O GRANICACH ATMOSFERY.

NAPISAŁ

M. P. RUDZKI.

W książkach poświęconych meteorologii teoretycznéj spotykamy często mniemanie, że atmosfera ma górną granicę; lecz równie często spotykamy mniemanie przeciwne, że atmosfera rozciąga się do nieskończoności. Niema faktów, które pozwoliłyby rozstrzygnąć, które z pomiędzy tych zdań należy uważać za słuszne.

Liais na podstawie spostrzeżeń nad zorzą północną twierdzi, że powietrze, acz bardzo rozrzedzone, znajduje się jeszcze na odległości 400 kilometrów od powierzchni ziemi. Schiaparelli zauważył, że meteoryty poczynają świecić na wysokości 200 kilometrów, co dowodzi, że w tych sferach powietrze już jest o tyle gęste, iż meteoryt wskutek tarcia rozgrzewa się aż do temperatur, przy których ciała stałe poczynają wysyłać promienie widzialne.

Astronomia uczy, że dotąd w ruchach ciał niebieskich nie udało się wykryć oporu ośrodka międzyplanetarnego. Jednakże nie można na téj podstawie wnosić, aby ośrodek ów był niemateryalny i nie mógł wywierać oporu. W każdym razie gęstość powietrza czy innych gazów, znajdujących się w sferach międzyplanetarnych jest tak nadzwyczajnie mała, że prawdopodobnie dopiero po wielu setkach lat można będzie osądzić na podstawie spostrzeżeń astronomicznych, czy w ruchach ciał niebieskich są jakiekolwiek ślady oporu.

A. Ritter [1]) próbował wyznaczyć wysokość atmosfery na podstawie następującego twierdzenia termodynamicznego: „Ilość pracy, którą należy zu-

1) A. Ritter, Anwendungen der mechanischen Wärmetheorie auf kosmologische Probleme, Hannover 1879.

żyć, aby przenieść jednostkę masy powietrza od powierzchni ziemi do granic atmosfery równa się ilości ciepła zawartéj w jednostce masy powietrza znajdującéj się przy powierzchni ziemi“. Łatwo pojmiemy znaczenie tego twierdzenia, jeżeli wyobrazimy sobie, że powietrze było rozsiane naprzykład w przestrzeni międzyplanetarnéj i skupiło się naokoło ziemi wskutek przyciągania. Spostrzegamy jednakowo, że twierdzenie podobne jest słuszne tylko dla gazu w warunkach adiabatyczności; albowiem skoro tylko gaz może tracić ciepło przez promieniowanie [1]), tedy po pewnym czasie oziębi się, i ilość ciepła, zawarta w jednostce masy gazu, może się po dostatecznie długim czasie zmniejszyć *dowolnie*.

Zakładając, że gaz znajduje się w warunkach adiabatyczności i że podlega prawom gazów doskonałych, Ritter znajduje, że wysokość atmosfery nie przewyższa $27^1/_2$ kilometrów mniéj więcéj. Wynik ten zgadza się tak niedostatecznie z przytoczonemi wyżéj rezultatami spostrzeżeń, że Ritter, trwając wciąż jeszcze przy hypotezie adiabatyczności, odrzuca hypotezę stosowalności praw gazu doskonałego. Wskutek tego, po nowem wyliczeniu, Ritter otrzymuje nową liczbę, przeszło 10 razy większą od pierwszéj. Ale, jakeśmy wyżéj nadmienili, błąd tkwi w założeniu, że gaz zachowuje się adiabatycznie. Gdybyśmy np. rzeczywiście podnosili jednostkę masy gazu coraz wyżéj i wyżéj, utrzymując go sztucznie w stanie adiabatycznym, wówczas z pewnością temperatura naszego gazu na pewnéj wysokości okazałaby się znacznie różną od średniej temperatury otaczającego ją powietrza.

Równania, wyrażające warunki równowagi [2]) atmosfery, nie dają żadnych wskazówek co do jéj wysokości. Inaczéj być nie może. Wszak np. z wyrażenia potencyału wewnątrz ciała nie możemy wyliczyć odległości powierzchni od środka albo sądzić o kształcie ciała.

Dlatego też Mascart [3]) zakłada, że atmosfera ma granicę górną, następnie zaś stara się znaleść formę funkcyi, czyniącéj zadość równaniu różniczkowemu równowagi. Gromeka znów zakłada, że temperatura gazu, aczkolwiek nizka, jest zupełnie stała. Jeżeli zważymy, że przytem używa równania gazu doskonałego

$$pv = kT \quad {}^{4})$$

1) O znaczeniu promieniowania dla naszéj atmosfery patrz: Abbe, Atmospheric Radiation of Heat. *Amer. Journ. of Science* r. 1892, zeszyt majowy.

2) Równania te, z uwzględnieniem przyciągania jednych cząstek gazu na drugie, wyprowadza W. Thomson, Equilibrium of a gas... *Phil. Mag.* (5) tom 23, str. 287 Ritter. Wied. Ann. 1882. Gromeka: Niekotoryje słuczai rawnowiesija sowerszennaho gaza. Kazań. 1886.

