\lambda\beta}$ i wykonajmy sumowanie względem wskaźników α, β; otrzymamy w ten sposób

$$I^{\varkappa\alpha} I_{\varrho\alpha} I^{\lambda\beta} I_{\sigma\beta}\, \overline{H}(I^{\varrho\sigma}) = 0. \tag{80}$$

Na podstawie przytoczonych przed chwilą równości (61) mamy jednak

$$I^{\varkappa\alpha} I_{\varrho\alpha} = I_{\dot{\varrho}}{}^{\varkappa}, \qquad I^{\lambda\beta} I_{\sigma\beta} = I_{\dot{\sigma}}{}^{\lambda}.$$

Równość (80) możemy więc zastąpić równością jej równoważną

$$I_{\dot{\varrho}}{}^{\varkappa} I_{\dot{\sigma}}{}^{\lambda}\, \overline{H}(I^{\varrho\sigma}) = 0.$$

Jeżeli jeszcze uwzględnimy związki (61'), otrzymamy ostatecznie

$$\overline{H}(I^{\varkappa\lambda}) = 0,$$

co mieliśmy wykazać. — Z uzyskanych przed chwilą wyników i z równości (61) wynika odrazu prawdziwość pozostałych dwóch zależności (78).

Twierdzenie 2. Jeżeli afinor zasadniczy I jest afinorem niezmienniczym dla przekształcenia infinitezymalnego $Z(f) = Z^\varrho \partial_\varrho f$, to układ równań

$$\frac{dx^\alpha}{Z^\alpha} = dt \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, 2n), \tag{81}$$

jest układem Hamiltona.

Istotnie, oznaczmy symbolem $\overline{Z}(f)$ przekształcenie infinitezymalne, które powstaje z przekształcenia $Z(f)$ przez przedłużenie go na afinory. Z założenia twierdzenia wynika między innemi równość następująca

$$\overline{Z}(I_{\alpha\beta}) = 0;$$

równość ta wyraża, jak wiadomo, iż całka (79) jest niezmiennikiem bezwzględnym równań układu (81), z czego wnosimy [21]), że układ ten jest układem Hamiltona.

[21]) Por. np. E. T. Whittaker, Analytische Dynamik, 1924, str. 289.

Z twierdzenia 1 i ze wzorów (63 a), (62 b) na obniżanie i podwyższanie wskaźników afinora wynika bezpośrednio

Twierdzenie 3. Jeżeli składowe mieszane $A_{\dot{\varkappa}_1\ldots\dot{\varkappa}_r}{}^{\lambda_1\ldots\lambda_s}$ pewnego afinora rzędu $r+s$ spełniają związek

$$\overline{H}(A_{\dot{\varkappa}_1\ldots\dot{\varkappa}_r}{}^{\lambda_1\ldots\lambda_s})=0,$$

to równość ta nie przestanie być prawdziwą, gdy obniżymy lub podwyższymy dowolnie wybrane wskaźniki składowej $A_{\dot{\varkappa}_1\ldots\dot{\varkappa}_r}{}^{\lambda_1\ldots\lambda_s}$.

W przypadku wektora twierdzenie to przyjmuje postać następującą: jeżeli składowe spółzmiennicze pewnego wektora $\boldsymbol{U}\{U_\alpha,\ U^\alpha\}$ spełniają związki $\overline{H}(U_\alpha)=0$, to jest także $\overline{H}(U^\alpha)=0$ i nawzajem [22]).

Twierdzenie 4. Jeżeli całki

$$\int U_\varrho\,dx^\varrho,\qquad \int V_\varrho\,dx^\varrho$$

są niezmiennikami bezwzględnemi układu Hamiltona, to wyrażenie

$$\sum_{r=1}^{n} U_{[r}V_{n+r]}$$

jest całką pierwszą tegoż układu.

Istotnie, na mocy założeń twierdzenia mamy (ust. **6**)

$$\overline{H}(U_\varrho)=0,\quad \overline{H}(V_\varrho)=0;$$

z równości tych i z twierdzenia 1 wynika, że iloczyn skalarny wektorów $\boldsymbol{U}\{U_\alpha\}$ i $\boldsymbol{V}\{V_\alpha\}$

$$\boldsymbol{UV}=I^{\alpha\beta}U_\alpha V_\beta$$

jest niezmiennikiem przekształcenia $H(f)$: $H(\boldsymbol{UV})=0$. Z drugiej strony wiemy, równość (66 a), że iloczyn ten jest równy wyrażeniu $2\sum\limits_{r=1}^{n}U_{[r}V_{n+r]}$, z czego wynika prawdziwość twierdzenia. Twierdzenie powyższe zawiera w sobie jako szczególny przypadek twierdzenie Poissona. Jeżeli mianowicie założymy, że funkcje A i B są całkami układu równań Hamiltona i jeżeli przyjmiemy

$$U_\alpha=\partial_\alpha A,\quad V_\alpha=\partial_\alpha B,$$

to będzie

$$\boldsymbol{UV}=(A,B).$$

Twierdzenie 5. Jeżeli całki

$$\int\tfrac{1}{2}A_{\varrho\sigma}\,dx^\varrho dx^\sigma,\qquad \int\tfrac{1}{2}B_{\varrho\sigma}\,dx^\varrho dx^\sigma$$

[22]) Szczególny przypadek tego twierdzenia znajdujemy w książce T. De Donder, Théorie des invariants intégraux, 1927, s. 89.

są niezmiennikami bezwzględnemi układu Hamiltona i jeżeli symbole $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ oznaczają afinory skośne o składowych $A_{\varrho\sigma}$ wzgl. $B_{\varrho\sigma}$, to iloczyny skalarne (por. wzory (68) i (69))

$$\boldsymbol{AA}=2\sum_{rs=1}^{n}(A_{rs}A_{n+r\,n+s}+A_{r\,n+s}A_{s\,n+r}),\qquad \boldsymbol{BB}=2\sum_{rs=1}^{n}(B_{rs}B_{n+r\,n+s}+B_{r\,n+s}B_{s\,n+r}),$$

$$\boldsymbol{AB}=4\sum_{rs=1}^{n}A_{[r[s}B_{n+r]\,n+s]}$$

są całkami pierwszemi tegoż układu.

