O SZEREGACH LOGARYTMOWYCH WROŃSKIEGO.

PODAŁ

S. DICKSTEIN

---

1. W dziele „Réforme des mathématiques“ [1]) podał Wroński szeregi logarytmowe następującéj postaci:

$$\log x = \log a + \frac{(x+a)\,(x-a)}{2\,a\,x} - 4\left[\frac{1}{3}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^3 + \frac{2}{5}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^5 + \frac{3}{7}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^7 + \ldots\ldots\right] \tag{1}$$

$$\log x = \log a + \frac{(x+a)\,(x-a)}{12\,a^2\,x^2}\left[8\,a\,x - (a^2+x^2)\right] + \frac{16}{3}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^5 + \frac{3}{7}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^7 + \frac{6}{9}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^9 + \ldots\ldots\right] \tag{2}$$

$$\log x = \log a + \frac{(x+a)\,(x-a)}{60\,a^3\,x^3}\left[(x-a)^4 + 5\,ax\left\{8\,ax - (a^2+x^2)\right\}\right] - \frac{32}{5}\left[\frac{1}{7}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^7 + \frac{4}{9}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^9 + \frac{10}{11}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^{11} + \ldots\ldots\right] \tag{3}$$

[1]) Str. 328 i t. d.

Rozwinięcia te [1]), wyprowadzone metodą tak zwaną „pierwszorzędną“ (méthode primordiale“) z prawa najwyższego [2]) mają służyć jako przykład „tworzenia neutralnego“ (génération neutre) [3]), polegającego na tem, że otrzymujemy w niem kolejno funkcye wymierne zmiennéj x:

$$\log a + \frac{(x+a)\,(x-a)}{2\,a\,x},$$

$$\log a + \frac{(x+a)\,(x-a)}{12\,a^2\,x^2}\left[8\,ax - (a^2+x^2)\right],$$

$$\log a + \frac{(x+a)\,(x-a)}{60\,a^3\,x^3}\left[(x-a)^4 + 5\,ax\left\{8\,ax - (a^2+x^2)\right\}\right],$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

odtwarzające tem dokładniéj naturę funkcyi $\log x$, im daléj posuwamy się w tworzeniu; na każdym zaś poszczególnym jego stopniu mamy zarazem szeregi „dopełniające“:

$$-4\left[\frac{1}{3}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^5 + \ldots\ldots\right],$$

$$\frac{16}{3}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^5 + \frac{2}{7}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^7 + \ldots\ldots\right],$$

$$-\frac{32}{5}\left[\frac{1}{7}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^7 + \frac{4}{9}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^9 + \ldots\ldots\right],$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

które należy dodać do funkcyi wymiernéj, aby otrzymać ściśle funkcyą daną.

Droga, jaką wskazał Wroński do otrzymania poprzednio wypisanych i następnych stopni tworzenia jest wprawdzie ogólna, ze względu wszakże na dość zawiłe znakowanie już w tym prostym przypadku funkcyi $\log x$ wymaga

---

[1]) Wzory (1) i (2) powtórzył Hanegraeff w „Méthode générale d'intégration, 1856. Metoda jego nie różni się w zasadzie od metody Wrońskiego.

[2]) Porówn. „O prawie najwyższem“. Prace mat.-fiz. II, str. 145 i dalsze.

[3]) Uwagi o metodzie teleologicznéj. Prace mat.-fiz. III, str. 126—129.

dużych rachunków i nie daje bezpośrednio formy najogólniejszéj rozwinięcia; i dlatego to pozwalamy sobie tu podać metodę inną, zupełnie elementarną, dającą dla każdego stopnia kształt funkcyi wymiernéj oraz szereg dopełniający.

2. Metoda ta polega na znanym sposobie przekształcania całek na szeregi nieskończone.

W tym razie uważamy całkę

$$\int_0^u \frac{u^m}{U^n}\,du\,,$$

w któréj $U = 1 - u^2$, m i n są liczby całkowite; oznaczać całkę tę będziemy dla skrócenia przez $S_{m,n}$.