3) Journ. de Physique 1892. Zeszyt majowy.

4) Gdzie, jak zwykle, p wyraża ciśnienie
v „ objętość
T „ temperaturę bezwzględną
a k „ stałą.

i zakłada, że p oraz v są to funkcye ciągłe, tedy dojdziemy do wniosku, że eo ipso już wprowadził założenie, że gaz, aczkolwiek rozrzedzony, musi rozciągać się do nieskończoności. Nic więc dziwnego, że z zadania analitycznego rozwiązanego przez tego autora okazało się, że gaz musi zajmować przestrzeń nieskończoną, że masa gazu musi być nieskończenie wielka. Skończona masa gazu musiała by się rozsiać w przestrzeni.

Temperatura powietrza na wysokości kilkuset kilometrów nad powierzchnią ziemi musi być niezmiernie nizka [1]. Z drugiéj strony Olszewski przekonał się, że przy — 220° C. nawet przy ciśnieniu 4 mm. rtęci, powietrze pozostaje ciekłe i przejrzyste.—Wnosimy stąd, że na dalekiéj odległości od powierzchni ziemi azot i tlen mogą istnieć w stanie ciekłym. Podobne mniemanie znajdujemy też u Rittera [2]. Gazy ciekłe na téj wysokości musiałyby istnieć pod kształtem maleńkich kropelek; nawet najcieńsza ciągła warstewka cieczy nie mogłaby się utrzymać przez czas dłuższy.

Z teoryi cynetycznéj gazów można wyprowadzić niektóre wnioski, rzucające pewne światło na zajmującą nas kwestyą Wedle teoryi cynetycznéj w danéj skończonéj objętości gazu przy każdéj temperaturze jednocześnie znajdują się cząsteczki, posiadające najrozmaitsze prędkości postępowe. W gazie doskonałym prędkości mogą przybierać wszelkie wartości, poczynając od zera aż do nieskończonych. Im wyższa jest temperatura gazu, tem ilość cząsteczek posiadających prędkości znaczne jest większa; ale nawet przy bardzo nizkich temperaturach znajduje się pewien procent cząsteczek, aczkolwiek mały, posiadających ogromne prędkości.

Zauważmy teraz, że ciało rzucone w kierunku promienia ziemi (t. j. w kierunku linii prostéj, łączącéj środek ziemi z danym punktem powierzchni) z prędkością początkową większą niż $\sqrt{2ga}$ [gdzie g oznacza przyspieszenie spadku ciał przy powierzchni ziemi, a zaś oznacza promień średni ziemi], oddali się na nieskończoną od ziemi odległość.—Ze względu na tarcie o powietrze, prędkość początkowa dostateczna, aby ciało rzeczywiście odleciało na odległość nieskończoną, będzie nieco większa, ale z drugiéj strony należy o tem pamiętać, że nawet przy mniejszéj niż $\sqrt{2ga}$ (t. j. około 11200 metrów na sekundę) prędkości ciało łatwo może przejść w sfery, gdzie przyciąganie innych ciał układu słonecznego, osobliwie zaś słońca, przemaga nad przyciąganiem ziemi. Naturalnie w wysokich warstwach atmosfery nawet mniejsze początkowe prędkości wystarczą, aby dane ciało nazawsze oddaliło się od ziemi.

[1]) Fröhlich, Repert. für Meteor. tom VI. Na mocy spostrzeżeń swoich wnosi on że temperatura przestrzeni wynosi — 127° C do — 131° C. Ale podobne poszukiwania nic mają pewnéj podstawy.

[2]) Anwendungen .., str. 9.

Stąd wnosimy, że cząsteczki gazu, które posiadają prędkość odpowiednią i odpowiedni kierunek ruchu, nazawsze się oddalają od ziemi. Naodwrót, cząsteczki gazów, pochodzących z atmosfery innych ciał słonecznych, wpadają do naszéj atmosfery ziemskiéj.—Właściwie istnieje jedna tylko atmosfera, mniéj lub więcéj zgęszczona, naokoło ciał układu słonecznego. Na potwierdzenie tych słów możemy przytoczyć, że wedle najnowszych badań [1]) nawet księżyc posiada atmosferę. Ale atmosfera księżycowa jest 4 do 8 tysięcy razy mniéj gęsta od naszéj, a ciśnienie atmosferyczne na powierzchnią księżyca jest około 7000 razy mniejsze niż ciśnienie atmosfery ziemskiéj na powierzchnią ziemi. Merkury również posiada tylko bardzo rozrzedzoną atmosferę, głównie dzięki temu, że cząsteczka gazu, oddaliwszy się o kilkadziesiąt kilometrów od jego powierzchni dostaje się w okolice, gdzie atrakcya słońca przeważa nad atrakcyą Merkurego. W podobny sposób księżyc postradał, czy raczéj wcale nie miał gęstéj atmosfery, dzięki małéj odległości od ziemi, która jako ciało znaczniejsze przyciąga ku sobie cząsteczki gazu, nazbyt oddalające się od księżyca.