Dowód tego twierdzenia jest zupełnie podobny do dowodu twierdzenia poprzedniego.

Przykład. Jeżeli $n=2$, trzy iloczyny skalarne wymienione w ostatniem twierdzeniu przyjmują odpowiednio postać następującą:

$$A_{13}^2+A_{24}^2+A_{12}A_{34}+A_{14}A_{23},\qquad B_{13}^2+B_{24}^2+B_{12}B_{34}+B_{14}B_{23},$$
$$2A_{13}B_{13}+2A_{24}B_{24}+A_{12}B_{34}+A_{34}B_{12}+A_{14}B_{23}+A_{23}B_{14}.$$

Jest rzeczą widoczną, że własności układu Hamiltona wyrażone w twierdzeniu 4 i 5 można z łatwością rozszerzyć na przypadek niezmienników całkowych rzędu $k>2$.

Twierdzenie 6. Z każdego niezmiennika całkowego [23]) I_{2m} (rzędu parzystego $2m$) układu Hamiltona można otrzymać zapomocą operacji zwężania afinorów ciąg niezmienników całkowych rzędów parzystych

$$I_{2m},\ I_{2m-2},\ldots,\ I_2$$

oraz całkę pierwszą I_0; podobnie z każdego niezmiennika całkowego rzędu nieparzystego I_{2m+1} zapomocą tej samej operacji można otrzymać ciąg niezmienników całkowych rzędów nieparzystych

$$I_{2m+1},\ I_{2m-1},\ldots,\ I_1.$$

Dla dowodu przyjmijmy, że całka

$$I_{2m}=\int\frac{1}{(2m)!}A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{2m}}\,dx^{\alpha_1}dx^{\alpha_2}\ldots dx^{\alpha_{2m}}$$

jest niezmiennikiem układu (76). Z założenia tego wynika równość

$$\overline{H}(A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{2m}})=0. \tag{82}$$

Podając afinor skośny $\boldsymbol{A}_{2m}\{A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{2m}}\}$ m razy operacji zwężania, w sposób

[23]) Zarówno w tem miejscu jak i w dalszym ciągu, mówiąc o niezmiennikach całkowych, mamy stale na myśli bezwzględne niezmienniki całkowe.

określony w ust. **11**, otrzymujemy ciąg afinorów skośnych o składowych

$$A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{m-2}},\quad A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{2m-4}},\ldots,\quad A_{\alpha_1\alpha_2},\quad A_0\,;$$

wartości tych składowych określone są wzorami (74). Przyjmijmy nadto

$$I_{2m-2k}=\int\frac{1}{(2m-2k)!}A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{2m-2k}}\,dx^{\alpha_1}\,dx^{\alpha_2}\ldots dx^{\alpha_{2m-2k}}\qquad (k=1,2,\ldots,m-1).$$

Na zasadzie wzoru (72) mamy

$$A_{\alpha_1\ldots\alpha_{2m-2}}=A_{\alpha_1\ldots\alpha_{2m-2}\,\dot{\varrho}}{}^{\dot{}\,\varrho}$$

czyli, ze względu na równość (63 b),

$$A_{\alpha_1\ldots\alpha_{2m-2}}=I^{\varrho\sigma}A_{\alpha_1\ldots\alpha_{2m-2}\varrho\sigma}.$$

Jeżeli związek ten poddamy operacji $\overline{H}(f)$ i uwzględnimy twierdzenie 1 niniejszego ustępu oraz założenie (82), to otrzymamy równość

$$\overline{H}(A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{2m-2}})=0,$$

która wyraża, iż całka I_{2m-2} jest niezmiennikiem układu (76). W ten sam sposób można wykazać niezmienność całek $I_{2m-4},\ldots,I_2$ oraz funkcji I_0. — Analogiczne rozważania można przeprowadzić w przypadku niezmiennika całkowego rzędu nieparzystego.

Zauważmy tu jeszcze, że niezmiennik I_0, o którym była mowa o wysłowieniu ostatniego twierdzenia, został znaleziony przez E. Schuntnera[24]), który otrzymał go jako uogólnienie pewnego twierdzenia Th. De Dondera. Według ostatniej z równości (74) wartość tego niezmiennika określona jest wzorem

$$I_0=2^m\sum_{r_1\ldots r_m=1}^{n}A_{r_m\,n+r_m\ldots r_2\,n+r_2\,r_1\,n+r_1}.$$

W twierdzeniu 6 niezmiennik ten występuje jako ostatni wyraz ciągu niezmienników, które otrzymujemy z danego niezmiennika całkowego rzędu parzystego zapomocą operacji zwężania.

