O ZASADNICZYCH WZORACH REFRAKCYI ASTRONOMICZNÉJ.

NAPISAŁ

LUDWIK BIRKENMAJER.

1. Wszystkie dotychczasowe teorye refrakcyi astronomicznéj różnią się od siebie prawem zmiany wykładnika łamania światła w warstwach atmosfery posiadających zmienną gęstość, ciśnienie i ciepłotę, mają zaś tyle wspólnego, iż jednozgodnie uważają powierzchnie „poziomu“ atmosfery *za kule* współśrodkowe z ziemią. W takim razie całe zjawisko refrakcyi astronomicznéj teoretycznie upraszcza się znacznie i sprowadza się do wyznaczenia zboczenia kierunku promienia gwiazdy w płaszczyźnie przez gwiazdę, oko i zenit przesuniętéj, skutkiem czego z dwóch chwilowych współrzędnych ciała niebieskiego: wysokości i azymutu, tylko pierwsza doznaje zmiany, a druga t. j. azymut pozostaje niezmienną. Była przecież w różnych czasach podnoszoną myśl, że prawdopodobnie istnieje także refrakcya azymutowa czyli lateralna (obok wysokościowéj), lecz wszelkie usiłowania skierowane do jéj wykrycia obracały się bardziéj w obrębie refrakcyi ziemskiéj (terrestrycznéj) aniżeli astronomicznéj. Dodać musimy, iż te badania refrakcyi ziemskiéj [1]) wywołane potrzebą dokładnych pomiarów azymutów ziemskich przedmiotów

[1]) Wywołane w największéj części pracami międzynarodowéj komisyi europejskiéj dla geodezyjnego pomiaru Europy; zob. obszerne publikacye téj Instytucyi p. t. Verhandlungen der... allgem. Conferenz der europäischen Gradmessung, Berlin 1861—1884.

przy pracach tryangulacyjnych zasadzały się i zasadzają na przypuszczeniu, iż wysokość uważanego punktu (kątowa) jest bardzo małą, czyli — co na jedno wychodzi — że odległość zenitalna (Zenithdistanz) jest bardzo blizką 90°. Nie czyniąc takiego przypuszczenia, wykluczamy wypadek nader rzadko zachodzący w astronomii praktycznéj, iż odległość zenitalna obserwowanego ciała niebieskiego jest bardzo blizką 90°, a w takim razie wszystkie dotychczasowe teorye dają (dla bardzo małych np. odległości zenitalnych) prawie jednozgodne wyniki: refrakcya wysokościowa jest bardzo małą, zmniejsza się ze zmniejszaniem odległości zenitalnéj, w samym zenicie jest zerem [1]), refrakcya zaś azymutowa czyli lateralna jest stale zerem.

2. Takie wnioski będą jednak oczywiście tylko tak długo ścisłemi, jak długo przypuszczenie kulistości warstw „poziomu“ (t. j. warstw o równéj gęstości atmosfery) wobec krytyki ostać się może. Rzecz dziwna, że na ten szczegół dotąd tak mało uwagi zwracano. Jakkolwiek kwestye kształtu i wielkości atmosfery ziemskiéj należą do tych, które ciągle jeszcze oczekują swego ostatecznego załatwienia, to jednak tyle jest rzeczą pewną, iż jeżeli nie cała, to bodaj wielka część atmosfery ziemskiéj bierze wspólny udział w obrotowym ruchu ziemi, że więc skutkiem tego powierzchnie „poziomu“ atmosfery nie mogą być kulami współśrodkowemi lecz w ogólności *sferoidami* harmonicznemi (W. Thomson) o pewnem stałem lub—co prawdopodobniejsze—zmiennem spłaszczeniu [2]). Dalej i to jest rzeczą pewną, iż w takim razie sferoidy te będą spłaszczone, a kierunek ich małych osi będzie padał na kierunek osi sferoidu ziemskiego, skutkiem czego przekrój tych powierzchni przez płaszczyznę pionową będzie w przybliżeniu elipsą, do któréj normalna nie będzie w ogólności przechodziła przez środek ziemi, a choćby tylko nakrywała kierunek normalnéj w odpowiedniem miejscu sferoidu ziemskiego. Godząc się na te wyobrażenia, niepodobna zaprzeczyć, że refrakcya azymutowa musi być ciągłym towarzyszem refrakcyi wysokościowéj i że tylko dla szczególnych położeń ciał niebieskich może się ona stawać zerem; co więcéj, że nawet w zenicie *może* istnieć bardzo mała refrakcya wysokościowa, gdyż kierunek pionu w miejscu obserwacyi jest w ogólności różnym od kierunku normalnych do powierzchni „poziomu“ warstw atmosfery. Nakrycie się zaś tych kierunków mogłoby więc chyba tylko na obu biegunach ziemi nastąpić, a to dla tego, że krzywizna wszystkich przekrojów normalnych do sferoidu obrotowego jest w tych miejscach jednakową.