Całkę $S_{m,n}$ przedstawimy pod dwiema postaciami. Najprzód pod postacią szeregu zbieżnego dla wartości u o wartościach bezwzględnych od jedności mniejszych; szereg ten otrzymamy, rozwijając funkcyą $\frac{1}{U^n}$ w sposób następujący:

$$\frac{1}{U^n} = n_1 + n_2\,u^2 + n_3\,u^4 + n_4\,u^6 + \ldots$$

gdzie $n_1, n_2, n_3, n_4 \ldots$ są kolejne liczby figuryczne rzędu n-go, obliczane za pomocą wzoru:

$$n_i = \frac{i\,(i+1)\,(i+2)\ldots(i+n-1)}{1.\,2.\,3\ldots n} = \frac{(i+n-1)!}{(i-1)!\;n!}\,. \tag{4}$$

Będzie zatem

$$\frac{1}{U^n} = \sum_{i=1}^{\infty} n_i\,u^{2(i-1)} \qquad (|u| < 1)$$

Mnożąc przez u^m obie strony i całkując w granicach 0 i u, znajdziemy:

$$S_{m,n} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{n_i}{m+2\,i-1}\,u^{m+2i-1} \tag{5}$$

Z drugiéj strony całkę $S_{m,n}$ możemy przekształcić za pomocą znanych wzorów rachunku całkowego [1]:

[1] Porówn. np. Schlömilch, Compendium der höheren Analysis, I, str. 320, 321. Wydanie z roku 1862.

$$\int \frac{x^m\,dx}{X^n} = -\frac{1}{(2n-m-1)\,c}\,\frac{x^{m-1}}{X^{n-1}} - \frac{(n-m)\,b}{(2n-m-1)\,c}\int\frac{x^{m-1}\,dx}{X^n}$$

$$+\frac{(m-1)\,a}{(2n-m-1)\,c}\int\frac{x^{m-2}\,dx}{X^n}\,,$$

$$\int\frac{dx}{X^n} = \frac{b+2\,c\,x}{(n-1)\,\lambda\,X^{n-1}} + \frac{(2n-3)\,2\,c}{(n-1)\,\lambda}\int\frac{dx}{X^{n-1}}\,,$$

gdzie $X = a + b\,x + cx^2$, $\lambda = 4ac - b^2$,

W naszym przypadku: $x = u$, $X = U$, $a = 1$, $b = 0$, $c = -1$, $\lambda = -4$.

Z pierwszego z tych wzorów otrzymujemy

$$S_{m,n} = \frac{1}{2n-m-1}\left[\frac{u^{m-1}}{U^{n-1}} - (m-1)\,S_{m-2,n}\right],$$

a kolejno jego stosowanie do wartości $m-2, m-4, \ldots,$ przy m parzystem, doprowadza z łatwością do wzoru ogólnego

$$S_{m,n} = \frac{F\,(u)}{U^{n-1}} + A\,S_{0,n}\,, \tag{6}$$

gdzie:

$$F\,(u) = \frac{1}{2n-m-1}\left[u^{m-1} - \frac{m-1}{2n-m-1}\,u^{m-3} + \frac{m-1\,.\,m-3}{2n-m+1\,.\,2n-m+3}\,u^{m-5} - \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + (-1)^{\frac{m}{2}-1}\,\frac{m-1\,.\,m-3\ldots 3}{2n-m+1\,.\,2n-m+3\ldots 2n-3}\,u\right], \tag{7}$$

$$A = \frac{(-1)^{\frac{m}{2}}}{2n-m-1}\cdot\frac{m-1\,.\,m-3\ldots 3}{2n-m+1\,.\,2n-m+3\ldots 2n-3}\,, \tag{8}$$

$$S_{0,n} = \int_0^u \frac{du}{U^n}\,.$$

Całkę $S_{0,n}$ przekształcimy za pomocą drugiego z wyżéj przytoczonych wzorów elementarnych. Otrzymujemy z niego najprzód

$$S_{0,n} = \frac{1}{2n-2}\left[\frac{u}{U^{n-1}} + (2n-3)\,S_{0,n-1}\right],$$

a kolejne stosowanie go do liczb $n, n-1, n-2, \ldots$ doprowadza do wzoru ogólnego

$$S_{0,n} = \frac{\varphi(U)}{U^{n-1}} + B\, S_{0,1},$$

gdzie:

$$\varphi(U) = \frac{1}{2n-2}\left[\frac{2n-3\,.\,2n-5\ldots 3}{2n-4\,.\,2n-6\ldots 2}\, U^{n-2} + \frac{2n-3\,.\,2n-5\ldots 5}{2n-4\,.\,2n-6\ldots 4}\, U^{n-3} + \ldots\right. \tag{9}$$

$$\left.\ldots + \frac{2n-3}{2n-4}\, U + 1\right],$$

$$B = \frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots 2n-3}{2\,.\,4\,.\,6\ldots 2n-2}\,. \tag{10}$$

Z uwagi, że

$$S_{0,1} = \int_0^u \frac{du}{1-u^2} = -\frac{1}{2}\log\frac{1-u}{1+u},$$

będzie

$$S_{0,n} = \frac{u\,\varphi(U)}{U^{n-1}} - \frac{1}{2}\, B \log\frac{1-u}{1+u}\,. \tag{11}$$