Twierdzenie 7. Między niezmiennikami całkowemi układu Hamiltona można ustalić odpowiedniość taką, że każdemu niezmiennikowi I_r rzędu r odpowiadać będzie określony niezmiennik I_{2n-r} rzędu $2n-r$; niezmiennik I_{2n-r} otrzymuje się z niezmiennika I_r zapomocą operacyj algebraicznych wykonanych na jego spółczynnikach.

Dla dowodu załóżmy, że całka

$$I_r=\frac{1}{r!}\int A_{\varkappa_1\ldots\varkappa_r}\,dx^{\varkappa_1}\ldots dx^{\varkappa_r}$$

[24]) Th. De Donder, l. c., równanie (61) str. 29 i równanie (313) str. 91.

jest niezmiennikiem układu (76). Jest więc

(83) $$\overline{H}(A_{\varkappa_1\ldots\varkappa_r})=0.$$

Przyjmijmy

(84) $${}^*A^{\overline{\varkappa_1}\ldots\overline{\varkappa_{2n-r}}}=(-1)^{\varkappa}A_{\varkappa_1\ldots\varkappa_r},\qquad \varkappa=\sum_{i=1}^{r}\varkappa_i\,;$$

w równości tej ciągi $\varkappa_1,\ldots,\varkappa_r$ i $\overline{\varkappa}_1,\ldots,\overline{\varkappa}_{2n-r}$ tworzą parę ciągów uzupełniających się (ust. **1**). Ponieważ układ (76) jest układem typu Liouville'a, przeto z równości (83) i (84) wynika równość (ust. **9**, b))

$$\overline{H}({}^*A^{\overline{\varkappa_1}\ldots\overline{\varkappa_{2n-r}}})=0.$$

Równość ta nie przestanie być prawdziwą, jeżeli w niej obniżymy wszystkie wskaźniki (twierdzenie 3 niniejszego ustępu); będzie więc

$$\overline{H}({}^*A_{\lambda_1\ldots\lambda_{2n-r}})=0.$$

Z równości tej wynika, że całka

$$I_{2n-r}=\frac{1}{(2n-r)!}\int{}^*A_{\lambda_1\ldots\lambda_{2n-r}}\,dx_{\lambda_1}\ldots dx^{\lambda_{2n-r}}$$

jest niezmiennikiem układu (76), co wykazuje słuszność naszego twierdzenia.

Twierdzenie 8. Z każdego niezmiennika całkowego rzędu r układu Hamiltona można otrzymać zapomocą operacji *div* niezmiennik całkowy rzędu $r-1$.

Załóżmy, że całka

$$I_r=\frac{1}{r!}\int A_{\alpha_1\ldots\alpha_r}\,dx^{\alpha_1}\ldots dx^{\alpha_r}$$

jest niezmiennikiem układu (76). Spółczynniki formy symbolicznej występującej pod znakiem całkowania są składowemi spółzmienniczemi pewnego afinora skośnego rzędu r; niechaj $A^{\alpha_1\ldots\alpha_r}$ będą składowemi przeciwzmienniczemi tegoż afinora. Z założenia wynika równość

$$\overline{H}(A_{\alpha_1\ldots\alpha_r})=0,$$

której na mocy twierdzenia 3 niniejszego ustępu jest równoważna równość następująca

$$\overline{H}(A^{\alpha_1\ldots\alpha_r})=0.$$

Z drugiej strony na podstawie tożsamości (51) mamy

$$\overline{H}(\partial_\sigma A^{\alpha_1\ldots\alpha_{r-1}\sigma})=\partial_\sigma\overline{H}(A^{\alpha_1\ldots\alpha_{r-1}\sigma}).$$

Z dwóch ostatnich zależności wynika związek

$$\overline{H}(\partial_\sigma A^{\alpha_1\ldots\alpha_{r-1}\sigma}) = 0.$$

W myśl twierdzenia 3 związek ten nie przestanie być prawdziwym, jeżeli w składowej $A^{\alpha_1\ldots\alpha_{r-1}\sigma}$ obniżymy wszystkie wskaźniki z wyjątkiem ostatniego; będzie więc

$$\overline{H}(\partial_\sigma A_{\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_{r-1}}{}^{\sigma}) = 0.$$

Jeżeli więc przyjmiemy

(85) $$B_{\alpha_1\ldots\alpha_{r-1}} = \partial_\sigma A_{\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_{r-1}}{}^{\sigma},$$

to równość ostatnią będziemy mogli napisać w sposób następujący

$$\overline{H}(B_{\alpha_1\ldots\alpha_{r-1}}) = 0.$$

Przyjmijmy teraz

$$I_{r-1} = \frac{1}{(r-1)!}\int B_{\alpha_1\ldots\alpha_{r-1}}\, dx^{\alpha_1}\ldots dx^{\alpha_{r-1}};$$

równość ostatnia orzeka, iż całka ta jest również niezmiennikiem układu (76). Ponieważ spółczynniki całki I_{r-1} otrzymaliśmy zapomocą operacji *div* ze spółczynników całki I_r, przeto twierdzenie zostało udowodnione. — Wzór (85) na spółczynniki $B_{\alpha_1\ldots\alpha_{r-1}}$ możemy przekształcić w następujący sposób; mamy

$$\partial_\sigma A_{\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_{r-1}}{}^{\sigma} = \sum_{i=1}^{n}\partial_i A_{\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_{r-1}}{}^{i} + \sum_{i=1}^{n}\partial_{n+i} A_{\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_{r-1}}{}^{n+i}.$$

Na zasadzie wzorów (63) jest jednak

$$A_{\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_{r-1}}{}^{i} = A_{\alpha_1\ldots\alpha_{r-1}n+i}, \qquad A_{\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_{r-1}}{}^{n+i} = -A_{\alpha_1\ldots\alpha_{r-1}i}.$$

