

# PRACE MATEMATYCZNO-FIZYCZNE

WYDAWANE W WARSZAWIE,

PRZEZ

S. Dicksteina, Wł. Gosiewskiego, Edw. i Wł. Natansonów.

TREŚĆ TOMU I-go. 1. Wł. Gosiewski. O prawdopodobieństwie błędów przypadkowych. 2. S. Dickstein. Własności i niektóre zastosowania wrońskianów. 3. Wł. Natanson. Studya nad prawem Clerk-Maxwella. 4. Wł. Natanson. O zadaniu Taita. 5. J. J. Boguski. Badania wstępne nad nowym sposobem oznaczania rozszerzalności cieczy. 6. A. Hołowiński. O obliczaniu blasku obrazów optycznych przy układzie soczewek kulistych. 7. A. J. Stodótkiewicz. O całkowaniu pewnego układu równań różniczkowych o różniczkach zupełnych. 8. J. Ptaszycki. O całkowaniu algebraicznym różniczek algebraicznych. 9. J. Kowalski. Badania nad wytrzymałością szkła. 10. Wł. Gosiewski. O związku między zasadą najmniejszego działania a układem najprawdopodobniejszym. 11. J. Kowalczyk. Krótka wiadomość o obserwatorium w Płońsku i o pracach J. Jędrzejewicza w dziedzinie astronomii i meteorologii. 12. J. J. Boguski. Wiadomość o Pracowni fizycznej Muzeum Przemysłu i Rolnictwa i o pracach w niej dokonanych. 13. S. Dickstein. Wiadomość o pracach z dziedziny geometrii wielowymiarowej. 14. Wł. Natanson. O podstawach cyfetycznej teorii gazów. 15. Edw. Natanson. O prawie zachowania energii (M. Planck, das Princip der Erhaltung der Energie). 16. H. Silberstein. Nowa metoda oznaczania ciężaru cząsteczkowego. (Badania Raoult'a, van't Hoff'a, Arrhenius'a, Planck'a). 17. Sprawozdania z piśmiennictwa polskiego w dziedzinie nauk matematycznych i fizycznych za lata 1886 i 1887.

TREŚĆ TOMU II-go. 1. J. Sochocki. Uwagi o rozwinięciu pewnych funkcji na szeregi. 2. Wł. Kretkowski. Przyczynek do teorii eliminacji. 3. M. P. Rudzki. O rytmicznych oscylacjach morza. 4. J. Ptaszycki. O sprowadzeniu pewnych całek Abelowych do postaci normalnej. 5. Wł. Natanson. O teorii cyfetycznej zjawiska Joule'a. 6. J. Kowalski. O hartowaniu szkła. 7. J. Kowalski. O warunkach, którym stałe przewodnictwa cieplnego kryształów czynić żądasyć powinny. 8. H. Helmholtz. Termodynamika zjawisk chemicznych. Przełożył Fr. Tomaszewski. 9. S. Dickstein. O prawie najwyższem

# PRACE MATEMATYCZNO-FIZYCZNE.

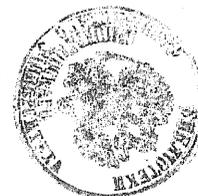
PRACE  
MATEMATYCZNO-FIZYCZNE.

WYDAWANE W WARSZAWIE

PRZEZ

S. DICKSTEINA, WŁ. GOSLEWSKIEGO,  
EDW. i WŁ. NATANSONÓW.

TOM IV.



WARSZAWA.  
SKŁAD GŁÓWNY W KSIĘGARNI GEBETHNERA I WOLFFA.  
—  
1893.



Дозволено Цензурою, Варшава 29 Мая 1893 г.