Gdyby gaz składający naszą atmosferę był gazem doskonałym, wówczas przy pomocy znanych formuł teoryi cynetycznéj gazów możnaby przybliżenie wyliczyć liczbę cząstek uchodzących w międzyświatowe przestworza z warstwy atmosfery o grubości kilku kilometrów. — Dla poznania stanu téj warstwy posiadamy niektóre wzory empiryczne, określające średnią gęstość, temperaturę i t. d. powietrza w zależności od szerokości geograficznéj i od wzniesienia nad powierzchnią ziemi. Podobne rachunki byłyby wszakże błędne, albowiem z jednéj strony opierałyby się na wzorach, stosujących się li tylko do gazu doskonałego, z drugiéj zaś zasadzałyby się na wzorach empirycznych, stosujących się do gazu rzeczywistego. Możnaby pójść inną drogą. Zasadzając się na równaniu Thomsona—Rittera—Gromeki,—możnaby całkować je przybliżenie [2]), w założeniu, że gaz jest doskonały, a następnie przy pomocy formuł Maxwella obliczyć, jaka ilość gazu wychodzi na zawsze z atmosfery naszéj w ciągu, dajmy na to, godziny czy doby. W ten sposób otrzymalibyśmy liczby, które możnaby uważać za granicę górną wielkości istotnych, określających rzeczywistą wymianę gazu między atmosferą naszą i ośrodkiem międzyplanetarnym. Ale i taki rachunek jeszcze nie będzie miał żadnéj wartości. Wykażemy daléj, że warunki dynamiczne, w których się znajduje atmosfera nasza, są bardziéj złożone, niż zazwyczaj przypuszczamy. Właściwie należy rozpatrywać zadanie

[1]) Pickering. The Lunar Atmosphere. Astronomy and astrophysics Nov. 1892, str. 778. Pickering wygłasza podobne zdanie, jak to, które stanowi treść główną niniejszéj rozprawki. Myśl tę wszelako powziąłem zgoła samodzielnie i już we wrześniu r. 1892-go pisałem o niéj w Pamiętnikach Noworossyjskiego Towarzystwa przyrodników.

[2]) Albowiem dotąd nieudało się znaleść ścisłéj całki tego równania.

o stanie naszéj atmosfery z punktu widzenia dynamicznego. Wśród gazu ściśliwego mamy poruszające się ciało: ziemię, wywierające silną atrakcyą na cząsteczki gazu. Przytém gaz wciąż otrzymuje z zewnątrz t. j. od słońca znaczne ilości energii, które znów rozsiewają się w przestrzeni. Oczywiście jest to zadanie bardzo złożone. — Ograniczymy się tedy na niektórych tylko uwagach i wnioskach.

Wyobraźmy sobie pewną powierzchnią kulistą, otaczającą dokoła ziemię. Jeżeli gaz porusza się w kierunku do niéj prostopadłym t. j. w kierunku promienia ziemi z prędkością: u, a gęstość gazu $= \varrho$, to w ciągu czasu t przez całą powierzchnię S wyjdzie ilość gazu:

$$S \,.\, u \,.\, \varrho \,.\, t \,.$$

Z prędkością u uchodzi tylko pewien procent gazu. Dajmy na to, że ten procent jest: q.

Masa tedy gazu uchodząca z warstwy, zawartéj między powierzchnią ziemi a powierzchnią δ będzie:

$$m = S \,.\, t \,.\, \varrho \,\Sigma\, u \,.\, q \,.$$

Uważajmy dwie powierzchnie S; jedną bliższą ziemi, drugą dalszą.

Dla bliższéj powierzchni gęstość gazu ϱ będzie większa. Natomiast prędkość średnia uchodzących cząsteczek u będzie mniejsza, albowiem dolna granica prędkości, przy których cząsteczka może się oddalić od ziemi jest wyższa. Czynnik q zależy jednocześnie od temperatury przy powierzchni S i od jéj odległości od środka ziemi. Nie znając ścisłego prawa średniéj gęstości atmosfery i średniéj temperatury w zależności od wzniesienia nad powierzchnią ziemi, nakoniec nieznając ścisłego prawa rozkładu prędkości cząsteczkowych dla powietrza, nie możemy dokładnie wyliczyć q.

Atoli dla coraz dalszych powierzchni powinno być m coraz większe; wynika to z samych założeń naszego rozumowania. Dolna granicą prędkości krytycznych jest coraz to mniejsza. Ponieważ zaś prędkość podniesiona do kwadratu znajduje się w wykładniku, więc łatwo zrozumiemy, że pomimo zmniejszania się innych czynników, wskutek szybkiego wzrastania czynnika q — m wzrasta wraz z odległością od ziemi.