Uwzględniając te związki, znajdziemy ostatecznie

(86) $$B_{\alpha_1\ldots\alpha_{r-1}} = \partial_\sigma A_{\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_{r-1}}{}^{\sigma} = \sum_{i=1}^{n}(\partial_i A_{\alpha_1\ldots\alpha_{r-1}n+i} - \partial_{n+i} A_{\alpha_1\ldots\alpha_{r-1}i}).$$

Przykład 1. W przypadku całki linjowej ($r=1$) operacja *div* daje całkę pierwszą (niezmiennik skalarny) układu Hamiltona. Załóżmy np., że całka

$$\int U_\alpha\, dx^\alpha$$

jest niezmiennikiem układu (76). Obliczając wspomnianą całkę pierwszą przy pomocy wzoru (86), znajdziemy wyrażenie [25])

$$\sum_{i=1}^{n}(\partial_i U_{n+i} - \partial_{n+i} U_i).$$

[25]) Th. De Donder, Sur le multiplicateur de Jacobi, C. R. t. 152 (1911), str. 948.

Przykład 2. Jeżeli całka podwójna

$$I_2 = \tfrac{1}{2}\int A_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta$$

jest niezmiennikiem układu (76), to w myśl twierdzenia 8 i wzoru (86), możemy stwierdzić, że całka linjowa

$$I_1 = \int\sum_{i=1}^{n}(\partial_i A_{\alpha\, n+i} - \partial_{n+i} A_{\alpha i})\, dx^\alpha$$

jest również niezmiennikiem układu (76). Korzyść, którą możemy osiągnąć ze znajomości niezmiennika całkowego drugiego rzędu przy całkowaniu układu Hamiltona, możemy przedstawić w następujący sposób. Jeżeli symbole $A^{\alpha\beta}$ oznaczają składowe przeciwzmiennicze afinora $\boldsymbol{A}\{A_{\alpha\beta}\}$, to w myśl ogólnych rozważań, które nas doprowadziły do dowodu twierdzenia 8, mamy

$$\overline{H}(\partial_\varrho A^{\alpha\varrho}) = 0.$$

Jeżeli więc przyjmiemy

$$B^\alpha = \partial_\varrho A^{\alpha\varrho},$$

to będziemy mieli

$$\overline{H}(B^\alpha) = 0.$$

Równość ta wyraża (ust. 6, równość (33)), że równania

$$H(f) = 0, \quad B^\alpha\partial_\alpha f = 0$$

tworzą układ zupełny Jacobi'ego.

Uwaga. Twierdzenie 4 niniejszego ustępu pozostaje w bliskim związku z pewnem twierdzeniem E. Cartana [26]) o uogólnieniu twierdzenia Poissona. Przy porównywaniu tych twierdzeń należy jednak zwrócić uwagę, że pojęcie niezmiennika całkowego stosowane w dziele E. Cartana jest odmienne od tego, o którem jest mowa w twierdzeniu 8 [27]).

III.

13. Niechaj x^α ($\alpha = 1, 2, \ldots, 2n$) będą spółrzędnemi punktu przestrzeni ($2n$)-wymiarowej X_{2n}. Załóżmy, że w przestrzeni tej dany jest afinor skośnie symetryczny $\boldsymbol{N}$ o składowych spółzmienniczych $N_{\varkappa\lambda}$ oraz, że ranga [28]) tego afinora wynosi $2n$; jest więc

$$N_{\varkappa\lambda} + N_{\lambda\varkappa} = 0, \quad N = \|N_{\varkappa\lambda}\| \neq 0.$$

[26]) E. Cartan, Leçons sur les invariants intégraux, 1922, nº 127.

[27]) Niektóre z wyników uzyskanych w tej części pracy zostały przedstawione Kr. Akad. Belg. d. 6. 6. 1931. (Bulletins de la Classe des Sc., t. XVII, 1931).

[28]) E. Goursat, Leçons sur le problème de Pfaff, 1922, str. 126 i n.

Oznaczmy symbolem $N^{\varkappa\lambda}$ minor wyznacznika N, odpowiadający elementowi $N_{\varkappa\lambda}$, podzielony przez wartość tegoż wyznacznika. Wielkości $N^{\varkappa\lambda}$ uważać będziemy za składowe przeciwzmiennicze afinora N. Przyjmujemy obecnie wszystkie umowy, tyczące się obniżania i podwyższania wskaźników afinorów oraz działań algebraicznych na afinorach, które ustaliliśmy w ust. **10** i **11**, zastępując w nich obecnie składowe afinora I składowemi afinora N. Widoczną jest rzeczą, że zachowają swą ważność wszystkie te związki wspomnianych ustępów, w których nie korzystaliśmy z liczbowych wartości składowych afinora I. Będzie więc np. dla dowolnego wektora $U\{U_\alpha, U^\alpha\}$

$$U_\alpha = N_{\varrho\alpha} U^\varrho, \quad U^\alpha = N^{\alpha\varrho} U_\varrho.$$

Między składowemi $N_{\varkappa\lambda}$, $N^{\varkappa\lambda}$ zachodzą związki analogiczne do związków (61) i (56)

$$N_{\alpha\beta} = N_{\varrho\alpha} N_{\sigma\beta} N^{\varrho\sigma}, \quad N^{\alpha\beta} = N^{\alpha\varrho} N^{\beta\sigma} N_{\varrho\sigma},$$