Uwzględniając tę wartość we wzorze (6), znajdziemy,

$$S_{m,n} = \frac{F(u)}{U^{n-1}} + A\left\{\frac{u\,\varphi(U)}{U^{n-1}} - \frac{1}{2}\, B\log\frac{1-u}{1+u}\right\},$$

skąd

$$\log\frac{1-u}{1+u} = \frac{2}{B\, U^{n-1}}\left\{\frac{F(u)}{A} + u\,\varphi(U)\right\} - \frac{2}{AB}\, S_{m,n}\,.$$

Kładąc tu za $S_{m,n}$ wartość jego z (6), otrzymamy

$$\log\frac{1-u}{1+u} = \frac{2}{B\,U^{n-1}}\left\{\frac{F(u)}{A} + u\,\varphi(U)\right\} \qquad (|u| < 1) \tag{12}$$

$$- \frac{2}{AB}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{n_i}{m+2i-1}\, u^{m+2i-1}$$

Uczyńmy podstawienie

$$\frac{1-u}{1+u} = \frac{x}{a},$$

z którego wynika $u = \frac{a-x}{a+x}$, $\log\frac{1-u}{1+u} = \log x - \log a$; wzór (12) przyjmie wtedy postać:

$$\log x = \log a + \frac{2\,(a+x)^{2(n-1)}}{B\,.\,(4\,a\,x)^{n-1}}\left\{\frac{F\left(\frac{a-x}{a+x}\right)}{A} + \frac{a-x}{a+x}\,\varphi\left(\frac{a-x}{a+x}\right)\right\} \tag{13}$$

$$+ \frac{2}{AB}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{n_i}{m+2i-1}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^{m+2i-1}$$

Jest to rezultat, który pragnęliśmy otrzymać. Funkcya

$$\log a + \frac{2\,(a+x)^{2(n-1)}}{B\,(4\,a\,x)^{n-1}}\left\{\frac{F\left(\frac{a-x}{a+x}\right)}{A} + \frac{a-x}{a+x}\,\varphi\left(\frac{a-x}{a+x}\right)\right\} \tag{14}$$

przedstawia część wymierną funkcyi $\log x$, odpowiadającą stopniowi tworzenia n, odpowiedni zaś szereg dopełniający jest:

$$\frac{2}{AB}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{n_i}{m+2i-1}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^{m+2i-1}; \tag{15}$$

jestto właśnie postać ogólna szeregów (1). (2), (3).

Dla przykładu weźmy $m = 6$, $n = 4$, otrzymamy wtedy z wzoru (4) liczby figuryczne czwartego rzędu

$$1,\quad 4,\quad 9,\quad 10,\ .\ 20,\ \ldots\ ;$$

z wzorów (8) i (10) dostajemy

$$A = -1,\quad B = \frac{5}{16},$$

funkcya (14) po przekształceniu i przy uwzględnieniu wyrażeń (7) i (9) zamieni się na

$$\log a + \frac{(x+a)\,(x-a)}{60\,a^3\,x^3}\,[(x-a)^4 + 5\,a\,x\,\{8\,a\,x - (a^2+x^2)\}\,],$$

szereg zaś (15) stanie się równym

$$-\frac{32}{5}\left[\frac{1}{7}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^7 + \frac{4}{9}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^9 + \frac{10}{11}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^{11} + \frac{20}{13}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^{13} + \ldots\right],$$

t. j. szeregowi (3) Wrońskiego.

Warszawa, w grudniu 1892.

ZASADA NAJWIĘKSZEGO WSPÓLNEGO DZIELNIKA W ZASTOSOWANIU DO TEORYI PODZIELNOŚCI LICZB ALGEBRAICZNYCH.

NAPISAŁ

J. SOCHOCKI.

I. Wstęp.

1. Dla usunięcia wszelkich wątpliwości uważamy za stosowne wyszczególnić przedewszystkiem te pojęcia i określenia, na których opierać się będą dalsze nasze badania.

Rzeczy łatwe pozostawiamy czytelnikowi samemu do sprawdzenia; życzącemu bliżéj oznajmić się z materyałem, wskazujemy znane dzieło: „Vorlesungen über Zahlentheorie“ Lejeune-Dirichleta.

Wszelka ilość, bądź rzeczywista, bądź urojona, czyniąca zadość równaniu

$$x^n + a_1\,x^{n-1} + a_2\,x^{n-2} + \ldots + a_n = 0,$$

gdzie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są liczby całkowite zwyczajne, nazywa się liczbą całkowitą algebraiczną, albo poprostu liczbą całkowitą. Liczby całkowite zwyczajne uważają się za szczególny przypadek liczb całkowitych algebraicznych.

Główne własności liczb całkowitych algebraicznych są następujące: