UOGÓLNIENIE TWIERDZENIA O PRZYPADKACH SZCZEGÓLNYCH ZAGADNIENIA PFAFFA.

PRZEZ

A. J. STODÓŁKIEWICZA.

We Wrześniu roku bieżącego przedstawiłem Akademii Umiejętności w Krakowie pracę o zagadnieniu Pfaffa, w której wyprowadzam warunki całkowalności dla równania z pięcioma zmiennemi przy istnieniu dwóch całek. W artykule niniejszym zamierzam twierdzenie moje uogólnić dla równania różniczkowego z n zmiennemi.

Niech będzie równanie kształtu

$$X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 + \ldots + X_n\,dx_n = 0\,, \tag{1}$$

którego całki

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1\,,$$
$$f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_2\,.$$

Przez zróżniczkowanie dwóch ostatnich równań otrzymamy

$$\left.\begin{aligned} A_{1,1}\,dx_1 + A_{1,2}\,dx_2 + \ldots + A_{1,n}\,dx_n = 0\,, \\ A_{2,1}\,dx_1 + A_{2,2}\,dx_2 + \ldots + A_{2,n}\,dx_n = 0\,, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

gdzie $A_{1,i}$, $A_{2,i}$ oznaczają pewne funkcye zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Oczywista, między współczynnikami równań (1) i (2) powinny istnieć możliwie najprostsze związki następujące:

$$A_{1,i} + A_{2,i} = \alpha\, X_i \tag{3}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)\,,$$

w których α jest pewna ilość nieznana, wogóle, funkcya zmiennych. Ponieważ każde z równań (2) ma jednę tylko całkę, a więc współczynniki $A_{1,i}$, $A_{2,i}$ uczynią zadość znanym warunkom

$$\left.\begin{aligned} A_{1,n}\left(\frac{\partial A_{1,i}}{\partial x_l} - \frac{\partial A_{1,l}}{\partial x_i}\right) + A_{1,i}\left(\frac{\partial A_{1,l}}{\partial x_n} - \frac{\partial A_{1,n}}{\partial x_l}\right) + A_{1,l}\left(\frac{\partial A_{1,n}}{\partial x_i} - \frac{\partial A_{1,i}}{\partial x_n}\right) = 0\,, \\ A_{2,n}\left(\frac{\partial A_{2,i}}{\partial x_l} - \frac{\partial A_{2,l}}{\partial x_i}\right) + A_{2,i}\left(\frac{\partial A_{2,l}}{\partial x_n} - \frac{\partial A_{2,n}}{\partial x_l}\right) + A_{2,l}\left(\frac{\partial A_{2,n}}{\partial x_i} - \frac{\partial A_{2,i}}{\partial x_n}\right) = 0\,. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

($i, l = 1, 2, \ldots, n-1$ wszystkim kombinacyom po dwie).

Jeżeli następnie z drugiego pomiędzy równaniami (4) wyrugujemy $A_{2,i}$, $A_{2,l}$, $A_{2,n}$ przy pomocy związków (3), otrzymamy

$$\begin{aligned} &(\alpha X_n - A_{1,n})\left[\frac{\partial(\alpha X_i - A_{1,i})}{\partial x_l} - \frac{\partial(\alpha X_l - A_{1,l})}{\partial x_i}\right] \\ &+ (\alpha X_i - A_{1,i})\left[\frac{\partial(\alpha X_l - A_{1,l})}{\partial x_n} - \frac{\partial(\alpha X_n - A_{1,n})}{\partial x_l}\right] \\ &+ (\alpha X_l - A_{1,l})\left[\frac{\partial(\alpha X_n - A_{1,n})}{\partial x_i} - \frac{\partial(\alpha X_i - A_{1,i})}{\partial x_n}\right] = 0\,. \end{aligned}$$