## SPIS RZECZY TOMU IV-go



	<i>str.</i>
Spis współpracowników tomu IV-go „Prac matematyczno-fizycznych” . . . . .	VII
1. J. Puzyra. Z teorii $n$ -krótnych całek określonych . . . . .	1—32
2. A. J. Stodórkiewicz. O całkowaniu równań różniczkowych liniowych rzędu $n$ -go pod postacią skończoną . . . . .	33—43
3. L. Birkenmajer. O zasadniczych wzorach refrakcyi astronomicznej . . . . .	44—55
4. A. J. Stodórkiewicz. Uogólnienie twierdzenia o przypadkach szczególnych zagadnienia Pfaffa . . . . .	56—62
5. E. Snopek. O kongruencyi $x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \dots + A_n \equiv 0 \pmod{p}$ . . . . .	63—70
6. E. Jabłoński. Teorya przemian i waryacyj kołowych zupełnych . . . . .	71—87
7. S. Dickstein. O szeregach logarytmowych Wrońskiego . . . . .	88—94
8. J. Sochocki. Zasada największego wspólnego dzielnika w zastosowaniu do teoryi podzielności liczb algebraicznych . . . . .	95—153
9. M. P. Rudzki. O granicach atmosfery . . . . .	154—168
10. W. Biernacki. O wahanach elektrycznych w vibratorze wtórnym . . . . .	169—181
11. J. J. Boguski. Sprawozdanie działalności Pracowni fizycznej Muzeum Przemysłu i Rolnictwa . . . . .	182—184
12. Sprawozdania z piśmiennictwa polskiego w dziedzinie nauk matematyczno-fizycznych za rok 1891 przez W. Biernackiego, L. Birkenmajera, M. Ciemnińskiego, A. Czajewicza, S. Dicksteina, R. Dziwińskiego, Wł. Gosiewskiego, E. Natanson, Wł. Natanson i A. Witkowskiego.	

	<i>str.</i>
I. Matematyka . . . . .	185—197
II. Mechanika . . . . .	198—200
III. Astronomia, fizyka i chemia teoretyczna . . . . .	201—220
IV. Historia wiedzy . . . . .	221—227
V. Varia . . . . .	228—230
Spis autorów i tłumaczy, wymienionych w Sprawozdaniach z piśmiennictwa polskiego . . . . .	231
Errata do tomów IV-go i III-go . . . . .	232
Czasopisma, książki i broszury nadesłane do Redakcji „Prac matematyczno-fizycznych“ . . . . .	233

TABLES DES MATIÈRES DU TOME IV. <sup>1)</sup>

1. <b>C2h.</b> J. Puzyna. Sur la théorie des intégrales définies multiples . . . . .	1—32
2. <b>H5e.</b> A. J. Stodórkiewicz. Sur l'intégration sous forme finie des équations différentielles linéaires d'ordre $n$ . . . . .	33—43
3. <b>Ta.</b> L. Birkenmajer. Sur les formules fondamentales de la réfraction astronomique . . . . .	44—55
4. <b>H6a.</b> A. J. Stodórkiewicz. Généralisation d'un théorème concernant le problème de P f a f f . . . . .	56—62
5. <b>I3a.</b> E. Snopek. Sur la congruence $x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \dots + A_n \equiv 0 \pmod{p}$ . . . . .	63—70
6. <b>J1a.</b> E. Jabłoński. Sur le théorie des permutations et des arrangements circulaires complets. . . . .	71—87
7. <b>D6cz.</b> S. Dickstein. Sur les séries logarithmiques de W r o ś k i . . . . .	88—94
8. <b>I22a,d.</b> J. Sochocki. Application du principe du plus grand commun diviseur à la théorie de la divisibilité des nombres algébriques . . . . .	95—153
9. <b>U7.</b> M. P. Rudzki. Sur les limites de l'atmosphère . . . . .	154—168
10. <b>T7.</b> W. Biernacki. Sur les oscillations électriques dans un vibratoire secondaire . . . . .	169—181
11. <b>J. J. Boguski.</b> Compte-rendu du Laboratoire de Physique du Musée d'Industrie et d'Agriculture de Varsovie . . . . .	182—184
12. Revue des travaux scientifiques polonais publiés en 1891 sur les sciences mathématiques et physiques . . . . .	185—230

<sup>1)</sup> Les indications en caractères gras placées à la suite du numéro d'ordre correspondent à la classification adoptée par le Congrès de Bibliographie mathématique de 1889.

- Biernacki W.* O wahanach elektrycznych, str. 169; Referaty, str. 206, 209, 210, 219.
- Birkenmajer L.* O refrakcyi astronomicznej, str. 44. Referaty, str. 216.
- Boguski J. J.* Sprawozdanie Pracowni fizycznej, str. 182.
- Ciemiński M.* Referat, str. 185.
- Czajewicz A.* Referaty, str. 191, 192.
- Dickstein S.* O szeregach logarytmowych, str. 88. Referaty, str. 188, 191, 192, 193, 196, 205, 221, 222, 225, 229.
- Dziwiński P.* Referaty, str. 195, 208.
- Gosiński Wł.* Referaty, str. 187, 197, 198, 199.
- Jabłoński E.* O przemianach kołowych, str. 71.
- Natanson E.* Referaty, str. 203, 207, 208, 210, 213, 215, 224, 225.
- Natanson Wł.* Referaty, str. 201, 202, 203, 204, 207, 208, 211, 215, 217, 219, 223, 224, 227, 229.
- Puzyna J.* Z teorii całek, str. 1.
- Rudziński M. P.* O granicach atmosfery, str. 154.
- Snopek E.* O kongruencji i t. d., str. 63
- Sochocki J.* O liczbach algebraicznych, str. 95.
- Stodółkiewicz A. J.* O całkowaniu równań liniowych, str. 33, o zagadnieniu Pfaffa, str. 56.
- Witkowski A.* Referaty, str. 203, 213.



## Z TEORJI $n$ -KROTNYCH CAŁEK OKREŚLONYCH.

NAPISAL

JÓZEF PUZYNA.

W teorii całek określonych podwójnych znane jest twierdzenie, że, gdy funkcja znajdująca się pod znakiem całkowania wśród granic staje się nieoznaczoną, wtedy odwrócenie porządku całkowania zmienia zarazem i wartość całki i że właściwie w tym wypadku nie dwa, ale nieskończenie wiele jest rezultatów całkowania.

Z tem twierdzeniem jest w związku niniejsze poszukiwanie, zmierzające do zbadania pod tym względem niektórych typów całek  $n$ -krotnych z dowolnem  $n \geq 2$ , a więc z ogólniejszego stanowiska. Przedewszystkiem więc chodziło mi o to, aby przedstawić cały nieskończony zapas wartości do takiej całki należącej a wynikającej z najogólniejszego twierdzenia (C) [ustęp II], w którym o porządek całkowania nie troszczymy się, a chcemy to uczynić w sposób prosty w takiej formie, aby z niej odrazu wyczytać można było zakresy ciągłe, mieszczące w sobie te wartości. Okazało się, że do tego teoretycznie za każdym razem wystarczają tylko funkcje jednej zmiennej.

Tam, gdzie obliczanie całek takich uczyniłem zależnem od wstawiania granic w pewnym porządku, (twierdzenie (D) [ustęp II]), starałem się usystematyzować porządki całkowania prowadzące do tych samych wartości w grupy i rozstrzygnąć pytanie, kiedy i w jaki sposób mimo takiej postaci funkcji znajdującej się pod znakiem całkowania, że się do niej twierdzenie o zmianie wartości ze zmianą porządku całkowania stosować powinno, całka przecież „jednowartościową“ pozostaje.

rzy w Krakowie, w dniu 20 lipca 1891-go roku. Kraków, 1891, 16-a, str. 56.

Matematyk czy fizyk, jeżeli pamiętają, że „all Science is one Science“, jak wyrzekł kiedyś Lord Kelvin, — znajdują w odczycie niniejszym wiele materiału do rozmyślań, a może nawet i pomoc niejaką w specjalnych badaniach i studyach.

Wł. N.



## SPIS AUTORÓW I TŁOMACZY,

WYMENIONYCH W SPRAWOZDANIACH Z PIŚMIENICTWA POLSKIEGO

za rok 1891.