(87)
$$N_{\varrho\alpha} N^{\varrho\beta} = N_{\alpha\varrho} N^{\beta\varrho} = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } \alpha = \beta, \\ 0, & \quad " \quad \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

Przyjmujemy nadto oznaczenie

(88)
$$|AB| = N^{\varrho\sigma} \partial_\varrho A \partial_\sigma B,$$

gdzie A i B są dwiema funkcjami zmiennych x^α. Wyrażenie $|AB|$ jest oczywiście iloczynem skalarnym dwóch wektorów, których składowemi spółzmienniczemi są wielkości $\partial_\varrho A$ wzgl. $\partial_\varrho B$ (por. ust. **11**, równość (65)). (Zauważyć należy, że E. Cartan[29]) wielkość określoną wzorem (88) przedstawia zapomocą takiego samego symbolu jak nawias Poissona w pierwotnem znaczeniu tego słowa; symbol przyjęty w tej pracy jest zgodny z oznaczeniami S. Liego[30]). Ze wzoru (88) wynika bezpośrednio

(89)
$$|AB| + |BA| = 0.$$

Obliczymy teraz wyrażenie:

$$W = ||AB|C| + ||BC|A| + ||CA|B|,$$

w którem A, B, C oznaczają trzy dowolne funkcje zmiennych x^α. Mamy na podstawie definicji symbolu $|AB|$

$$\begin{aligned} W = {} & N^{\varrho\varkappa} N^{\lambda\mu} \partial_\varrho \partial_\lambda A \partial_\mu B \partial_\varkappa C + N^{\varrho\varkappa} N^{\lambda\mu} \partial_\varrho \partial_\mu A \partial_\varkappa B \partial_\lambda C \\ & + N^{\varrho\varkappa} N^{\lambda\mu} \partial_\varrho \partial_\lambda B \partial_\mu C \partial_\varkappa A + N^{\varrho\varkappa} N^{\lambda\mu} \partial_\varrho \partial_\mu B \partial_\varkappa C \partial_\lambda A \\ & + N^{\varrho\varkappa} N^{\lambda\mu} \partial_\varrho \partial_\lambda C \partial_\mu A \partial_\varkappa B + N^{\varrho\varkappa} N^{\lambda\mu} \partial_\varrho \partial_\mu C \partial_\varkappa A \partial_\lambda B \\ & + N^{\varrho\varkappa} \partial_\varrho N^{\lambda\mu} \partial_\varkappa A \partial_\lambda B \partial_\mu C + N^{\varrho\varkappa} \partial_\varrho N^{\lambda\mu} \partial_\varkappa B \partial_\lambda C \partial_\mu A \\ & + N^{\varrho\varkappa} \partial_\varrho N^{\lambda\mu} \partial_\varkappa C \partial_\lambda A \partial_\mu B. \end{aligned}$$

[29]) E. Cartan, Leçons sur les invariants intégraux, 1922, n° 122.

[30]) S. Lie, Theorie der Transformationsgruppen, II. Absch., (1890), str. 235.

Łatwo stwierdzić, że we wzorze ostatnim znoszą się wzajemnie wszystkie wyrazy, zawierające pochodne drugiego rzędu funkcyj A, B, C. Weźmy np. pod uwagę wyrazy zawierające drugie pochodne funkcji A: $N^{\varrho\varkappa} N^{\lambda\mu} \partial_\varrho \partial_\lambda A \partial_\mu B \partial_\varkappa C$, $N^{\varrho\varkappa} N^{\lambda\mu} \partial_\varrho \partial_\mu A \partial_\varkappa B \partial_\lambda C$. Jeżeli w drugim z tych wyrazów wykonamy przestawienie kołowe wskaźników niemych $\varkappa$, μ, λ, otrzymamy $N^{\varrho\mu} N^{\varkappa\lambda} \partial_\varrho \partial_\lambda A \partial_\mu B \partial_\varkappa C$; w tem ostatniem wyrażeniu zamienimy jeszcze rolę wskaźników niemych ϱ, i λ; znajdziemy w ten sposób $N^{\lambda\mu} N^{\varkappa\varrho} \partial_\lambda \partial_\varrho A \partial_\mu B \partial_\varkappa C$. Będzie więc

$$N^{\varrho\varkappa} N^{\lambda\mu} \partial_\varrho \partial_\lambda A \partial_\mu B \partial_\varkappa C + N^{\varrho\varkappa} N^{\lambda\mu} \partial_\varrho \partial_\mu A \partial_\varkappa B \partial_\lambda C = N^{\lambda\mu}(N^{\varrho\varkappa} + N^{\varkappa\varrho}) \partial_\varrho \partial_\lambda A \partial_\mu B \partial_\varkappa C = 0,$$

co mieliśmy okazać.

We wzorze W pozostają wyłącznie wyrazy zawierające pierwsze pochodne funkcyj A, B, C. Zmieniając odpowiednio wskaźniki nieme, możemy więc napisać

$$W = (N^{\varrho\varkappa} \partial_\varrho N^{\lambda\mu} + N^{\varrho\lambda} \partial_\varrho N^{\mu\varkappa} + N^{\varrho\mu} \partial_\varrho N^{\varkappa\lambda}) \partial_\varkappa A \partial_\lambda B \partial_\mu C.$$

Stąd wynika

Twierdzenie 1. Ażeby zachodziło tożsamościowo

(90)
$$||AB|C| + ||BC|A| + ||CA|B| = 0,$$

potrzeba i wystarcza, ażeby było

(91)
$$N^{\varrho\varkappa} \partial_\varrho N^{\lambda\mu} + N^{\varrho\lambda} \partial_\varrho N^{\mu\varkappa} + N^{\varrho\mu} \partial_\varrho N^{\varkappa\lambda} = 0.$$

Uwaga. Fakt, iż warunek (91) jest warunkiem wystarczającym, ażeby zachodziła tożsamość (90), został stwierdzony przez Liego[31]).