Będzie tedy rzeczą ciekawą poznać, jakie są *zasadnicze* równania tego zawikłanego zjawiska, wyprowadzone bez hypotezy o kulistości

[1]) Zob. np. rozprawę Bruhns'a Über astronomische Strahlenbrechung... gdzie zestawione są wszystkie teorye tego zjawiska począwszy od najstarszych.

[2]) Jedyne głębsze poszukiwanie w przedmiocie kształtu atmosfery jest Laplace'a (zob. Mécanique céleste T. II, livre III chap. VII pag. 167).

warstw „poziomu“ atmosfery. Rzecz sama daje się bardzo krótko przedstawić tem bardziéj, że zastosowanie tych wzorów do rzeczywistych obliczeń i ułożenia tablic refrakcyi astronomicznéj na wzór Besselowych, musi piszący te słowa pozostawić astronomom z zawodu.

3. Krzywą światła (t. j. „drogę“ promienia) uważamy w ogólności za krzywą przestrzenną, t. j. za linią o podwójnéj krzywiźnie.

Jeżeli przez v oznaczymy *prędkość* zmienną światła (t. j. rozchodzenia się ruchu falowego) w pewnym punkcie „drogi“ światła, który to punkt wyznaczony jest współrzędnemi prostokątnemi x, y, z (początek współrzędnych możemy przyjąć w geometrycznym środku ziemi), jeżeli daléj ds jest łukiem nieskończenie małym szukanéj krzywéj, po którym ruch falowy przenosi się w nieskończenie małéj chwilce czasu dt, to mamy

$$dt = \frac{ds}{v}.$$

Prędkość światla w różnych warstwach atmosfery jest ilością zmienną, gdyż wykładnik załamania się światła jest zmiennym od jednéj warstwy do drugiéj; na jednéj i téj saméj warstwie „poziomu“ obie te ilości posiadają jednak stałą wartość (w dotychczasowych teoryach refrakcyi astronomicznéj, wykładnik załamania zmienia się od jednéj kuli do drugiéj). Jeżeli tedy

$$u = \text{stałéj}$$

jest równaniem powierzchni „poziomu“ atmosfery (w zwykłym wypadku $u = x^2 + y^2 + z^2$), gdzie u jest funkcyą trzech zmiennych x, y, z, to w wypadku najogólniejszym

$$v = f(u),$$

gdzie f jest pewną funkcyą, któréj wyznaczenie należy z jednéj strony do spostrzeżeń, a z drugiéj do doświadczeń nad ściśliwością, ciepłem gatunkowem, . . . i t. d. powietrza atmosferycznego.

Jeżeli ξ, η, ζ są współrzędnemi prostokątnemi miejsca obserwacyi, *to całkowity czas*, jakiego potrzebuje światło aby od gwiazdy S dojść do oka obserwatora, będzie

$$T = \int_{(\xi\eta\zeta)}^{\infty} \frac{ds}{f(u)},$$

gdzie wskaźnik $(\xi\,\eta\,\zeta)$ oznacza, iż po wykonanem calkowaniu w miejsce x, y, z należy podstawić ξ, η, ζ. Granicę górną całkowania wzięliśmy nie-

skończenie wielką dla powodów, które z dotychczasowych teoryi astronomicznéj refrakcyi są dostatecznie wiadome. Biorąc jeszcze

$$f'(u) = \frac{1}{\varphi(u)},$$

napiszemy dogodniéj

$$T = \int_{(\xi\eta\zeta)}^{\infty} \varphi(u)\, ds\,;$$

z uwagi więc, że różniczka łuku krzywéj przestrzennéj

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

mamy wyraźniéj

$$T = \int_{\xi}^{\infty} \varphi(u) \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\,.\,dx,$$

gdzie stosownie do znakowania Lagrange'a położyliśmy

$$y' = \frac{dy}{dx}, \qquad z' = \frac{dz}{dx}$$

tak, iż w powyższem całkowaniu zmienna x obraną została za zmienną niezależną.