- |  |                                  |
|--|----------------------------------|
| Bandrowski E., str. 201.                         | Mahrburg A., str. 229.           |
| Bert P., str. 202.                               | Majerski St., str. 208.          |
| Birkenmajer L., str. 221.                        | Marchlewski, str. 208.           |
| Boguski J. J., str. 202.                         | M. B., str. 215.                 |
| Brewer., str. 202.                               | Mertens F., str. 193.            |
| Brzostowicz K., str. 203.                        | Moigno F., str. 202.             |
| Czajewicz A., str. 185.                          | Natanson E., str. 208.           |
| Dicksitein S., str. 187, 223, 224.               | Natanson Wł., str. 209, 225.     |
| Dygasiński A., str. 202.                         | Olearski K., str. 210, 211, 213. |
| Dziwiński Pl., str. 188, 228.                    | Olszewski K., str. 210.          |
| Dergeat F., str. 203.                            | Parville H., str. 202.           |
| Filipowski A., str. 191.                         | Puchewicz Wł., str. 195.         |
| Flaum M., str. 224.                              | Rembacz M., str. 195, 225.       |
| Franke J. N., str. 198.                          | Roszkowski J., str. 213.         |
| Frąckiewicz M., str. 228.                        | Rouba W., str. 215.              |
| Grzybowski G., str. 192.                         | Sanat B., str. 196.              |
| Gustawicz Br., str. 191.                         | Schoffield K. T., str. 196.      |
| Günther M., str. 229.                            | Schuch A., str. 215.             |
| Heilpern M., str. 203, 204.                      | Smoleński Wł., str. 225.         |
| Jelski A., str. 225.                             | Stetkiewicz S., str. 215.        |
| Jewniewicz H., str. 199.                         | Tomaszewski Fr., str. 215.       |
| Kadyj H., str. 224.                              | Wermiński F., str. 196.          |
| Kowalczyk J., str. 205.                          | Wierzbicki D., str. 216.         |
| Kozłowski M., str. 199.                          | Witkowski A., str. 217, 219.     |
| Kozłowski Wł. M., str. 229.                      | W. H., str. 215.                 |
| Kramsztyk S., str. 192, 205, 206, 207, 208, 224. | Zajączkowski Wł., str. 196.      |
| Limanowski J., str. 192.                         | Zakrzewski J., str. 219, 227.    |
| Lunge, str. 208.                                 | Znatowicz Br., str. 227.         |
|  | Zorawski K., str. 197.           |

CZASOPISMA, KSIĄŻKI I BROSZURY,

NADEŚLANE DO REDAKCYI „PRAC MATEMAT.-FIZYCZNYCH“

Rozprawy Wydziału matematyczno-przyrodniczego Akademii Umiejętności w Krakowie, Serya II, tomy: I, II, IV.

Bulletin international de l'Académie des Sciences de Cracovie. 1892, 1893.

Przegląd Techniczny, czasopismo poświęcone sprawom techniki i przemysłu. Warszawa, 1892, 1893.

Czasopismo Techniczne, organ Towarzystwa politechnicznego we Lwowie. Rok 1892, 1893.

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Praha, 1892, 1893.

Živa Časopis přírodnický, Praha, 1892, 1893.

Monatshefte für Mathematik und Physik, herausgegeben von Prof. G. v. Escherich und Prof. Em. Weyr, Wien, 1892, 1893.

Proceedings of the London Mathematical Society, 1892, 1893.

Proceedings of the Physical Society of London, 1892, 1893.

American Journal of Mathematics, Baltimore, 1892, 1893.

Izwiestja fiziko-matematyczeskaho obszczestwa pri Imperatorskom Kazanskom Uniwersytetie, Serya II, tom I, II (oraz poprzedniej seryi tomy VII i VIII).

A. *Wasiliew* i F. *Soworoff*. N. J. Lobatschewsky. Odezwa w językach francuskim, niemieckim i angielskim z powodu zamierzonego obchodu w dniu 22 października n. s. setnej rocznicy urodzin Łobaczewskiego.

M. A. *Baraniecki*. Podręcznik algebry dla uczniów klas wyższych gimnazyów i szkół realnych, Kraków, 1893.

K. *Flomaron*. Niebo. Przekład D-ra M. Stefanowskiej. Warszawa, 1892.

Sprawozdanie dyrekcji c. k. gimnazjum im. Franciszka Józefa we Lwowie, za rok 1891.

G. *Loria*. L'odierno indirizzo e gli attuali problemi della storia delle scienze esatte Genova, 1893.

G. *Loria*. Della varia fortuna di Euclide in relazione con i problemi dell'insegnamento geometrico elementare, Roma, 1893.

