W każdym z tych 12 porządków możemy jeszcze dwie pierwsze zmienne przemienić ze sobą, a przez to wartość dodatku się nie zmieni. Tak np. porządek $x_1\, x_2$, $x_3\, x_4$ należy do wartości dodatku $\frac{d_3}{d'_3}$; do tego dodatku należy także i porządek $x_2\, x_1$, $x_3\, x_4$ i t. d.

Przyjmując, że stosunki $\frac{d_3}{d'_3}$, $\frac{c_4}{c'_4}$, . . . są wszystkie jednakie, ale o wartości różnéj przynajmniéj od jednego ze stosunków

$$\frac{e}{e'}\,,\ \frac{f}{f'}\,,\ \frac{g}{g'}\,,\ \frac{h}{h'}$$

mamy tu jeden tylko rezultat bez względu na to, jaki porządek całkowania z 4! możliwych użyto przy całkowaniu.

Lwów, 1892.

O CAŁKOWANIU RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH LINIOWYCH RZĘDU n-go POD POSTACIĄ SKOŃCZONĄ.

PRZEZ

A. J. STODÓŁKIEWICZA.

Niech będzie równanie różniczkowe, o różniczkach zupełnych, liniowe rzędu n-go

$$\frac{d^n y}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + X_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots + X_{n-1} \frac{dy}{dx} + X_n\, y = X\,, \tag{1}$$

w którem X_1, X_2, . . . , X_n, X są pewne funkcye zmiennéj niezależnéj x. Wprowadźmy oznaczenia

$$\frac{dy^{(n-2)}}{dx} = y^{(n-1)}\,,\ \frac{dy^{(n-3)}}{dx} = y^{(n-2)}\,, \ldots,\ \frac{dy'}{dx} = y''\,,\ \frac{dy}{dx} = y'\,, \tag{2}$$

natenczas, równanie (1) można napisać tak

$$\frac{dy^{(n-1)}}{dx} = X - X_1\, y^{(n-1)} - X_2\, y^{(n-2)} - \ldots - X_{n-1}\, y' - X_n\, y\,. \tag{3}$$

Mnożąc równania (2) odpowiednio przez czynniki nieoznaczone μ_1, μ_2, . . . , μ_{n-2}, μ_{n-1} i dodając do równania (3), otrzymamy

$$\frac{dy^{(n-1)}}{dx}+\mu_1\frac{dy^{(n-2)}}{dx}+\mu_2\frac{dy^{(n-3)}}{dx}+\ldots+\mu_{n-2}\frac{dy'}{dx}+\mu_{n-1}\frac{dy}{dx}$$

$$=X-X_1y^{(n-1)}-X_2\,y^{(n-2)}-\ldots-X_{n-1}y'-X_ny \tag{4}$$

$$+\mu_1y^{(n-1)}+\mu_2y^{(n-2)}+\ldots+\mu_{n-2}y''+\mu_{n-1}y'.$$

Następnie dajmy

$$y^{(n-1)}+\mu_1\,y^{(n-2)}+\mu_2\,y^{(n-3)}+\ldots+\mu_{n-2}\,y'+\mu_{n-1}\,y=u; \tag{5}$$

natenczas, rugując $y^{(n-1)}$ z równania (4) przy pomocy związku (5), łatwo otrzymamy

$$\frac{du}{dx}-y^{(n-2)}\frac{d\mu_1}{dx}-y^{(n-3)}\frac{d\mu_2}{dx}-\ldots-y'\frac{d\mu_{n-2}}{dx}-y\frac{d\mu_{n-1}}{dx}$$

$$=X+(\mu_1-X_1)u-y^{(n-2)}[\mu_1(\mu_1-X_1)+X_2-\mu_2]-y^{(n-3)}[\mu_2(\mu_1-X_1)+X_3-\mu_3]-\ldots$$

$$\ldots-y'[\mu_{n-2}(\mu_1-X_1)+X_{n-1}-\mu_{n-1}]-y[\mu_{n-1}(\mu_1-X_1)+X_n].$$