4. Pospolicie równanie krzywéj będącéj drogą światła (*route de la lumière*) wyprowadza się z warunku, że stosunek wstaw kąta padania i kąta załamania jest stałym i równym stosunkowi odpowiednich wykładników załamania w obydwóch środowiskach optycznych. Prawo to znane pod nazwą prawa Snelliusa albo prawa Descartes'a jest dostatecznem tak długo dopóki krzywa światła jest płaską t. j. tak długo, dopóki powierzchnie „poziomu“ warstw atmosfery będziemy uważali za kule współśrodkowe. Nie krępując się takiem przypuszczeniem i biorąc kształt tych powierzchni „poziomu“ w ogólności różnym od kulistego, musimy do rachunku wprowadzić jeszcze drugi warunek wyznaczający kierunek załamanego promienia, a tym warunkiem jest, jak wiadomo, następujący:

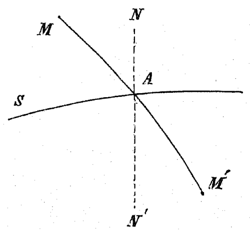
„Promień padający, promień załamany i normalna padania leżą zawsze w jednéj płaszczyźnie“.

Normalną padania promienia światła przechodzącego kolejno różne warstwy atmosfery jest normalna do powierzchni krzywéj będącéj powierzchnią „poziomu“ atmosfery; należałoby tedy wyrazić matematycznie, że dwa bezpośrednio po sobie następujące nieskończenie małe elementy ds i ds' krzywéj, jako też przynależna normalna leżą w jednéj i téj saméj płaszczyźnie. A że płaszczyzna przesunięta przez dwa sąsiednie elementy krzywéj przestrzennéj jest *płaszczyzną ściśle styczną*, przeto należałoby wyrazić, że kierunek normalnéj do powierzchni

$$u = \text{stałéj}$$

(zob. ust. **3.**), leży stale w płaszczyźnie ściśle stycznéj do szukanéj krzywéj światła. Lecz warunek ten wraz z powyższym (aby stosunek wstaw kąta padania i załamania był stałym i równym stosunkowi wykładników załamania światła w obydwóch środowiskach) daje się zastąpić *jednym jedynym*, jak to zaraz okażemy.

Jeżeli S jest dowolną powierzchnią *synklastyczną* (W. Thomson) t. j. taką, w któréj promienie krzywizny głównych przecięć normalnych mają zawsze jeden i ten sam kierunek (kula, elipsoida paraboloida elliptyczna są takiemi powierzchniami, podczas gdy np. paraboloida hyperboliczna czyli powierzchnia siodłowata przedstawia wypadek powierzchni *antiklastycznéj*), oddzielającą od siebie dwa *różne* środowiska, w których leżą *dowolnie* dwa punkty M i M', to zastrzegając, że prędkość ruchu punktu materyalnego w pierwszem środowisku jest c, w drugiem c', możemy pytać: jaką drogę musi opisać punkt materyalny, aby z M do M' doszedł *w jak najkrótszym czasie*? Zadanie to znane pod nazwą zagadnienia Fermata daje się za pomocą pierwszych zasad rachunku różniczkowego i geometryi analitycznéj rozwiązać. Odpowiedź brzmi:



Aby punkt ruchomy z M do M' doszedł w czasie *jak najkrótszym*, musi

a) tak droga MA jakoteż AM' być prostolinijną;

b) punkt A na powierzchni S tak być obranym, aby 3 proste MA, AM' i normalna NN' do powierzchni S leżały w jednéj płaszczyźnie;

c) $\dfrac{\sin MAN}{\sin M'AN'} = \dfrac{c}{c'}$ t. j. stosunek wstaw kąta padania i załamania musi być równym stosunkowi prędkości w obydwóch środowiskach.