Po dokonaniu łatwych uproszczeń z ostatniego równania dostaniemy

$$\begin{aligned} &\alpha^2 X_n\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_l} - \frac{\partial X_l}{\partial x_i}\right) + \alpha^2 X_i\left(\frac{\partial X_l}{\partial x_n} - \frac{\partial X_n}{\partial x_l}\right) + \alpha^2 X_l\left(\frac{\partial X_n}{\partial x_i} - \frac{\partial X_i}{\partial x_n}\right) \\ &- A_{1,n}\left(\frac{\partial \alpha X_i}{\partial x_l} - \frac{\partial \alpha X_l}{\partial x_i}\right) - A_{1,i}\left(\frac{\partial \alpha X_l}{\partial x_n} - \frac{\partial \alpha X_n}{\partial x_l}\right) - A_{1,l}\left(\frac{\partial \alpha X_n}{\partial x_i} - \frac{\partial \alpha X_i}{\partial x_n}\right) \\ &- \alpha X_n\left(\frac{\partial A_{1,i}}{\partial x_l} - \frac{\partial A_{1,l}}{\partial x_i}\right) - \alpha X_i\left(\frac{\partial A_{1,l}}{\partial x_n} - \frac{\partial A_{1,n}}{\partial x_l}\right) - \alpha X_l\left(\frac{\alpha A_{1,n}}{\partial x_i} - \frac{\partial A_{1,i}}{\partial x_n}\right) = 0\,. \end{aligned}$$

Daléj, wprowadźmy oznaczenia

$$
\begin{aligned}
&\alpha^2 X_n\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_l}-\frac{\partial X_l}{\partial x_i}\right)+\alpha^2 X_i\left(\frac{\partial X_l}{\partial x_n}-\frac{\partial X_n}{\partial x_l}\right)+\alpha^2 X_l\left(\frac{\partial X_n}{\partial x_i}-\frac{\partial X_i}{\partial x_n}\right)- \\
&-A_{1,n}\left(\frac{\partial \alpha X_i}{\partial x_l}-\frac{\partial \alpha X_l}{\partial x_i}\right)-A_{1,i}\left(\frac{\partial \alpha X_l}{\partial x_n}-\frac{\partial \alpha X_n}{\partial x_l}\right)-A_{1,l}\left(\frac{\partial \alpha X_n}{\partial x_i}-\frac{\partial \alpha X_i}{\partial x_n}\right)=M_{n,i,l},
\end{aligned}
\tag{5}
$$

oraz

$$
\frac{\partial A_{1,i}}{\partial x_l}-\frac{\partial A_{1,l}}{\partial x_i}=Q_{i,l}\,.
$$

$$(i,\ l=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)\,.$$

Rozporządzać wtedy będziemy układem $(n-1)\ (n-2)$ następujących równań:

$$
\begin{aligned}
A_{1,n}\, Q_{i,l} + A_{1,i}\, Q_{l,n} + A_{1,l}\, Q_{n,i} &= 0\,, \quad ^{1)} \\
\alpha X_n\, Q_{i,l} + \alpha X_i\, Q_{l,n} + \alpha X_l\, Q_{n,i} &= M_{n,i,l}\,.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Z układu równań (6) wybierzemy pięć grup następujących równań dla skaźników m, k, i, l, r, przy $n \geqq 5$.

Grupa 1-sza:

$$
\begin{aligned}
A_{1,m}\, Q_{i,k} + A_{1,i}\, Q_{k,m} + A_{1,k}\, Q_{m,i} &= 0\,, \\
A_{1,m}\, Q_{i,l} + A_{1,i}\, Q_{l,m} + A_{1,l}\, Q_{m,i} &= 0\,, \\
A_{1,m}\, Q_{k,l} + A_{1,k}\, Q_{l,m} - A_{1,l}\, Q_{k,m} &= 0\,, \\
\alpha X_m\, Q_{i,k} + \alpha X_i\, Q_{k,m} + \alpha X_k\, Q_{m,i} &= M_{m,i,k}\,, \\
\alpha X_m\, Q_{i,l} + \alpha X_i\, Q_{l,m} + \alpha X_l\, Q_{m,i} &= M_{m,i,l}\,, \\
\alpha X_m\, Q_{k,l} + \alpha X_k\, Q_{l,m} - \alpha X_l\, Q_{k,m} &= M_{m,k,l}\,.
\end{aligned}
$$