Przekształcimy teraz warunek (91) w sposób następujący. Przyjmujemy

(92)
$$M^{\varkappa\lambda\mu} = N^{\varrho\varkappa} \partial_\varrho N^{\lambda\mu} + N^{\varrho\lambda} \partial_\varrho N^{\mu\varkappa} + N^{\varrho\mu} \partial_\varrho N^{\varkappa\lambda};$$

zgodnie z tożsamościami (87); mamy jednak

$$N^{\varkappa\lambda} = N^{\varkappa\sigma} N^{\lambda\tau} N_{\sigma\tau}$$

oraz dwa wzory analogiczne na $N^{\lambda\mu}$ i $N^{\mu\varkappa}$, które z poprzedniego otrzymuje się przez kołowe przestawienia wskaźników $\varkappa$, λ, μ. Podstawiając te trzy wyrażenia we wzorze na $M^{\varkappa\lambda\mu}$, znajdujemy przy pomocy łatwego rachunku i przy uwzględnieniu tożsamości (87), równość następującą

$$M^{\varkappa\lambda\mu} = - N^{\varkappa\varrho} N^{\lambda\sigma} N^{\mu\tau} (\partial_\varrho N_{\sigma\tau} + \partial_\sigma N_{\tau\varrho} + \partial_\tau N_{\varrho\sigma}) + 2 M^{\varkappa\lambda\mu}$$

czyli

$$M^{\varkappa\lambda\mu} = N^{\varkappa\varrho} N^{\lambda\sigma} N^{\mu\tau} (\partial_\varrho N_{\sigma\tau} + \partial_\sigma N_{\tau\varrho} + \partial_\tau N_{\varrho\sigma}).$$

Jeżeli przyjmiemy

(93)
$$M_{\varrho\sigma\tau} = \partial_\varrho N_{\sigma\tau} + \partial_\sigma N_{\tau\varrho} + \partial_\tau N_{\varrho\sigma},$$

[31]) S. Lie, l. c. str. 237, Satz 2.

to równość ostatnia przyjmie postać następującą

$$M^{\varkappa\lambda\mu} = N^{\varkappa\varrho} N^{\lambda\sigma} N^{\mu\tau} M_{\varrho\sigma\tau}.$$

Z równości tej wynika, że wielkości $M_{\varkappa\lambda\mu}$ i $M_{\varkappa\lambda\mu}$ są składowemi spółzmienniczemi i przeciwzmienniczemi tego samego afinora $\boldsymbol{M}$ rzędu trzeciego (ust. **10** i początek bieżącego ust.). Afinor ten jest oczywiście afinorem skośnym we wszystkich trzech wskaźnikach. Wniosek poprzedni wykazuje, że równości $M^{\varkappa\lambda\mu} = 0$ i $M_{\varkappa\lambda\mu} = 0$ są sobie równoważne. Uwzględniając definicje tych składowych, zawarte w równościach (92) i (93), możemy twierdzeniu 1 nadać postać następującą:

Twierdzenie 2. Ażeby równość (90) była spełniona tożsamościowo, potrzeba i wystarcza, ażeby było

$$\partial_\varrho N_{\sigma\tau} + \partial_\sigma N_{\tau\varrho} + \partial_\tau N_{\varrho\sigma} = 0.$$

W dalszym ciągu będziemy stale zakładali, że afinor skośny $\boldsymbol{N}$ jest afinorem rangi $2n$ i że spełnia warunki zawarte w twierdzeniu 1 wzgl. 2. Jest więc

(95) $$M_{\varkappa\lambda\mu} = 0, \quad M^{\varkappa\lambda\mu} = 0.$$

Pierwsza z równości (95) wyraża[32]), że symboliczna forma różniczkowa

(96) $$\Omega = \tfrac{1}{2} N_{\varrho\sigma}\, dx^\varrho\, dx^\sigma$$

jest formą pochodną, czyli, że jest $\Omega' = 0$. Druga równość zawiera ogół warunków koniecznych i wystarczających, ażeby składowe przeciwzmiennicze $N^{\varkappa\lambda}$ afinora skośnego $\boldsymbol{N}$ określały strukturę (Zusammensetzung) grupy funkcyj Liego[33]). Ponieważ afinor $\boldsymbol{N}$ jest według założenia rangi $2n$, więc odpowiadające mu grupy funkcyj nie zawierają oczywiście funkcyj wyróżnionych (*ausgezeichnete Funktionen*). Ponieważ klasa i ranga formy pochodnej są sobie równe[34]), przeto Ω jest formą klasy $2n$. W ten sposób skonstantowaliśmy, że każdej formie pochodnej (96) klasy $2n$ odpowiada określona struktura grupy funkcyj Liego.

Przyjmijmy teraz następujące określenie: jeżeli dwie funkcje A i B spełniają warunek $|A, B| = 0$, umawiamy się mówić, że funkcje te znajdują się w inwolucji ze względu na formę Ω. Będziemy mogli teraz wypowiedzieć dwa następujące wnioski z poprzednich twierdzeń:

Twierdzenie 3. Jeżeli każde dwie z pośród funkcyj niezależnych Φ_h $(h = 1, 2, \ldots, r)$ są w inwolucji ze względu na formę Ω, to układ równań

$$|\Phi_h f| = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, r)$$

jest układem zupełnym złożonym z r niezależnych równań.

[32]) E. Goursat, l. c., str. 102.
[33]) S. Lie, l. c., str. 241.
[34]) E. Goursat, l. c., str. 132.

Twierdzenie 4. Jeżeli układ zupełny złożony z r równań niezależnych

$$A_k(f) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, r)$$

ma tę własność, że funkcja $|U\,V|$ jest całką, o ile U i V są całkami, to układ ten można zastąpić równoważnym mu układem postaci

$$|\Phi_h f| = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, r).$$

Dowody tych twierdzeń, oparte na tożsamości (90), są zupełnie podobne do dowodów klasycznych twierdzeń tyczących się nawiasów Poissona.

14. Wiadomo, iż najogólniejszy układ równań różniczkowych, dla którego całka

$$I = \int \omega, \qquad \omega = \sum_{i=1}^{n} dx^i\, dx^{n+i}$$

jest niezmiennikiem bezwzględnym, ma postać

$$\frac{dx^i}{\partial_{n+i} H} = \frac{dx^{n+j}}{-\partial_j H} = dt \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

gdzie H oznacza dowolną funkcję zmiennych x^α $(\alpha = 1, 2, \ldots, 2n)$. Formę ω można jednak napisać w sposób następujący

(97) $$\omega = \tfrac{1}{2} I_{\varrho\sigma}\, dx^\varrho\, dx^\sigma;$$

podobnie układ równań Hamiltona można zastąpić układem

(98) $$\frac{dx^\alpha}{I^{\alpha\varrho}\, \partial_\varrho H} = dt.$$

Wielkości $I_{\alpha\beta}$, $I^{\alpha\beta}$, występujące w tych równościach, są składowemi afinora $\boldsymbol{I}$ określonego w ust. **10**. Widoczną jest rzeczą, iż forma (97) i układ (98) zachowują się spółzmienniczo przy wszelkich przekształceniach spółrzędnych przestrzeni X_{2n}. Jeżeli więc zmienne x^α poddamy dowolnemu przekształceniu postaci (1) i jeżeli po tej zmianie forma (97) przejdzie w formę

$$\omega = \tfrac{1}{2}\, {}'I_{\varrho\sigma}\, d\,'x^\varrho\, d\,'x^\sigma,$$

to układ (98) przyjmie postać

$$\frac{d\,'x^\alpha}{{}'I^{\alpha\varrho}\, \partial_\varrho H} = dt.$$

Oczywistą jest rzeczą, iż spółczynniki ${}'I_{\varrho\sigma}$ nowej formy w ogólności nie będą spełniały zależności zawartych w pierwszym wierszu równości (55). Ponieważ przekształceniem postaci (1) formę (97) można przeprowadzić w dowolną formę pochodną stopnia drugiego i klasy $2n$, przeto możemy wypowiedzieć następujące

Twierdzenie 5. Jeżeli forma

$$\Omega = \tfrac{1}{2} N_{\varrho\sigma}\, dx^{\varrho}\, dx^{\sigma}$$

jest formą pochodną klasy $2n$, to najogólniejszy skład równań różniczkowych, dla którego całka

$$\int \Omega$$

jest niezmiennikiem bezwzględnym, ma postać następującą

$$\frac{dx^{\alpha}}{N^{\alpha\varrho}\,\partial_{\varrho} H} = dt \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, 2n), \tag{99}$$

gdzie H jest dowolną funkcją zmiennych x^{α}.

Układ (99) został po raz pierwszy rozpatrywany przez Th. De Donder'a[35]; za jego przykładem nazwiemy go uogólnionym układem Hamiltona.

Z poprzednich rozważań i ze znanych własności kanonicznego układu Hamiltona wynika automatycznie szereg twierdzeń, z których kilka przytoczymy.

Twierdzenie 6. (Th. De Donder). Jeżeli funkcje A i B są całkami układu (90), to funkcja $|AB|$ jest także jego całką.

Twierdzenie 7. Jeżeli całki $\int U_{\alpha}\, dx^{\alpha}, \int V_{\alpha}\, dx^{\alpha}$ są niezmiennikami bezwzględnemi układu (99), to funkcja

$$N^{\varrho\sigma}\, U_{\varrho}\, V_{\sigma}$$

jest całką pierwszą tegoż układu.

Twierdzenie 8. Jeżeli całka

$$\frac{1}{r!}\int A_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}\, dx^{\alpha_1} \ldots dx^{\alpha_r}$$

jest niezmiennikiem bezwzględnym układu (99), to całka

$$\frac{1}{(r-2)!}\int N^{\varrho\sigma} A_{\alpha_1 \ldots \alpha_{r-2}\varrho\sigma}\, dx^{\alpha_1} \ldots dx^{\alpha_{r-2}}$$

jest $(r-2)$-krotnym niezmiennikiem bezwzględnym tegoż układu.