Ponieważ właśnie te trzy warunki mają być dopełnione, gdy światło opuszczając jedno środowisko, przechodzi w drugie, przeto *wystarczającem* znamieniem wszystkich praw załamania się światła będzie warunek, że czas, jakiego potrzebuje światło, aby od M przeniosło się do M', był *minimum*.

Dowód powyższego twierdzenia Fermata jest zbyt łatwym, aby zasługiwał tutaj na przytoczenie; zauważymy tylko, iż ta ciekawa własność daje się widocznie uogólnić do dwóch, trzech, ... i t. d. a wreszcie dowolnéj liczby powierzchni $S, S', S'', \ldots,$ oddzielających od siebie różne środowiska optyczne.

Po tem wszystkiem możemy tedy powiedzieć:

Droga światła w atmosferze ziemskiéj, a więc i całe zjawisko refrakcyi astronomicznéj daje się wyznaczyć z jednego jedynego warunku, aby czas potrzebny na przeniesienie się światła od gwiazdy do oka był *minimum*.

5. Jeżeli całka określona

$$\int_{x_1}^{x_2} V\,dx$$

(gdzie granice całkowania x_1 i x_2 są stałe) ma być minimum, to kładąc

$$M = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad N = \frac{\partial V}{\partial y'},$$

$$M' = \frac{\partial V}{\partial z}, \quad N' = \frac{\partial V}{\partial z'},$$

na podstawie rachunku przemienności, otrzymujemy następujące dwa równania warunkowe:

$$M - \frac{dN}{dx} = 0, \quad M' - \frac{dN'}{dx} = 0$$

(pod warunkiem, że funkcya V oprócz x, y, z, y', z' niezawiera większéj ilości zmiennych i wyższych pochodnych takich, jak $y'', z'', y''' z''', \ldots$). Te wzory dają się bezpośrednio zastosować do naszego przypadku. Całka określona mająca się stać *minimum* w przepisanych granicach jest (ust. 3)

$$T = \int_{\xi}^{\infty} \varphi(u) \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\,dx,$$

a więc (z uwagi, że u jest funkcyą trzech zmiennych x, y, z ale *wyraźnie* nie zależy od y' i z')

$$M = \varphi'(u) \frac{\partial u}{\partial y} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2},$$

$$M' = \varphi'(u) \frac{\partial u}{\partial z} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2},$$

$$N = \varphi(u) \cdot \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}, \quad N' = \varphi(u) \cdot \frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}.$$

Równania warunkowe dla minimum będą tedy

$$\varphi'(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} = \frac{d}{dx} \left\{ \varphi(u) \cdot \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} \right\},$$

$$\varphi'(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} = \frac{d}{dx} \left\{ \varphi(u) \cdot \frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} \right\},$$

co z uwagi, że

$$ds = dx \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}, \quad y' = \frac{dy}{ds}, \quad z' = \frac{dz}{ds},$$

można napisać tak:

$$\varphi'(u) \frac{\partial u}{\partial y} ds = d \left\{ \varphi(u) \frac{dy}{ds} \right\},$$

$$\varphi'(u) \frac{\partial u}{\partial z} ds = d \left\{ \varphi(u) \frac{dz}{ds} \right\},$$

do których to dwóch równań można jeszcze dołączyć trzecie

$$\varphi'(u) \frac{\partial u}{\partial x} ds = d \left\{ \varphi(u) \frac{dx}{ds} \right\},$$

gdyż dowolne dwa z pomiędzy nich pociągają za sobą, jako konieczne następstwo równanie trzecie.

Takie są tedy *najogólniejsze* równania refrakcyi astronomicznéj wyprowadzone niezależnie od wszelkich hypotez o jakości kształtu powierzchni

„poziomu“ atmosfery ziemskiéj. Posiadają one, jak widać, wielką symetryą która z pewnością ułatwi wszelkie dalsze rachuby jakikolwiek zresztą kształt mogłaby posiadać nieokreślona dotąd funkcya u — okoliczność, która pewnie nie jest bez wartości.