Przyrównywając w powyższem spółczynniki przy $y^{(n-2)},y^{(n-3)},\ldots,y',y$ do zera, będziemy mieli równanie liniowe

$$\frac{du}{dx}=X+(\mu_1-X_1)\,u, \tag{6}$$

z którego będzie

$$u=e^{\int(\mu_1-X_1)\,dx}\cdot\left\{c_1+\int X\,e^{-\int(\mu_1-X_1)\,dx}\cdot dx\right\} \tag{7}$$

tudzież, równania na wyznaczenie $\mu_1,\mu_2,\ldots\mu_{n-1}$

$$\begin{aligned}\frac{d\mu_1}{dx}&=\mu_1(\mu_1-X_1)+X_2-\mu_2,\\ \frac{d\mu_2}{dx}&=\mu_2(\mu_1-X_1)+X_3-\mu_3,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \frac{d\mu_{n-2}}{dx}&=\mu_{n-2}(\mu_1-X_1)+X_{n-1}-\mu_{n-1},\\ \frac{d\mu_{n-1}}{dx}&=\mu_{n-1}(\mu_1-X_1)+X_n.\end{aligned} \tag{8}$$

Całkowanie układu równań (8) wogóle należy do zadań nadzwyczaj trudnych, są jednak liczne przypadki szczególne, w których znalezienie ilości $\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_{n-1}$, czyniących zadość układowi równań (8), jest łatwe.

Zastanawiając się nad kształtem równań (8), przedewszystkiem spostrzegamy, że, jeżeli $\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_{n-1}$ są ilości stałe, natenczas współczynniki danego równania (1) czynić powinny zadość następującym warunkom koniecznym

$$\begin{aligned}&\mu_1(\mu_1-X_1)+X_2-\mu_2=0,\\ &\mu_2(\mu_1-X_1)+X_3-\mu_3=0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\mu_{n-2}(\mu_1-X_1)+X_{n-1}-\mu_{n-1}=0,\\ &\mu_{n-1}(\mu_1-X_1)+X_n=0.\end{aligned} \tag{9}$$

Mówiąc innemi słowy, jeżeli ułożymy $n-1$ liczb stałych tak, aby warunki (9) sprawdzały się tożsamościowo, natenczas całkowanie równania (1) doprowadzi się zawsze do kwadratur, równanie bowiem (5), które nam wypadnie dalej całkować, będzie miało wszystkie współczynniki stałe. Do téj klasy równań należy między innemi następujące:

$$\frac{d^ny}{dx^n}+X_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+(X_1+1)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+(2X_1+1)\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}}+\ldots \tag{10}$$

$$\ldots+[(n-2)X_1+1]\frac{dy}{dx}+[(n-1)X_1-n+1]\,y=X.$$

Całkowanie w tym przypadku doprowadza do kwadratur przy wszelkich wartościach funkcyj X_1 i X, gdyż ilości $\mu_1=1$, $\mu_2=2$, $\mu_3=3,\ldots$ $\ldots,\mu_{n-1}=n-1$ sprawdzają warunki (9) dla współczynników równania (10). Wskutek tego, następnem (5) równaniem różniczkowem będzie

$$y^{(n-1)}+y^{(n-2)}+2y^{(n-3)}+\ldots+(n-2)\,y'+(n-1)\,y=u$$

równanie liniowe ze współczynnikami stałemi, całkujące się łatwo, wiadomym sposobem, pod postacią skończoną.

Drugi warunek wyprowadzimy w sposób następujący:

Jeżeli przyjmiemy

$$\mu_1=\frac{X_2}{X_1},\ \mu_2=\frac{X_3}{X_1},\ \mu_3=\frac{X_4}{X_1},\ldots\mu_{n-1}=\frac{X_n}{X_1}, \tag{11}$$

natenczas, podstawiając powyższe wartości w układ (8), będziemy mieli równania warunkowe

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\left(\frac{X_2}{X_1}\right) = \left(\frac{X_2}{X_1}\right)^2 - \frac{X_3}{X_1}\,,\\
&\frac{d}{dx}\left(\frac{X_3}{X_1}\right) = \frac{X_3}{X_1}\cdot\frac{X_2}{X_1} - \frac{X_4}{X_1}\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{d}{dx}\left(\frac{X_{n-1}}{X_1}\right) = \frac{X_{n-1}}{X_1}\cdot\frac{X_2}{X_1} - \frac{X_n}{X_1}\,,\\
&\frac{d}{dx}\left(\frac{X_n}{X_1}\right) = \frac{X_n}{X_1}\cdot\frac{X_2}{X_1}\,.
\end{aligned} \tag{12}$$

Wnioskujemy z tego, że, jeżeli współczynniki równania (1) tożsamościowo czynią zadość warunkom (12), wówczas dla $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}$ można przyjąć wartości (11) i całkować dalej równanie (5).