Zakładając, że powierzchnia S znajduje się bardzo blizko powierzchni ziemi, np. na odległości metra lub dwóch, możnaby obliczyć m, rozumie się dla gazu doskonałego. Można mianowicie obliczyć: $u \,.\, q$. Procent cząsteczek, biegnących z prędkością zawartą między: u a $u + du$ i podążających w kierunku promienia, będzie, według prawa Maxwella [1],

[1]) Zob. Wł. Natansona: Teorya cynetyczna gazów niedoskonałych, Lwów, 1888, str. 5.

$$\frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{u^3}{\alpha^3}}\, du$$

zatem:

$$uq = \frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}} \cdot \int_{11200}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{\alpha^2}}\, u\, du = \frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}} \,.\, e^{-\frac{(11.200)^2}{\alpha^2}} \,;$$

tu α jest prędkością najprawdopodobniejszą cząsteczek gazu przy danéj temperaturze i ciśnieniu. Dla powietrza przy $0°$ C i 760 mm. ciśnienia barometrycznego: $\alpha = 397$. Dla okrągłości rachunku weźmiemy $\alpha = 400$. A zatem przy wskazanéj temperaturze i ciśnieniu podanem, mamy przybliżenie

$$uq = \frac{36}{10^{340}}$$

Ponieważ używaliśmy jako jednostki metra i sekundy, zatem w ciągu sekundy przez powierzchnią metra kwadratowego uchodzi w przestworza międzyświatowe (z gazu doskonałego mającego przybliżenie temperaturę 0^0C i ciśnienie 760 mm. rtęci), przybliżenie

$$\frac{36}{10^{340}}$$

metra sześciennego. Znając ϱ, t. j. gęstość gazu, nietrudno tę wielkość wyrazić jako massę.

Widzimy stąd, że wymiana cząsteczek gazu między planetami jest nadzwyczaj powolna. Liczba znaleziona jest tak mała, że trudno ją sobie wystawić; wszakże należy pamiętać o tem, iż prawdopodobnie istotny procent cząsteczek powietrza, uchodzących na zawsze z atmosfery ziemskiéj jest większy, najpierw dlatego, że temperatury, panujące w niższych warstwach atmosfery na znacznéj części powierzchni ziemi są wyższe; powtóre ponieważ graniczne prędkości są mniejsze niż te, które przyjmowaliśmy w naszem obliczeniu. Zakładaliśmy bowiem, że tylko te cząsteczki oddalają się nazawsze od ziemi, które odbiegają na nieskończoną od ziemi odległość, tymczasem nazawsze oddalają się od ziemi te cząsteczki, które dostają się do sfery przyciągania słońca i innych planet.

Ziemia wciąż traci cząsteczki gazu, ale nawzajem wciąż otrzymuje nowe cząsteczki. Nie wiemy, czy przychód jest większy, czy mniejszy od rozchodu, ale możemy twierdzić, że nie są sobie równe. Inaczéj mówiąc, stan naszéj atmosfery nie jest trwały, lecz jest zmienny. Gęstość atmosfery, — ciśnienie na powierzchnią ziemi, skład atmosfery zmieniają się niesłychanie powoli ale nieustannie.—Jestto fakt, z którym geologia i biologia powinny się liczyć. Wiekowe zmiany stanu atmosfery nie pozostały niewątpliwie bez wpływu na zjawiska mechaniczne i życiowe na powierzchni ziemi.

Gdyby ocean powietrzny miał wymiary skończone, musiałby oczywiście obracać się wraz z ziemią na podobieństwo ciała stałego. Nieskończony ocean powietrzny nie obraca się wraz z ziemią. Na dalekiéj odległości od ziemi nawet w téj sferze, gdzie jéj przyciąganie jeszcze przemaga nad przyciąganiem innych ciał układu słonecznego, powietrze musi znacznie pozostawać w tyle, za ruchem ziemi i ruchy jego zależą już nie tylko od ruchów ziemi, ale także od ruchów innych ciał niebieskich. Właściwie są to ruchy niezmiernie złożone, ruchy nieskończenie małych ciał, posiadających własną prędkość i znajdujących się pod wpływem przyciągania wielu dalekich ogromnych ciał. Możemy utworzyć sobie niejakie pojęcie o ogólnym charakterze ruchów powietrza (nie oddzielnych jego cząstek), rozważając zadanie o ruchu obrotowym kuli wśród płynu ściśliwego. Dla ułatwienia zakładamy:

1. Że ruch jest trwały. Założenie to nie jest ścisłe, lecz możemy je wprowadzić ze względu na to, iż zmiany wiekowe stanu atmosfery są nadzwyczaj powolne.

2. Że zachodzi tylko ruch obrotowy. Czynimy to przypuszczenie, ponieważ jednoczesne rozważanie ruchu obrotowego i postępowego ziemi natrafia na nieprzezwyciężone trudności analityczne.

3. Zakładamy, że przy saméj powierzchni ziemi prędkość względna powietrza jest równa zeru. Już Stokes dowiódł, że skoro tylko istnieje tarcie między ciałem stałem i płynem, tedy względna prędkość na powierzchni granicznéj musi być równa zeru. W przeciwnym razie należałoby przypuścić, że współczynnik tarcia wewnętrznego płynu jest nieskończenie mały.