Grupa 2-ga:

$$
\begin{aligned}
A_{1,r}\, Q_{i,k} + A_{1,i}\, Q_{k,r} + A_{1,k}\, Q_{r,i} &= 0\,, \\
A_{1,r}\, Q_{i,l} + A_{1,i}\, Q_{l,r} + A_{1,l}\, Q_{r,i} &= 0\,, \\
A_{1,r}\, Q_{k,l} + A_{1,k}\, Q_{l,r} - A_{1,l}\, Q_{k,r} &= 0\,,
\end{aligned}
$$

[1] Podobny układ można napisać także dla skaźnika $n-1$, lub $n-2$ i t. d., gdyż zależnem to jest od tego, którą ze zmiennych chcemy uważać za funkcyą pozostałych zmiennych niezależnych.

$$
\begin{aligned}
\alpha X_r\, Q_{i,k} + \alpha X_i\, Q_{k,r} + \alpha X_k\, Q_{r,i} &= M_{r,i,k}\,, \\
\alpha X_r\, Q_{i,l} + \alpha X_i\, Q_{l,r} + \alpha X_l\, Q_{r,i} &= M_{r,i,l}\,, \\
\alpha X_r\, Q_{k,l} + \alpha X_k\, Q_{l,r} - \alpha X_l\, Q_{k,r} &= M_{r,k,l}\,.
\end{aligned}
$$

Grupa 3-ia:

$$
\begin{aligned}
A_{1,r}\, Q_{i,k} + A_{1,i}\, Q_{k,r} + A_{1,k}\, Q_{r,i} &= 0\,, \\
A_{1,r}\, Q_{i,m} + A_{1,i}\, Q_{m,r} + A_{1,m}\, Q_{r,i} &= 0\,, \\
A_{1,r}\, Q_{k,m} + A_{1,k}\, Q_{m,r} - A_{1,m}\, Q_{k,r} &= 0\,, \\
\alpha X_r\, Q_{i,k} + \alpha X_i\, Q_{k,r} + \alpha X_k\, Q_{r,i} &= M_{r,i,k}\,, \\
\alpha X_r\, Q_{i,m} + \alpha X_i\, Q_{m,r} + \alpha X_m\, Q_{r,i} &= M_{r,i,m}\,, \\
\alpha X_r\, Q_{k,m} + \alpha X_k\, Q_{m,r} - \alpha X_m\, Q_{k,r} &= M_{r,k,m}\,.
\end{aligned}
$$

Grupa 4-ta:

$$
\begin{aligned}
A_{1,r}\, Q_{i,l} + A_{1,i}\, Q_{l,r} + A_{1,l}\, Q_{r,i} &= 0\,, \\
A_{1,r}\, Q_{i,m} + A_{1,i}\, Q_{m,r} + A_{1,m}\, Q_{r,i} &= 0\,, \\
A_{1,r}\, Q_{l,m} + A_{1,l}\, Q_{m,r} - A_{1,m}\, Q_{l,r} &= 0\,, \\
\alpha X_r\, Q_{i,l} + \alpha X_i\, Q_{l,r} + \alpha X_l\, Q_{r,i} &= M_{r,i,l}\,, \\
\alpha X_r\, Q_{i,m} + \alpha X_i\, Q_{m,r} + \alpha X_m\, Q_{r,i} &= M_{r,i,m}\,, \\
\alpha X_r\, Q_{l,m} + \alpha X_l\, Q_{m,r} - \alpha X_m\, Q_{l,r} &= M_{r,l,m}\,.
\end{aligned}
$$