G. *Vivanti*. Sull'applicazione della funzione ellittica  $pu$  alla teoria dei poligoni di Poncelet, 1893.

G. *Vivanti*. Sulla serie di potenze i cui coefficienti dipendono da una variabile, 1893.

F. *Porta*. Discuzioni delle equazioni generali delle coniche e delle quadriche in coordinate cartesiane, Torino, 1893.

E R R A T A.

DO TOMU IV-go.

Str. 40, wiersz 3-ci od góry, powinno być:

$$\mu_2 = \frac{a_2}{x^2}, \mu_3 = \frac{a_3}{x^3}, \dots, \mu_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}.$$

Str. 90, wiersz 7 od góry, zamiast  $\int_0^u \frac{w^n}{U^n} du$ , winno być  $\int_0^u \frac{w^n}{U^n} du$ .

Str. 144, równania (3) należy zastąpić następującymi:

$$A\omega'_1 = a_1 \omega_1 + a_2 \omega_2 + \dots + a_n \omega_n,$$

$$A\omega'_2 = b_2 \omega_2 + \dots + b_n \omega_n,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$A\omega'_n = k_n \omega_n.$$

przezem liczby

$$\omega'_1, \omega'_2, \dots, \omega'_n$$

tworzą pewną grupę zasadniczą obszaru. Podstawiając w miejsce  $\omega'_1, \omega'_2, \dots$  ich wartości, wyrażone przez  $\omega_1, \omega_2, \dots$ , i rugując następnie  $\omega_1, \omega_2, \dots$ , otrzymujemy równanie z ilością  $A$ , skąd wyprowadzamy związek

$$N(A) = a_1 b_2 \dots k_n.$$

Str. 195, wiersz 17 od góry zamiast VIII, powinno być: VII.

DO TOMU III-go.

W rozprawie M. P. R u d z k i e g o „O pewnej klasie równań przestępnych“ zamiast wzorów (12) na str. 75 stać powinny następujące:

$$X_{n+1} = X_n - \frac{x^2 X_{n-1}}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$X'_{n-1} = X'_n - \frac{x^2 X'_{n-1}}{(2n-1)(2n+1)},$$

wskutek czego wzór (13) przybiera postać następującą:

$$\frac{X_{n+1}}{X'_{n-1}} = - \frac{(2n-1)(2n+1) \xi_n + x^2 \xi_{n-1}}{x [(2n-1)(2n+1) \xi'_n - x^2 \xi'_{n-1}]}$$

Pomyłka wskazana w niezem nie wpływa na dalszy bieg rozumowania.



Hoene-Wrońskiego w matematyce. Artykuł pierwszy. 10. S. Kępiński. Własności szczególnych trójek punktów trójkąta. 11. M. A. Baraniecki. O pewnym wnioskowaniu analitycznym w Tomie I-ym tego wydawnictwa. 12. Wł. Gosiewski. Dowód prawa Gaussa, które dotyczy błędów przypadkowych. 13. M. Cierniewski. Z dziedziny rachunku całkowego. 14. J. J. Boguski i J. Zaleski. O prędkości działania chemicznego pomiędzy glinem metalicznym i ługami alkalicznymi. 15. S. Dickstein. Wiadomość bibliograficzna o badaniach historyczno-matematycznych w Polsce. 16. J. Bieliński. Stan nauk matematyczno-fizycznych za czasów Wszechnicy wileńskiej. 18. Pl. Dziwiński. Rys działalności naukowej i nauczycielskiej Wawrzyńca Zmurki. 18. J. J. Boguski. Sprawozdanie z działalności Pracowni Fizycznej Muzeum Przemysłu i Rolnictwa. 19. Sprawozdania z piśmiennictwa polskiego w dziedzinie nauk matematyczno-fizycznych za lata 1838 i 1839.