Możemy napisać równania hydrodynamiczne we współrzędnych kulistych pod postacią następującą [1].

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - 2(v\zeta - w\eta) &= -\frac{\partial P}{\partial r} - \frac{2\mu}{\varrho}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \zeta}{\partial \theta} + \frac{\zeta \operatorname{cotg}\theta}{r} - \frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial \phi}\right) + \frac{\mu}{3\varrho}\frac{\partial \delta}{\partial r} \\
\frac{\partial v}{\partial t} - 2(w\xi - u\zeta) &= -\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta} - \frac{2\mu}{\varrho}\left(\frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial \phi} - \frac{\partial \zeta}{\partial r} - \frac{\zeta}{r}\right) + \frac{\mu}{3\varrho}\frac{\partial \delta}{r\partial \theta} \\
\frac{\partial w}{\partial t} - 2(u\eta - v\xi) &= -\frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial P}{\partial \phi} - \frac{2\mu}{\varrho}\left(\frac{\partial \eta}{\partial r} + \frac{\eta}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial \xi}{\partial \theta}\right) + \frac{\mu}{3\varrho}\frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial \delta}{\partial \phi}
\end{aligned}\right\} \quad \mathrm{I}$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + u\frac{\partial \varrho}{\partial r} + v\frac{\partial \varrho}{r\partial \theta} + \frac{w}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial \varrho}{\partial \phi} + \varrho\,\delta = 0 \qquad \mathrm{II}$$

[1] Porówn. Whitehead, Second approximation to viscous fluid motion. *Quart Journ.*, tom XXIII, str. 145, oraz: Edwardes, Steady motion of a viscous fluid. *Quart. Journ.* 1892, str. 75.

$$\delta = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2u}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \operatorname{cotg}\theta\,\frac{v}{r} + \frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial w}{\partial \phi} \qquad \mathrm{III}$$

$$\left.\begin{aligned}
2\xi &= \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{w\operatorname{cotg}\theta}{r} - \frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial v}{\partial \phi} \\
2\eta &= \frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial u}{\partial \phi} - \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} \\
2\zeta &= \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}
\end{aligned}\right\} \quad \mathrm{IV}$$

W powyższych równaniach:

r oznacza odległość od środka kuli;

θ kątową odległość od północnéj, dodatniéj części osi biegunowéj;

ϕ długość geograficzną.

$u = \dfrac{dr}{dt}$ jest prędkością w kierunku promienia;

$v = r\,\dfrac{d\theta}{dt}$ — prędkością w kierunku rosnącego kąta θ;

$w = r\sin\theta\,\dfrac{d\phi}{dt}$ — prędkością w kierunku rosnącego kąta: ϕ;

ξ, η, ζ są to składowe ruchu wirowego dokoła osi równoległych do głównych kierunków współrzędnych;

ϱ oznacza gęstość płynu;

μ spółczynnik tarcia wewnętrznego; nareszcie

$$P = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + \omega^2) + \int\frac{dp}{\varrho} - V$$

gdzie p oznacza ciśnienie.

V jest potencyałem przyciągania, przyczém w ogólnym przypadku należy uwzględnić także przyciąganie samego gazu.

Rozpatrujemy ruch niezależny od kąta ϕ, co oczywiście w danym razie jest zupełnie dozwolone. Jednocześnie zakładamy, że ruch jest trwały i że

$$u = v = 0$$

Przy tych założeniach *eo ipso* czynimy zadość równaniu ciągłości II; jednocześnie widzimy z równania III, że

$$\delta = 0.$$

Ponieważ δ wyraża rozszerzanie się gazu wzdłuż strugi, więc równanie III powiada, że niema żadnego rozszerzenia. Jestto zresztą oczywisty rezultat założeń przyjętych, albowiem gaz płynie po kołach, których środki znajdują się na obrotowéj osi kuli. Zatem:

$$\left.\begin{aligned} \zeta &= 0 \\ 2\xi &= \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + w\frac{\operatorname{cotg}\theta}{r} \\ 2\eta &= -\left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{r}\right) \end{aligned}\right\} \text{IV bis}$$

$$\left.\begin{aligned} 2w\,\eta &= -\frac{\partial P}{\partial r} \\ 2w\,\xi &= -\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \eta}{\partial r} + \frac{\eta}{r} &- \frac{1}{r}\frac{\partial \xi}{\partial \theta} = 0 \end{aligned}\right\} \text{I bis.}$$

Ostatnie równanie, jeżeli zeń wyrugujemy ξ i η przy pomocy równań IV bis, przywodzi się do postaci:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(wr) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(w\sin\theta)\right] = 0.$$

To ostatnie równanie jest tylko szczególnym przypadkiem równania L a p l a c e'a. Jego całka ma kształt następujący:

$$w = \sum_{n=0}^{=\infty} \frac{(1-q^2)^{1/2}}{2^n \cdot n!}\,\frac{d^{n+1}(q^2-1)^n}{d\,q^{n+1}} \cdot \left[A_n\, r^n + \frac{B^n}{r^{n+1}}\right]$$

gdzie $n = 0, 1, 2, \ldots\ldots$

$q = \cos\theta$ nareszcie

A_n i B_n są stałemi.