Do takich równań należą:

Po 1-sze:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + X_1\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} - \frac{2}{x}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} - \frac{2}{x}\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} - \ldots - \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x^2}y\right) = X\,.$$

Po 2-gie:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + X_1\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \frac{a_1}{x}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \frac{a_2}{x^2}\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} + \ldots + \frac{a_{n-2}}{x^{n-2}}\frac{dy}{dx} + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}y\right) = X\,,$$

gdzie $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ są pewne liczby stałe, czyniące w współczynnikach zadość warunkom (12), z których łatwo odnajdziemy

$$a_1 = 1-n\,,\; a_2 = a_1^2 + a_1\,,\; a_3 = a_1 a_2 + 2a_2\,,\; a_4 = a_1 a_3 + 3a_3\,,\ldots$$
$$\ldots, a_{n-1} = a_1 a_{n-2} + (n-2)\, a_{n-2}\,.$$

Całka ogólna w obu klasach powyższych równań zawsze sprowadza do szeregu kwadratur, co łatwo będzie spostrzedz z równania (5).

Dla wyprowadzenia trzeciego układu warunków, załóżmy w (8):

$$\frac{d\mu_1}{dx} = \mu_1^2\,,\; \frac{d\mu_2}{dx} = \mu_1\mu_2\,,\ldots,\; \frac{d\mu_{n-2}}{dx} = \mu_1\mu_{n-2}\,,\; \frac{d\mu_{n-1}}{dx} = \mu_1\mu_{n-1}\,,$$

skąd wypada

$$\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_{n-2} = \mu_{n-1} = -\frac{1}{x}\,; \tag{13}$$

a więc, jeżeli współczynniki równania (1) uczynią tożsamościowo zadość warunkom

$$\begin{aligned}
&-\mu_1 X_1 + X_2 - \mu_2 = 0\,,\\
&-\mu_2 X_1 + X_3 - \mu_3 = 0\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&-\mu_{n-2} X_1 + X_{n-1} - \mu_{n-1} = 0\,,\\
&-\mu_{n-1} X_1 + X_n = 0\,,
\end{aligned} \tag{14}$$

w których, oczywista, $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}$ mają wartości (13), natenczas równanie (1) całkuje się pod postacią skończoną, gdyż równanie (5) przy istnieniu związków (13) łatwo doprowadza do kwadratur. Ogólny kształt równań, czyniących zadość warunkom (14), jest

$$\frac{d^n y}{dx^n} + X_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} - \frac{X_1+1}{x}\left(\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} + \ldots + \frac{dy}{dx}\right) - \frac{X_1}{x}y = X\,.$$

Dalej, czwarty układ warunków otrzymamy, przyjmując w równaniach (8) na wyznaczenie funkcyj $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}$ następujące związki:

$$\begin{aligned}
&\mu_1(\mu_1 - X_1) + X_2 = 0\,,\\
&\mu_2(\mu_1 - X_1) + X_3 = 0\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\mu_{n-2}(\mu_1 - X_1) + X_{n-1} = 0\,,\\
&X_n - X_1\mu_{n-1} = 0\,,
\end{aligned}$$

z których mamy

$$\begin{aligned}
&\mu_1 = \frac{1}{2}X_1 \pm \sqrt{\frac{1}{4}X_1^2 - X_2}\,,\\
&\mu_2 = -\frac{X_3}{\mu_1 - X_1}\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\mu_{n-2} = -\frac{X_{n-1}}{\mu_1 - X_1}\,,\\
&\mu_{n-1} = \frac{X_n}{X_1}\,.
\end{aligned} \tag{15}$$

W tym przypadku, współczynniki równania (1) czynić powinny zadość warunkom koniecznym

$$\frac{d\mu_1}{dx} = -\mu_2\,, \frac{d\mu_2}{dx} = -\mu_3\,, \ldots, \frac{d\mu_{n-2}}{dx} = -\mu_{n-1}\,, \frac{d\mu_{n-1}}{dx} = \mu_1\,\mu_{n-1}\,,$$

gdzie dla $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}$ należy brać układ wartości (15).