6. W szczególnym wypadku, gdy powierzchnie „poziomu“ atmosfery będziemy uważali za kuliste, będzie

$$u = x^2 + y^2 + z^2 = \text{stałéj},$$

zatem

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 2z,$$

skutkiem czego zasadnicze równania będą

$$2x\,\varphi'(u)\,ds = d\left\{ \varphi(u) \cdot \frac{dx}{ds} \right\},$$

$$2y\,\varphi'(u)\,ds = d\left\{ \varphi(u) \cdot \frac{dy}{ds} \right\},$$

$$2z\,\varphi'(u)\,ds = d\left\{ \varphi(u) \cdot \frac{dz}{ds} \right\}.$$

Pomnóżmy pierwsze z tych równań przez y, drugie przez x i odejmijmy je od siebie, a będzie

$$yd\left\{ \varphi \frac{dx}{ds} \right\} - xd\left\{ \varphi \frac{dy}{ds} \right\} = 0,$$

gdzie dla skrócenia położyliśmy

$$\varphi = \varphi(u).$$

Otóż w ogólności dla dwóch jakichkolwiek funkcyj U, V mamy

$$U\,d\,V = d\,(U\,V) - U\,d\,V,$$

obecnie zatem

$$yd\left\{ \varphi \frac{dx}{ds} \right\} = d\left\{ y \varphi \frac{dx}{ds} \right\} - \varphi \frac{dx}{ds} \cdot dy,$$

a podobnie

$$xd\left\{\varphi\frac{dy}{ds}\right\} = d\left\{x\varphi\frac{dy}{ds}\right\} - \varphi \, . \, \frac{dy}{ds}\,dx\,,$$

więc

$$d\left(y\varphi\frac{dx}{ds}\right) - \varphi\frac{dx}{ds} \, . \, dy = d\left(x\varphi\frac{dy}{ds}\right) - \varphi\frac{dy}{ds} \, . \, dx\,,$$

t. j.

$$d\left(y\varphi\frac{dx}{ds}\right) = d\left(x\varphi\frac{dy}{ds}\right).$$

Całkowanie daje:

$$y\varphi\frac{dx}{ds} - x\varphi\frac{dy}{ds} = \text{stałéj}\,.$$

W ten sam sposób dochodzimy do następujących trzech równań:

$$\varphi \, . \left(y\frac{dz}{ds} - z\frac{dy}{ds}\right) = C_1\,,$$

$$\varphi \, . \left(z\frac{dx}{ds} - x\frac{dz}{ds}\right) = C_2\,,$$

$$\varphi \, . \left(x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds}\right) = C_3\,,$$

gdzie C_1, C_2, C_3 są stałemi całkowania. Pomnóżmy te równania po kolei przez x, y, z i dodajmy je do siebie, a otrzymamy

$$C_1\,x + C_2\,y + C_3\,z = 0$$

skąd widać, iż w takim razie droga leży w płaszczyźnie przesuniętéj przez środek ziemi, gwiazdę i oko spostrzegacza, jak tego oczekiwaliśmy.

W powyższym rachunku znajduje się pewna analogia do *zasady zachowania pól* przy ruchu środkowym; możnaby tedy wnosić, iż dałoby się wyprowadzić inne równanie całkowe odpowiadające *zasadzie zachowania siły żywéj*: z łatwością można się jednak przekonać, iż w tym razie otrzymalibyśmy tylko tożsamość.

Z powyższego widać, że wystarczy rzecz całą uważać dalej za odbywającą się w płaszczyźnie

$$C_1\,x + C_2\,y + C_3\,z = 0\,;$$

obierając tę płaszczyznę za płaszczyznę współrzędnych XOZ, będziemy mieli $y = 0$, jakotéż

$$\varphi(u)\left\{z\frac{dx}{ds} - x\frac{dz}{ds}\right\} = C_2\,,$$

gdzie teraz

$$u^2 = x^2 + z^2\,.$$

Wprowadzając współrzędne biegunowe u, λ zamiast prostokątnych x, z, a to za pomocą związków

$$x = u\cos\lambda\,, \qquad z = u\sin\lambda\,,$$

otrzymamy

$$dx = du\cos\lambda - u\sin\lambda\,d\lambda\,,$$

$$dz = du\sin\lambda + u\cos\lambda\,d\lambda\,,$$

skutkiem czego

$$z\,dx - x\,dz = u^2\,d\lambda\,,$$

a więc

$$\varphi(u) \, . \, \frac{u^2\,d\lambda}{ds} = C_2\,.$$

Otóż różniczka łuku ds krzywéj płaskiéj we współrzędnych biegunowych wyraża się, jak wiadomo, wzorem