WYBIEŚĆ TOMU III-go. 1. K. Żorawski. O całkowaniu układów równań różniczkowych cząstkowych. 2. Wł. Gosiewski. O prawie prawdopodobieństwa układu błędów. 3. C. Rusjan. O dowodzie prawa Gaussa. 4. A. J. Stodótkiewicz. O pewnej klasie równań różniczkowych. 5. Wł. Gosiewski. O zasadzie najprawdopodobniejszego bytu. 6. M. P. Rudzki. O pewnej klasie równań przestępnych. 7. J. Sochocki. O liniach geodezyjnych. 8. W. Krauze. Metoda teleologiczna Hoene-Wrońskiego. 9. S. Dickstein. Uwagi o metodzie teleologicznej. 10. E. Grabowski. O zbieżności trzech rozwinięć liczby  $\pi$ . 11. W. Biernacki. Załamanie światła przez ciecz. 12. J. Kowalski. Przegląd postępów Termodynamiki. 13. Wł. Gosiewski i Wł. Natanson. O odbiciu i załamaniu światła. Teoria Sir Williama Thomsona. 14. S. Dickstein. Uchwały kongresu międzynarodowego bibliografii nauk matematycznych. 15. S. Dickstein. Dopełnienie do „Wiadomości bibliograficznej o badaniach historyczno-matematycznych w Polsce“. 16. J. J. Boguski. Sprawozdanie Pracowni Fizycznej. 17. Sprawozdania z piśmiennictwa polskiego w dziedzinie nauk matematyczno-fizycznych, za rok 1890.

WYDAWNICTWA REDAKCYI

„PRAC MATEMATYCZNO-FIZYCZNYCH.“

1. PRACE MATEMATYCZNO-FIZYCZNE, wydawane w Warszawie przez S. Dicksteina, Wł. Gosiewskiego, Edw. i Wł. Natansonów.
  - a. *Tom I*, 8-ka większa, str. VI, 223 i 4 ml. 1888; z rysunkami. Cena rs. 2.
  - b. *Tomu II-go zeszyt 1*; 8-ka większa, str. 144, 1890; z rysunkami. Cena rs. 2.
  - c. *Tomu II-go zeszyt 2*; 8-ka większa, str. X i 286. 1890. Cena rs. 2 kop. 40.
  - d. *Tom III*, 8-ka większa, str. 243. 1892. Z rysunkami. Cena rs. 2.
  - e. *Tom IV* 8-ka większa, z rysunkami, str. 234. 1893. Cena rs. 2.
  - f. *Tom V* (w przygotowaniu).
2. S. Dickstein. KANONY LOGARYTMÓW Hoene-Wrońskiego. 8-ka, str. 30 z 6 tablicami. 1890. Cena rs. 1.
3. S. Dickstein. TABLICA LOGARYTMÓW Hoene-Wrońskiego. 8-ka, str. 15 z 1 tablicą. 1890. (Wydanie mniejsze). Cena kop. 20.
4. Wł. Natanson. WSTĘP DO FIZYKI TEORETYCZNEJ. 8-ka, str. XII i 458; z drzeworytami w tekście. 1890. Cena rs. 4; w oprawie angielskiej rs. 4 kop. 50.
5. S. Dickstein. POJĘCIA I METODY MATEMATYKI. Tom I. Część pierwsza. Teoria działań. 1891. 8-ka, str. VI i 268. Cena rs. 2 kop. 50.  
*Tomu I-go* Część II, Teoria liczb. Część III, Algebra, (w przygotowaniu).  
*Tomy II i III-ci*, zawierać będą Rachunek wyższy z Geometrią.
6. S. Dickstein. TRYGNOMETRYA KOPERNIKA (w przygotowaniu).
7. St. Kramsztyk. FIZYKA BEZ PRZYRZĄDÓW. Pierwsze zasady Fizyki w prostych doświadczeniach dla dzieci i młodzieży:  
Książeczka I-a z 34 drzeworytami w tekście, 8-ka, str. 104. Cena kop. 60.  
Książeczka II-a z 61 drzeworytami w tekście, 8-ka, str. 112. Cena kop. 60.
8. S. Dickstein. POCZĄTKOWA NAUKA GEOMETRYI W ZADANIACH. Wydanie III, znacznie powiększone. 1892. 16-ka, str. 152. W kartonie cena kop. 50.
9. St. Kramsztyk. SZKICE PRZYRODNICZE Z DZIEDZINY FIZYKI, GEOFIZYKI I ASTRONOMII. Warszawa. 1893. 8-a większa, Str. VI + 347. Cena rs. 3.

Cena tomu IV-go rs. 2.