Nakoniec, dla wyprowadzenia piątego układu warunków, przyjmujemy w równaniach (8)

$$\frac{d\mu_1}{dx} = -\mu_1\,X_1\,, \frac{d\mu_2}{dx} = -\mu_2\,X_1\,, \ldots, \frac{d\mu_{n-1}}{dx} = -\mu_{n-1}\,X_1\,,$$

skąd wogóle będzie

$$\mu_i = e^{-\int X_1\,dx}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

W tym ostatnim przypadku współczynniki równania (1) czynić powinny zadość warunkom

$$\left.\begin{aligned} &\mu_1^2 + X_2 - \mu_2 = 0\,,\\ &\mu_2\,\mu_1 + X_3 - \mu_3 = 0\,,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\mu_{n-2}\,\mu_1 + X_{n-1} - \mu_{n-1} = 0\,,\\ &\mu_{n-1}\,\mu_1 + X_n = 0\,, \end{aligned}\right\}\quad(16)$$

czyli

$$X_2 = X_3 = \ldots = X_{n-1} = \mu_1 - \mu_1^2\,,$$

$$X_n = -\mu_1^2\,.$$

Kształt ogólny równania, czyniącego zadość warunkom (16), będzie

$$\frac{d^ny}{dx^n} + X_1\,\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \left(e^{-\int X_1\,dx} - e^{-2\int X_1\,dx}\right)\left[\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} + \ldots + \frac{dy}{dx}\right]$$

$$- e^{-2\int X_1\,dx}\,.\,y = X\,,$$

w którem X i X_1 są jakiekolwiek funkcye zmiennéj x.

Wprowadzając w równanie (1) nową zmienną $z = \frac{y}{x}$, można równanie (1) odpowiednio przekształcić i, powtórzywszy wszystkie powyższe rozumowania dla przekształconego równania, znajdziemy nowych kilka klas równań liniowych całkujących się przez kwadratury.

W rzeczy saméj, przy powyższem założeniu $y = zx$, będzie

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy}{dx} = x\,\frac{dz}{dx} + z\,,\\ &\frac{d^2y}{dx^2} = x\,\frac{d^2z}{dx^2} + 2\,\frac{dz}{dx}\,,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\frac{d^ny}{dx^n} = x\,\frac{d^nz}{dx^n} + n\,\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}\,. \end{aligned}\right\}\quad(17)$$

Podstawiając związki (17) w równanie (1), po redukcyi otrzymamy

$$\frac{d^nz}{dx^n} + \frac{n+xX_1}{x}\,\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} + \frac{(n-1)X_1+xX_2}{x}\,\frac{d^{n-2}z}{dx^{n-2}} + \frac{(n-2)X_2+xX_3}{x}\,\frac{d^{n-3}z}{dx^{n-3}} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{2X_{n-2}+xX_{n-1}}{x}\,\frac{dz}{dx} + \frac{X_{n-1}+xX_n}{x}\,.\,z = \frac{X}{x}\,.$$

Dla tego ostatniego równania warunki (9) przyjmują kształt następujący:

$$\left.\begin{aligned} &\mu_1\left(\mu_1 - \frac{n+x\,X_1}{x}\right) + \frac{(n-1)\,X_1 + x\,X_2}{x} - \mu_2 = 0\,,\\ &\mu_2\left(\mu_1 - \frac{n+x\,X_1}{x}\right) + \frac{(n-2)\,X_2 + x\,X_3}{x} - \mu_3 = 0\,,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\mu_{n-2}\left(\mu_1 - \frac{n+x\,X_1}{x}\right) + \frac{2\,X_{n-2} + x\,X_{n-1}}{x} - \mu_{n-1} = 0\,,\\ &\mu_{n-1}\left(\mu_1 - \frac{n+x\,X_1}{x}\right) + \frac{X_{n-1} + x\,X_n}{x} = 0\,. \end{aligned}\right\}\quad(18)$$