Jeżeli prędkość względna płynu na powierzchni kuli równa się zeru, to mamy warunek, aby dla:

$$r = a \quad \text{było}$$

$$w = \omega \,.\, a \sin\theta$$

gdzie ω jest prędkością kątową obrotu kuli,

„ a „ promieniem kuli.

Wprowadzając ten warunek, spostrzegamy natychmiast, że wszystkie stałe A i B są równe zeru oprócz A_1 i B_1, natomiast równanie warunkowe sprowadza się do

$$\omega a = \left[A_1\, a + \frac{B_1}{a^2}\right].$$

Daléj spostrzegamy, że A_1 musi być równe zeru, albowiem jeżeli A_1 nie jest równe zeru, tedy na nieskończonéj odległości od kuli płyn będzie się poruszał z prędkością nieskończoną, co oczywiście nie jest możebne. Zauważmy przytem, że kładąc $B_1 = 0$ otrzymalibyśmy ruch gazu tożsamościowy z ruchem ciała stałego; przypadek więc $B_1 = 0$ odpowiada założeniu zwykle czynionemu przez meteorologów, że ocean powietrzny obraca się wraz z ziemią, jak gdyby ciało stałe.

Zakładamy tedy: $A_1 = 0,$

stąd $B_1 = \omega a^3,$

$$w = \frac{\omega \,.\, a^3}{r^2} \sin\theta\,.$$

Porównajmy teraz oba rozwiązania: pierwsze ($A_1 = \omega$, $B_1 = 0$) odpowiadające przypadkowi, gdy ocean powietrzny porusza się razem z ziemią, jako część ciała stałego, i drugie ($A_1 = 0$, $B_1 = \omega\, a^3$).

W pierwszym przypadku:

$$w = r\omega \sin\theta\,;$$

stąd na mocy IV bis:

$$\xi = \omega \cos\theta\,,$$

$$\eta = -\,\omega \sin\theta\,;$$

daléj:

$$2w\eta = -\,2\omega^2\, r \sin^2\theta\,,$$

$$2w\xi = 2\omega^2\, r^2 \cos\theta \sin\theta\,.$$

Na mocy tedy I bis:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = 2\omega^2 r \sin^2\theta = \frac{\partial}{\partial r}(\omega^2 r^2 \sin^2\theta),$$

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = 2\omega^2 r^2 \cos\theta \sin\theta = \frac{\partial}{\partial \theta}(\omega^2 r^2 \sin^2\theta),$$

podstawiając zatem zamiast P jego wartość znajdziemy

$$\omega^2 r^2 \sin^2\theta = \int \frac{\partial p}{\varrho} - V + \frac{w^2}{2},$$

lecz

$$w = \omega\, r \sin\theta,$$

a zatem

$$V + \frac{1}{2}\,\omega^2 r^2 \sin^2\theta = \int \frac{\partial p}{\varrho}.$$

Ponieważ V przedstawia potencyał przyciągania, otrzymaliśmy więc znane równanie równowagi gazu znajdującego się w spoczynku odnośnie do ziemi, przyczem

$$\frac{1}{2}\,\omega^2 r^2 \sin^2\theta$$

jest potencyałem pozornéj siły odśrodkowéj.

Uważajmy teraz drugie rozwiązanie:

$$\omega = \frac{\omega\, a^3}{r^2} \sin\theta.$$

Postępując zupełnie tak samo, jak w pierwszym przypadku, otrzymamy równania:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{a^6\omega^2}{r^5}\sin^2\theta &= \frac{1}{\varrho}\,\frac{\partial p}{\partial r}, \\ \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{a^6\omega^2}{r^4}\sin\theta\cos\theta &= \frac{1}{\varrho}\,\frac{\partial p}{\partial \theta}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{V}$$

Spostrzegamy natychmiast, że niema w tym wypadku żadnego potencyału siły odśrodkowéj. Co więcéj, okazuje się, że równania V są pomiędzy sobą sprzeczne. Już Stokes [1]) zauważył, że gdy kula obraca się w cieczy nieściśliwéj, tedy ruch, przy którym ciecz płynie w strugach kołowych, jest niemożliwy. Ciecz porusza się nietylko naokoło kuli, ale jednocześnie płynie od równika ku biegunom i odwrotnie. Jeżeli płyn jest ściśliwy, to między parametrami p, ϱ i T [t. j. temperaturą absolutną], a w ogólnym wypadku między p, ϱ, T, u, v, w zachodzi jeden związek. Prócz tego T także musi zadość czynić pewnemu równaniu różniczkowemu, do którego, oprócz wymienionych, nowe parametry wejść nie mogą. Wogóle zatem będzie więcéj równań, niż zmiennych, i z wyjątkiem szczególnych wypadków, równania V muszą być sprzeczne. Wogóle zatem musi zachodzić cyrkulacya, o któréj mówi Stokes.