Grupa 5-ta:

$$
\begin{aligned}
A_{1,r}\, Q_{k,l} + A_{1,k}\, Q_{l,r} + A_{1,l}\, Q_{r,k} &= 0\,, \\
A_{1,r}\, Q_{k,m} + A_{1,k}\, Q_{m,r} + A_{1,m}\, Q_{r,k} &= 0\,, \\
A_{1,r}\, Q_{l,m} + A_{1,l}\, Q_{m,r} - A_{1,m}\, Q_{l,r} &= 0\,, \\
\alpha X_r\, Q_{k,l} + \alpha X_k\, Q_{l,r} + \alpha X_l\, Q_{r,k} &= M_{r,k,l}\,, \\
\alpha X_r\, Q_{k,m} + \alpha X_k\, Q_{m,r} + \alpha X_m\, Q_{r,k} &= M_{r,k,m}\,, \\
\alpha X_r\, Q_{l,m} + \alpha X_l\, Q_{m,r} - \alpha X_m\, Q_{l,r} &= M_{r,l,m}\,.
\end{aligned}
$$

Każda z powyższych grup równań ma osobliwą własność, którą najłatwiéj można uwidocznić w sposób następujący:

Z pierwszych trzech równań grupy 1-éj znajdujemy

$$Q_{i,k} = \frac{-A_{1,i}\, Q_{k,m} - A_{1,k}\, Q_{m,i}}{A_{1,m}},$$

$$Q_{i,l} = \frac{-A_{1,i}\, Q_{l,m} - A_{1,l}\, Q_{m,i}}{A_{1,m}},$$

$$Q_{k,l} = \frac{-A_{1,k}\, Q_{l,m} + A_{1,l}\, Q_{k,m}}{A_{1,m}}.$$

Podstawiając te wartości w trzy pozostałe równania grupy 1-éj, otrzymamy

$$\begin{aligned} &\alpha\,(X_i\, A_{1,m} - X_m\, A_{1,i})\, Q_{k,m} + \alpha\,(X_k\, A_{1,m} - X_m\, A_{1,k})\, Q_{m,i} = A_{1,m}\, M_{m,i,k}\,,\\ &\alpha\,(X_i\, A_{1,m} - X_m\, A_{1,i})\, Q_{l,m} + \alpha\,(X_l\, A_{1,m} - X_m\, A_{1,l})\, Q_{m,i} = A_{1,m}\, M_{m,i,l}\,, \qquad (7)\\ &\alpha\,(X_m\, A_{1,l} - X_l\, A_{1,m})\, Q_{k,m} + \alpha\,(X_k\, A_{1,m} - X_m\, A_{1,k})\, Q_{l,m} = A_{1,m}\, M_{m,k,l}\,. \end{aligned}$$

Dla krótkości wprowadzimy oznaczenia:

$$X_r\, A_{1,m} - X_m\, A_{1,r} = d_r\,,$$
$$(r = i,\, k,\, l),$$

$$\begin{vmatrix} d_i\,, & d_k\,, & 0 \\ 0\,, & d_l\,, & d_i \\ -d_l\,, & 0\,, & d_k \end{vmatrix} = D;$$

gdy zaś zastąpimy w wyznaczniku powyższym pierwszą kolumnę elementów przez wyrazy, stojące po drugiéj stronie znaku równości w równaniach (7), wyznacznik taki nazywać będziemy D'. Podobne zastąpienie drugiéj kolumny utworzy D'' i trzeciéj D'''. Rozwiązując układ (7), otrzymamy

$$\beta Q_{k,m} = \frac{D'}{D}\,,\quad \beta Q_{m,i} = \frac{D''}{D}\,,\quad \beta Q_{l,m} = \frac{D'''}{D}\,;$$