Tak naprzykład, w przypadku

$$\mu_1 = 1\,,\quad \mu_2 = 2\,, \ldots, \mu_{n-1} = n-1$$

z równań warunkowych (18) będziemy miéli

$$
\begin{aligned}
X_2 &= \frac{1}{x}\left[x + x\,X_1 - (n-1)\,X_1 + n\right], \\
X_3 &= \frac{1}{x}\left[x + 2\,x\,X_1 - (n-2)\,X_2 + 2\,n\right], \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad\qquad (19) \\
X_{n-1} &= \frac{1}{x}\left[x + (n-2)\,x\,X_1 - 2\,X_{n-2} + (n-2)\,n\right], \\
X_r &= \frac{1}{x}\left[(n-1)\,x\,X_1 - X_{n-1} + (n-1)\,n - (n-1)\,x\right].
\end{aligned}
$$

Wnioskujemy stąd, że jeżeli współczynniki równania (1) uczynią zadość warunkom (19), natenczas, przekształciwszy to równanie przy pomocy nowéj zmiennéj $z = \frac{y}{x}$, będziemy całkowali następne równanie różniczkowe liniowe

$$z^{(n-1)} + z^{(n-2)} + 2\,z^{(n-3)} + \dots + (n-2)\,z' + (n-1)\,z = u$$

rzędu $(n-1)$-go o wszystkich współczynnikach stałych. Funkcya u znajduje się łatwo z odpowiedniego równania liniowego (6), czyli, w danym przypadku, z równania

$$\frac{du}{dx} = \frac{X}{x} + \left(\mu_1 - \frac{n + x\,X_1}{x}\right) u\,.$$

Podobną drogą możemy zastosować do równania przekształconego wszystkie pozostałe warunki (12), (14), (15), (16) i tym sposobem odnajdziemy nowe liczne klasy równań rzędu n-go, całkujących się pod postacią skończoną.

Można także z pożytkiem zastosować wszystkie powyższe warunki do równania (1), przekształconego za pomocą

$$y = z\,x^n\,.$$

Odmienną od powyższego drogą dojść jeszcze możemy do nowego warunku dla współczynników równania (1) w przypadku, gdy to równanie ma kształt szczególny następujący:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + X_1\,\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + X_2\left(\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \frac{d^{n-3} y}{dx^{n-3}} + \dots + \frac{dy}{dx}\right) + X_3\,y = X. \qquad (20)$$

Natenczas, z równań (8) wnioskujemy, że, przedewszystkiem powinno być

$$\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_{n-1}\,;$$

dla uproszczenia więc oznaczmy ilości μ_i przez μ i wskutek tego z układu (8) otrzymamy tylko dwa odmienne równania

$$\text{(a)} \qquad \frac{d\mu}{dx} = \mu\,(\mu - X_1) + X_2 - \mu\,,$$

$$\text{(b)} \qquad \frac{d\mu}{dx} = \mu\,(\mu - X_1) + X_3\,.$$

Z tych równań drugie równanie różniczkowe (b) przyjmiemy dla wyznaczenia funkcyi μ i po zcałkowaniu będziemy mieli

$$\mu = \varphi\,(x)\,.$$

Pierwsze zaś równanie (a) powinno koniecznie zachodzić tożsamościowo, czyli da nam, niewątpliwie, jedyny warunek na współczynniki równania (20)

$$\frac{d\varphi}{dx} = \varphi\,(\varphi - X_1) + X_2 - \varphi\,.$$

Dla równań kształtu

$$\frac{d^n y}{dx^n} + X_1\,\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + X_2\left(\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \frac{d^{n-3} y}{dx^{n-3}} + \dots + \frac{d^2 y}{dx^2}\right) + X_3\,\frac{dy}{dx} + X_4\,y = X\,,$$

w których X_1, X_2, X_3, X_4, X są jakiekolwiek funkcye zmiennéj x, możemy na wyznaczenie μ_i z równań (8) dać