Pomimo to wszakże równania V dowodzą, że tak zwana powierzchnia Laplace'a, t. j. powierzchnia, gdzie siła odśrodkowa jest równa sile przyciągania, wcale nie istnieje.

Podobna powierzchnia mogłaby istnieć tylko wtedy, gdyby powietrze poruszało się wraz z ziemią jak część ciała stałego. Najpierw z równania V widzimy że $\frac{\partial p}{\partial r}$ jest zawsze ujemne. Aby $\frac{\partial p}{\partial r}$ mogło zmienić znak, trzeba, by

$$\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{a^6\,\omega^2}{r^5}\sin^2\theta = 0.$$

Jeżeli weźmiemy pod uwagę tylko przyciąganie ziemi, to:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\,g\,\frac{a^2}{r^2},$$

lecz, jak wiadomo, $g = 289 \,.\, \omega^2 a$ (przybliżenie), a zatem można napisać ostatnie równanie pod kształtem:

$$\frac{a^3}{r^3}\sin^3\theta = 289.$$

Nawet na równiku pierwiastek tego równania jest mniejszy, niż a. Stąd wnosimy, że powierzchnia Laplace'a znajduje się wewnątrz ku-

---

[1]) *Math. and Phys. Papers* Cambridge r. 1880, tom I, str. 103. O sprzeczności równań V we wspomnianym przypadku nietrudno się przekonać, różniczkując pierwsze względem θ, a drugie względem v i odejmując jedno od drugiego.

[2]) Porównaj Bjerknes. Recherches hydrodynamiques Acta Math., tom IV, str. 127 i następne.

li [1]) ziemskiéj, zatem dla ruchów atmosfery niema żadnego znaczenia. Możemy wypowiedzieć to zdanie pomimo, iż według naszego mniemania ogólny ruch oceanu powietrznego nie jest taki, jakim go przedstawia nasze zadanie. W zadaniu tem opisujemy tylko jednę stronę ruchu, mając na względzie pozostawanie w tyle za ruchem ziemi ruchu oceanu powietrznego. Jeżeli zaś podobne pozostawanie ma miejsce, — a że ma miejsce o tem wątpić niepodobna—tedy wnioski nasze co do powierzchni Laplace'a są zupełnie słuszne.

Przy pomocy wzoru V nietrudno wyliczyć, że np. na równiku na wysokości $6^1/_2$ kilometra, powietrze ma prędkość względną (w kierunku przeciwnym kierunkowi obrotu ziemi) wynoszącą około jednego metra na sekundę, ale w miarę oddalania się od ziemi prędkość ta względna wzrasta szybko (odwrotnie proporcyonalnie do kwadratu odległości od środka ziemi). W ten sposób tylko cienką warstwę (o grubości paru kilometrów) można w pierwszem przybliżeniu rozpatrywać a poruszającą się razem z ziemią, jako część ciała stałego.

Zwróćmy jeszcze uwagę na ruch postępowy ziemi. Właściwie należałoby rozpatrywać ruch postępowy jednocześnie z obrotowym; niestety jednak nawet zadanie o ruchu płynu lepkiego, w którym kula albo elipsoida porusza się w pewnym kierunku dotychczas jest rozwiązane [2]) tylko dla małych prędkości, przy których można zupełnie nie zwracać uwagi na kwadraty prędkości. Wskutek tego rezultaty są zupełnie niedokładne.

Przy ruchu postępowym ciśnienie z przodu będzie większe niż z tyłu. Wskutek tego mimowoli pojawia się pytanie, czy te różnice ciśnienia nie mają związku z podwójną codzienną oscylacyą barometru. Oczywiście okres zmiany ciśnienia musi być równy 24 godzinom, ale największość i najmniejszość, odpowiadające téj przyczynie przypadają przybliżenie na 6-tą rano i 6-tą wieczorem, podczas gdy przyczyny termiczne wywołują największość ciśnienia przed wschodem słońca, najmniejszość o 2-éj po południu. Wiemy zaś, że funkcya zależna od dwóch parametrów, mających jednakowe okresy, ale zmieniających się niejednakowo może kilkakrotnie przechodzić przez największość i najmniejszość. Tak np.

$$A \sin^3 \theta + B \sin (\alpha + \theta)$$

zależnie od stałych: A, B i α może przechodzić 3 razy przez największość

[1]) Mówimy tu wciąż o kuli, choć oczywiście w ścisłem zadaniu należałoby rozpatrywać elipsoidę. W tym przypadku chodzi nam jednakowóż nietyle o formuły ścisłe, które jak widzimy nie dadzą w żadnym razie zupełnego rozwiązania, ale raczéj o wykazanie, że kwestya stanu naszéj atmosfery jest bezporównania bardziéj złożona, niżli można sądzić wnosząc z tego, co o tem zazwyczaj mówią podręczniki meteorologii.