gdzie
$$\beta = \frac{\alpha}{A_{1,m}}$$

ponieważ jednak $D \equiv 0$, a więc będziemy mieli trzy równania

$$D' = 0\,,\quad D'' = 0\,,\quad D''' = 0\,.$$

Łatwo zauważyć, że każde z ostatnich równań po dokonaniu skróceń daje jedno i to samo równanie

$$(X_l A_{1,m} - X_m A_{1,l})\, M_{m,i,k} - (X_k A_{1,m} - X_m A_{1,k})\, M_{m,i,l} + (X_i A_{1,m} - X_m A_{1,i})\, M_{m,k,l} = 0,$$

które po wyrugowaniu ilości M przy pomocy związków (5) i dokonaniu łatwych redukcyj i skróceń zamienia się na równanie następujące

$$(k,\, l,\, m)\, A_{1,i} - (i,\, l,\, m)\, A_{1,k} + (i,\, k,\, m)\, A_{1,l} - (i,\, k,\, l)\, A_{1,m} = 0\,,$$

gdzie

$$(\varrho,\, \sigma,\, \tau) = X_\varrho \left(\frac{\partial X_\sigma}{\partial x_\tau} - \frac{\partial X_\tau}{\partial x_\sigma}\right) + X_\sigma \left(\frac{\partial X_\tau}{\partial x_\varrho} - \frac{\partial X_\varrho}{\partial x_\tau}\right) + X_\tau \left(\frac{\partial X_\varrho}{\partial x_\sigma} - \frac{\partial X_\sigma}{\partial x_\varrho}\right).$$

($\varrho,\, \sigma,\, \tau =$ kombinacyom liczb $i,\, k,\, l,\, m$ po trzy).

Tym sposobem z każdéj z napisanych powyżéj pięciu grup równań otrzymamy po jednym równaniu i wskutek tego będziemy mieli układ:

$$\begin{aligned} &(k,\, l,\, m)\, A_{1,i} - (i,\, l,\, m)\, A_{1,k} + (i,\, k,\, m)\, A_{1,l} - (i,\, k,\, l)\, A_{1,m} = 0\,,\\ &(k,\, l,\, r)\, A_{1,i} - (i,\, l,\, r)\, A_{1,k} + (i,\, k,\, r)\, A_{1,l} - (i,\, k,\, l)\, A_{1,r} = 0\,,\\ &(k,\, m,\, r)\, A_{1,i} - (i,\, m,\, r)\, A_{1,k} + (i,\, k,\, r)\, A_{1,m} - (i,\, k,\, m)\, A_{1,r} = 0\,, \qquad (8)\\ &(l,\, m,\, r)\, A_{1,i} - (i,\, m,\, r)\, A_{1,l} + (i,\, l,\, r)\, A_{1,m} - (i,\, l,\, m)\, A_{1,r} = 0\,,\\ &(l,\, m,\, r)\, A_{1,k} - (k,\, m,\, r)\, A_{1,l} + (k,\, l,\, r)\, A_{1,m} - (k,\, l,\, m)\, A_{1,r} = 0\,. \end{aligned}$$

Wyznacznik [1]) tego układu jest tożsamościowo równy zeru

$$\Delta = \begin{vmatrix} (k,l,m), & -(i,l,m), & (i,k,m), & -(i,k,l), & 0 \\ (k,l,r), & -(i,l,r), & (i,k,r), & 0, & -(i,k,l) \\ (k,m,r), & -(i,m,r), & 0, & (i,k,r), & -(i,k,m) \\ (l,m,r), & 0, & -(i,m,r), & (i,l,r), & -(i,l,m) \\ 0, & (l,m,r) & -(k,m,r), & (k,l,r), & -(k,l,m) \end{vmatrix} = 0\,.$$