$$
\begin{gathered}
\mu_2 = \mu_3 = \dots = \mu_{n-2} = X_2\,, \\
\mu_{n-1} = X_3\,, \\
\frac{d\mu_1}{dx} = \mu_1\,(\mu_1 - X_1)
\end{gathered}
$$

natenczas, będziemy mieli dwa warunki niezbędne

$$\frac{d}{dx}\,X_2 = X_2\,(\mu_1 - X_1)\,,$$

$$\frac{d}{dx}\,X_3 = X_3\,(\mu_1 - X_1) + X_4\,.$$

Daléj znaleść możemy jeszcze liczną klasę równań różniczkowych linijnych, dla których będzie

$$\mu_1 = \frac{a_1}{x}\,,\ \mu_2 = \frac{a_2}{x_2}\,,\ \mu_3 = \frac{a_3}{x_3}\,,\ \ldots\,,\ \mu_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{x_{n-1}}\,;$$

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}$ są pewne liczby stałe.

Przy powyższych wartościach na μ_i, równania (8) zamieniają się łatwo na związki następujące

$$-\frac{a_1}{x^2} = \frac{a_1}{x}\left(\frac{a_1}{x} - X_1\right) + X_2 - \frac{a_2}{x^2}\,,$$

$$-\frac{2a_2}{x^3} = \frac{a_2}{x^2}\left(\frac{a_1}{x} - X_1\right) + X_3 - \frac{a_3}{x^3}\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-\frac{(n-2)\,a_{n-2}}{x^{n-1}} = \frac{a_{n-2}}{x^{n-2}}\left(\frac{a_1}{x} - X_1\right) + X_{n-1} - \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}\,,$$

$$-\frac{(n-1)\,a_{n-1}}{x^n} = \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}\left(\frac{a_1}{x} - X_1\right) + X_n\,,$$

z których otrzymamy

$$X_2 = \frac{a_2 - a_1 - a_1\,(a_1 - x\,X_1)}{x^2}\,,$$

$$X_3 = \frac{a_3 - 2a_2 - a_2\,(a_1 - x\,X_1)}{x^3}\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$X_{n-1} = \frac{a_{n-1} - (n-2)\,a_{n-2} - a_{n-2}\,(a_1 - x\,X_1)}{x^{n-1}}\,,$$

$$X_n = \frac{-(n-1)\,a_{n-1} - a_{n-1}\,(a_1 - x\,X_1)}{x^n}\,.$$

Stąd wnioskujemy, że równanie różniczkowe (1) przy powyżéj napisanych wartościach współczynników $X_2, X_3, \ldots, X_n$ całkuje się pod postacią skończoną w całéj ogólności, niezależnie od kształtu funkcyi X_1 i od liczb stałych $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$, które mogą być obrane w sposób upodobany. W rzeczy samej, w tym przypadku równanie (5) przybiera kształt

$$y^{(n-1)} + \frac{a_1}{x}\,y^{(n-2)} + \frac{a_2}{x^2}\,y^{(n-3)} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}\,y = u\,,$$

który zawsze jak wiadomo, doprowadza do kwadratur.

Dla zakończenia pracy niniejszéj, zastosujemy wyniki otrzymane do dwóch klas równań różniczkowych liniowych, często napotykanych i mających ważniejsze od innych znaczenie.

Niech będzie równanie różniczkowe rzędu n-go

$$\frac{d^n y}{dx^n} + X_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + (a_1\,X_1 + b_1)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + (a_2\,X_1 + b_2)\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} + \ldots \tag{21}$$

$$\ldots + (a_{n-1}\,X_1 + b_{n-1})\,y = X\,,$$

w którem X_1 i X są funkcye upodobane zmiennéj x; $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ $\ldots, a_{n-1}, b_{n-1}$ — pewne liczby stałe. Równania warunkowe (9) dadzą nam związki

$$\mu_1\,(\mu_1 - X_1) + a_1\,X_1 + b_1 - \mu_2 = 0\,,$$

$$\mu_2\,(\mu_1 - X_1) + a_2\,X_1 + b_2 - \mu_3 = 0\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mu_{n-2}\,(\mu_1 - X_1) + a_{n-2}\,X_1 + b_{n-2} - \mu_{n-1} = 0\,;$$