[2]) Patrz. Oberbeck. Ueber Stationäre Flüssigkeitsbewegungen. *Crelles Journal*, tom LXXXI, r. 1876, str. 62.

i 3 razy przez najmniejszość, albo 2 razy przez największość i tyleż razy przez najmniejszość, albo nakoniec (gdy $\alpha = 0$) tylko raz. Tymczasem okres obu funkcyj: $\sin^3 \theta$ i $\sin (\alpha + \theta)$ równa się: 2π. Z tego powodu warto się przekonać, w jakich granicach zawierają się oscylacye barometru, zależne od postępowego ruchu ziemi.

W tym celu skorzystamy z analizy podanéj przez Oberbecka w pracy wyżéj przytoczonéj. Wprawdzie Oberbeck rozważa tylko ruch prostoliniowy, ale jeżeli zważymy, że średnica orbity ziemskiéj jest 23000 razy większa od średnicy ziemi, dojdziemy do wniosku, że błąd popełniony w ten sposób będzie zupełnie nieznaczny.

Według Oberbecka na równiku:

$$p = \text{const} + \frac{3}{2} \mu . \frac{V}{a} \cos \varphi$$

gdzie φ oznacza odległość kątową liczoną na równiku od prostéj, przechodzącéj przez środek ziemi i ten punkt na równiku, który w danéj chwili znajduje się na przedzie kuli. Daléj

V oznacza postępową prędkość ruchu ziemi po orbicie,

a „ promień ziemi

$$\mu = 0,134\, \varrho \quad ^{1)}$$

w centymetrach i sekundach. Jeżeli odrazu tak poprowadzimy rachunek, aby wyrazić ciśnienie w milimetrach rtęci [2]), przekonamy się, że różnica między największem i najmniejszem ciśnieniem, t. j. przy $\cos \varphi = 1$ i $\cos \varphi = -1$, wyraża się liczbą o liczniku 1 i mianowniku złożonym z 14 cyfr. Gdybyśmy nawet zamiast prędkości V wprowadzili jéj kwadrat, otrzymalibyśmy jeszcze liczbę o liczniku równym jednostce, a mianowniku złożonym z 7 liczb.

W każdym razie zatem oscylacye ciśnienia, zależne od postępowego ruchu ziemi (w połączeniu z ruchem obrotowym) są całkiem nieznaczne. Wyliczenie nasze daje do pewnego stopnia górną granicę dla możliwych oscylacyj barometru, albowiem Oberbeck rozważał płyn nieściśliwy, gdzie zatem

[1]) Patrz np. Helmholtz'a. Ueber atmosphärische Bewegung Sitzurgsber. der Akad. Wiss. Berlin r. 1888, str. 649.

[2]) W takim razie gęstość: $\rho = 760/ga$ gdzie

$$g = 9810 \text{ mm. na (sekundę)}^2$$

$$a = 637 . 10^7 \text{ mm.}$$

gęstość jest wszędzie równa gęstości na powierzchni ziemi; tymczasem gęstość atmosfery szybko zmniejsza się w miarę zwiększania się odległości od ziemi.

Prócz pierwszéj potęgi prędkości rozpatrywaliśmy także kwadrat jéj, albowiem, jak wiadomo, przy zwykłym nierównym ruchu płynów, jak mawiają Anglicy „krętym“ (*sinoous*), opór płynów jest proporcyonalny nie do pierwszéj, lecz raczéj do drugiéj potęgi prędkości.

Odesa, w styczniu r. 1893.

O WAHANIACH ELEKTRYCZNYCH W WIBRATORZE WTÓRNYM.

NAPISAŁ

WIKTOR BIERNACKI.

1. Weźmy pod uwagę dwa obwody elektryczne; przypuśćmy, że tylko w pierwszym z nich działała przez krótki przeciąg czasu pewna siła elektromotoryczna, lecz w chwili $t = 0$ przestała działać. Równania, które wyrażają przybliżony obraz zjawisk występujących w tych obwodach, można przedstawić w następującéj postaci:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} + a_1 \frac{d\varphi_1}{dt} + b_1 \varphi_1 + c_1 \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} = 0, \\ \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} + a_2 \frac{d\varphi_2}{dt} + b_2 \varphi_2 + c_2 \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (I)$$

gdzie φ_1 i φ_2 oznaczają różnice potencyałów w pewnych dwóch punktach każdego obwodu; obwody te będziemy nazywali „wibratorami“, mianowicie wibratorem „pierwotnym“ lub „głównym“ i wibratorem „wtórnym“. Znaczenie współczynników a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 i c_2 jest następujące:

$$a_1 = \frac{R_1}{L_1}; \quad b_1 = \frac{1}{L_1 C_1}; \quad c_1 = \frac{M}{L_1}$$

$$a_2 = \frac{R_2}{L_2}; \quad b_2 = \frac{1}{L_2 C_2}; \quad c_2 = \frac{M}{L_2}, \quad \text{gdzie}$$