Nadmienimy jeszcze, że można także wypowiedzieć twierdzenia analogiczne do twierdzenia 5 i 6 części II. Pominiemy jednak te łatwe uogólnienia, zwrócimy natomiast uwagę na pewien związek, zachodzący między układem (99) a teorją charakterystyk równania różniczkowego o pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu. Załóżmy w tym celu, że dane jest równanie różniczkowe cząstkowe

[35] Th. De Donder, Généralisation du théorème de Poisson, C. R. 148 (1909) str. 610; Id., Théorie des invariants intégraux, 1927, str. 73.

$$V(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n) = 0, \quad p_i = \frac{\partial z}{\partial q_i}.$$

Charakterystyki tego równania określone są układem

$$\frac{d q_i}{\dfrac{\partial V}{\partial p_i}} = \frac{d p_j}{-\dfrac{\partial V}{\partial q_j}} = dt \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

Wykonajmy na zmiennych q_i, p_j dowolne przekształcenie

$$Q_i = \varphi_i(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n),$$
$$P_i = \psi_i(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$$

o wyznaczniku różnym od zera a następnie przyjmijmy oznaczenia

$$x^i = Q_i, \quad x^{n+i} = P_i. \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Z poprzednich wywodów wynika, że w nowym układzie zmiennych x^{α} równania charakterystyk przyjmą postać

$$\frac{dx^{\alpha}}{N^{\alpha\varrho}\,\partial_{\varrho} H} = dt,$$

jeżeli $N^{\alpha\beta}$ są składowemi przeciwzmienniczemi afinora skośnego, którego składowe spółzmiennicze są określone równością

$$d q_1\, d p_1 + \ldots + d q_n\, d p_n = \tfrac{1}{2} N_{\varrho\sigma}\, dx^{\varrho}\, dx^{\sigma},$$

i jeżeli H oznacza funkcję zmiennych x^{α}, w którą przechodzi funkcja $V(q_i, p_j)$ za pośrednictwem określonej poprzednio zmiany zmiennych.

Związki i twierdzenia, uzyskane w części II i III tej pracy, nasuwają myśl konstrukcji takiej przestrzeni o koneksji afinalnej, w której przesunięcie równoległe zachowywałoby afinor zasadniczy I określony w ust. 10. W schemacie Kleina-Cartana będzie to przestrzeń nieholonomiczna, odpowiadająca grupie linjowej o $n(2n+1)$ parametrach, zachowującej formę zewnętrzną Grassmanna

$$[x_1\, x_{n+1}] + [x_2\, x_{n+2}] + \ldots + [x_n\, x_{2n}].$$

Zagadnieniu temu, pozostającemu w związku z teorją niezmienników przekształceń stycznościowych, poświęcimy osobną pracę.

Résumé.

Je traite dans se travail des questions assez variées cencernant les afineurs antisymétriques et les invariants intégraux, en se servant des méthodes du Calcul tensoriel. Dans la première partie j'établis d'abord une correspondance entre les afineurs antisymétriques et les densités afinorielles de poids ± 1 et j'introduis un nouvel opérateur différentiel, analogue à l'opérateur Xf et déduit d'une densité vectorielle. La suite est consacrée aux propriétés du prolongement d'une transformation infinitésimale aux composantes des afineurs et des densités afinorielles; j'indique ici, entre autres, une classification des afineurs relative à une transformation infinitésimale. Je donne ensuite les plus simples applications des considérations précédentes à la théorie des invariants intégraux. La fin de cette partie contient quelques théorèmes relatifs aux invariants intégraux du système de Liouville.

La seconde partie du travail est consacrée à la théorie des invariants intégraux du système de Hamilton. Je généralise ici plusieurs théorèmes dus à Poisson, Poincaré, Cartan, De Donder, et Schuntner. Une partie des résultats donnés dans ce travail à été présentée à l'Académie R. de Belgique le 6 Juin 1931.

La dernière partie à pour objet les invariants intégraux du système auquel M. De Donder à donné le nom d'équations généralisées de Hamilton. Je montre ici, entre autres, une liaison étroite entre la théorie de ce système et la théorie des groupes de fonctions de Lie.

Gewöhnliche Differentialgleichungen der allgemeinen Analysis [1]

(Równania różniczkowe zwyczajne w Analizie ogólnej)

von

M. Kerner

I. Einleitung.

1. Der Gegenstand der Arbeit. Die allgemeine Analysis beschäftigt sich mit Operationen, die einem Elemente eines abstrakten Raumes ein Element eines anderen oder auch desselben Raumes zuordnen. Ist der Raum linear und normiert, so kann man für diese Operationen den Begriff des Differentials bilden [2]. Doch ist es im allgemeinen unmöglich auch den Begriff der Ableitung auf abstrakte Operationen zu übertragen.

Ein wichtiger spezieller Fall eignet sich gut zur Einführung des Begriffs der Ableitung. Das ist der Fall der Operationen, die einer reellen Zahl ein Element eines abstrakten, linearen und normierten Raumes zuordnen. Solche Operationen werden wir *abstrakte Funktionen* nennen. Für diese hat Herr Fréchet [3]) eine Definition der Ableitung eingeführt, die wir im folgenden Paragraphen anbringen werden. Sie ist eine Verallgemeinerung der in der Hilbertschen Geometrie gebräuchlichen [4]).

Besitzt man den Begriff der Ableitung, so kann mann auch den der gewöhnlichen Differentialgleichungen auf die allgemeine Analysis übertragen.

[1]) Die vorliegende Arbeit ist eine Entwicklung des Vortrags, der in Wilno (Polen) den 26 September 1931 auf dem Zweiten Konreß der Polnischen Mathematiker gehalten wurde.

[2]) Fréchet, Annales de l'École Normale Supérieure (3) **42** (1925) S. 293—323.

[3]) Loc. cit. S. 312. Vgl. auch Kerner, Annali di Matematica (4) **10** (1232) S. 147.

[4]) Vgl. z. B. Vitali, Geometria nello spazio hilbertiano, Bologna (1929) S. 77.