$$\mu_{n-1}\,(\mu_1 - X_1) + a_{n-1}\,X_1 + b_{n-1} = 0\,,$$

skąd, przyjmując

$$\mu_1 = a_1\,,\ \mu_2 = a_2\,,\ \ldots\,,\ \mu_{n-1} = a_{n-1}\,,$$

łatwo otrzymamy

$$\begin{aligned} b_1 &= a_2 - a_1^2\,,\\ b_2 &= a_3 - a_1\,a_2\,,\\ &\cdots\cdots\cdots\\ b_{n-2} &= a_{n-1} - a_1\,a_{n-2}\,,\\ b_{n-1} &= -\,a_1\,a_{n-1}\,. \end{aligned} \tag{22}$$

Widzimy więc, że równanie (21), przy istnieniu warunków (22) na liczby $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$, całkuje się w całéj ogólności pod postacią skonczoną, gdyż równanie (5) będzie miało kształt

$$y^{(n-1)} + a_1 y^{(n-2)} + a_2 y^{(n-3)} + \ldots + a_{n-1} y = u,$$

który posiada całkę ogólną w postaci kwadratur.

Podobne warunki dla równania (21) można jeszcze wyprowadzić, przekształcając to równanie za pomocą podstawienia $x = \xi + a$, gdzie ξ nowa zmienna, a a jakabądź ilość stała.

Napiszmy jeszcze równanie liniowe ze współczynnikami liniowemi

$$\begin{aligned} &\frac{d^n y}{dx^n} + (a_1 x + b_1) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + (a_2 x + b_2) \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots \\ &\ldots + (a_{n-1} x + b_{n-1}) \frac{dy}{dx} + (a_n x + b_n) y = X, \end{aligned} \tag{23}$$

w którem $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n$ są pewne liczby stałe a X funkcya dowolna zmiennéj niezależnéj x.

Warunki (9) w zastosowaniu do tego ostatniego równania dają:

$$\begin{aligned} &\mu_1 (\mu_1 - a_1 x - b_1) + a_2 x + b_2 - \mu_2 = 0, \\ &\mu_2 (\mu_1 - a_1 x - b_1) + a_3 x + b_3 - \mu_3 = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\mu_{n-2} (\mu_1 - a_1 x - b_1) + a_{n-1} x + b_{n-1} - \mu_{n-1} = 0, \\ &\mu_{n-1} (\mu_1 - a_1 x - b_1) + a_n x + b_n = 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Zakładając na wyznaczenie $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}$

$$\mu_1 = \frac{a_2}{a_1}, \; \mu_2 = \frac{a_3}{a_1}, \ldots, \mu_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{a_1},$$

otrzymamy z układu (24)

$$\begin{aligned} &\mu_1 (\mu_2 - b_1) + b_2 - \mu_2 = 0, \\ &\mu_2 (\mu_1 - b_1) + b_3 - \mu_3 = 0. \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\mu_{n-2} (\mu_1 - b_1) + b_{n-1} - \mu_{n-1} = 0, \\ &\mu_{n-1} (\mu_1 - b_1) + b_n = 0, \end{aligned}$$

czyli

$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{a_3}{a_1} - \frac{a_2}{a_1}\left(\frac{a_2}{a_1} - b_1\right), \\ b_3 &= \frac{a_4}{a_1} - \frac{a_3}{a_1}\left(\frac{a_2}{a_1} - b_1\right), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{n-1} &= \frac{a_n}{a_1} - \frac{a_{n-1}}{a_1}\left(\frac{a_2}{a_1} - b_1\right) \\ b_n &= -\frac{a_n}{a_1}\left(\frac{a_2}{a_1} - b_1\right). \end{aligned}$$

Przy istnieniu powyższych wartości na liczby $b_2, b_3, \ldots b_n$ równanie (23) całkuje się zawsze pod postacią skończoną. Używając podstawienia poprzedzającéj klasy równań $x = \xi + a$ możemy równanie (24) łatwo przekształcić i wyprowadzić nową grupę warunków.

Płock, 1892.