Jeżeli minory, odpowiadające elementom pierwszego wiersza wyznacznika Δ oznaczymy przez $\Delta_1,\, \Delta_2,\, \Delta_3,\, \Delta_4,\, \Delta_5$, to na zasadzie znanego twierdzenia będzie

$$A_{1,i} : A_{1,k} : A_{1,l} : A_{1,m} : A_{1,r} = \Delta_1 : \Delta_2 : \Delta_3 : \Delta_4 : \Delta_5\,. \qquad (9)$$

Ponieważ skaźniki $i,\, k,\, l,\, m,\, r$ są jakiekolwiek liczby z szeregu $1,\, 2,\, \ldots,\, n$, wnioskujemy więc z tego, że dla równania (1) podobnych związków, jak układ (8) można napisać tyle, ile jest kombinacyj z liczb $1, 2, \ldots, n$ po pięć, czyli

---

[1]) Skośny symetryczny, nieparzystego stopnia.

$$\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)}{1.2.3.4.5}\,.$$

Łatwo zauważyć, że z równań (3) i (4) podobną drogą można otrzymać tożsamościowy układ z układem (8) dla ilości $A_{2,i}$, $A_{2,k}$, $A_{2,l}$, $A_{2,m}$, $A_{2,r}$, z którego podobnie wypływa

$$A_{2,i} : A_{2,k} : A_{2,l} : A_{2,m} : A_{2,r} = \Delta_1 : \Delta_2 : \Delta_3 : \Delta_4 : \Delta_5\,. \tag{10}$$

Przez porównanie związków (9) i (10) otrzymujemy

$$A_{1,i} : A_{1,k} : A_{1,l} : A_{1,m} : A_{1,r} = A_{2,i} : A_{2,k} : A_{2,l} : A_{2,m} : A_{2,r}\,,$$

co jest, wogóle, niemożliwem. Wniosek stąd, że koniecznie muszą zachodzić następujące równania:

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = \Delta_5 = 0 \tag{11}$$

czyli, że układ (8) jest nieoznaczony.

Równania (11) przedstawiają jeden układ warunków całkowalności dla równania (1). Kombinując skaźniki i, k, l, m, r przy różnych ich wartościach $1, 2, \ldots, n$, otrzymamy wszystkie pozostałe układy warunków całkowalności. Sposoby całkowania równania (1), posiadającego dwie całki, wyłożyłem w dodatku do *„Zbioru przykładów i odpowiedzi na kwadratury równań różniczkowych“* [1]).

Płock, w październiku 1892 r.

[1]) Wydanie z zapomogi kasy imienia J. Mianowskiego, Warszawa 1892 r.

O KONGRUENCYI

$x^n + A_1\,x^{n-1} + A_2\,x^{n-2} + \ldots + A_n \equiv 0 \pmod{p}$ [1]).

NAPISAŁ

E. SNOPEK.

König i Rados z Budapesztu [2]) podali następujący warunek konieczny i dostateczny istnienia pierwiastków kongruencyi

$$a'_0\,x^n + a'_1\,x^{n-1} + a'_2\,x^{n-2} + \ldots + a'_n \equiv 0 \pmod{p} \tag{1}$$

gdzie a'_0, a'_1, a'_2, . . . , a'_n są liczby całkowite (dodatnie i ujemne), a p jest liczbą pierwszą:

I. Kongruencya (1) sprowadzona za pomocą związku $x^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ do formy

$$\varphi\,(x) = b_0\,x^{p-2} + b_1\,x^{p-3} + \ldots + b_{p-2} \equiv 0 \pmod{p} \tag{2}$$

posiada wtedy przynajmniéj jeden pierwiastek ($< p$), gdy wyznacznik

[1]) Temat téj krótkiéj rozprawki jak również zachętę do jéj opracowania zawdzięczam memu szanownemu Prof. D-rowi J. Puzynie, w którego ćwiczeniach matematycznych w roku szkolnym 1891/92 teoryą liczb się zajmowano.

[2]) Zur Theorie der höheren Congruenzen, Journal für die reine und angewandte Mathematik, XCIX, str. 258—260.