$$ds = \sqrt{u^2 + \left(\frac{du}{d\lambda}\right)^2} \, . \, d\lambda = \sqrt{u^2 + u'^2} \, . \, d\lambda\,,$$

wzór zatem poprzedni będzie

$$\frac{u^2\,\varphi(u)}{\sqrt{u^2 + u'^2}} = C_2\,,$$

skąd

$$u' = \frac{du}{d\lambda} = \sqrt{k^2\,u^4\,\varphi^2(u) - u^2} = u\sqrt{k^2\,u^2\,\varphi^2(u) - 1}\,,$$

$\left(\text{gdzie } k = \frac{1}{C_2}\right)$. Znając kształt funkcyi φ, znajdziemy natychmiast równanie skończone trajektoryi światła przez całkowanie równania

$$\frac{du}{u\sqrt{k^2 u^2 \varphi^2(u) - 1}} = d\lambda\,,$$

co w każdym szczególnym razie wyrażeniami skończonemi, albo zbieżnemi szeregami nieskończonemi wykonać się daje.

Tak np. gdyby atmosfera była jednorodną, mielibyśmy prędkość rozchodzenia się światła stałą, skutkiem czego także $\varphi(u) =$ stałéj, a całkowanie ostatniego równania różniczkowego dałoby po prostu

$$u = \frac{l}{\cos(\lambda + \lambda_0)}$$

co przedstawia równanie biegunowe *linii prostéj*, jak być powinno. Albo gdyby $\varphi(u) = \frac{a}{u}$ (gdzie α jest stałą), mielibyśmy

$$\frac{du}{u} = d\lambda\sqrt{k^2\alpha^2 - 1}\,,$$

a po zcałkowaniu

$$u = u_0 \,.\, e^{\lambda\sqrt{k^2\alpha^2-1}}\,,$$

t. j. droga byłaby wówczas kawałkiem *spiralnéj logarytmowéj*, i t. d.

7. Rachunki stają się znacznie trudniejsze, jeżeli powierzchnie „poziomu“ atmosfery nie są kulami, ale innemi zamkniętemi powierzchniami. Gdyby te powierzchnie były *elipsoidami* obrotowemi, mielibyśmy

$$u = x^2 + y^2 + p^2 z^2 = a^2\,,$$

gdzie $p^2 = \frac{a^2}{c^2} > 1$ dla elipsoidy spłaszczonéj, zaś $p^2 < 1$ dla wydłużonéj (t. j. obrotowéj około osi większéj).

Rachunek do powyższego podobny doprowadziłby do równań

$$\varphi'(u) \,.\, 2x \; ds = d\left\{\varphi(u)\,\frac{dx}{ds}\right\},$$

$$\varphi'(u) \,.\, 2y \; ds = d\left\{\varphi(u)\,\frac{dy}{ds}\right\},$$

$$\varphi'(u) \,.\, 2p^2 z\, ds = d\left\{\varphi(u)\,\frac{dz}{ds}\right\},$$

skąd wyprowadza się z łatwością

$$d\left(y\varphi\,\frac{dx}{ds}\right) = d\left(x\varphi\,\frac{dy}{ds}\right),$$

$$d\left\{p^2\, z\, \varphi\,\frac{dy}{ds} - y\varphi\,\frac{dz}{ds}\right\} = (p^2 - 1)\,\varphi\,\frac{dy\;dz}{ds}\,.$$

Całkowanie pierwszego z nich daje, jak poprzednio

$$\varphi\,.\left(y\,\frac{dx}{ds} - x\,\frac{dy}{ds}\right) = \text{stałéj}\,,$$

podczas gdy drugie nie daje się wprost całkować chyba w przypuszczeniu, że p jest ilością bardzo bliską jedności, który to przypadek ma właśnie miejsce dla atmosfery ziemskiéj.

Wyprowadzenie odnośnych wzorów i porównanie ich z empirycznemi faktami refrakcyi astronomicznéj zachowuję sobie do pracy późniejszéj.