Z TEORYI n-KROTNYCH CAŁEK OKREŚLONYCH.

NAPISAŁ

JÓZEF PUZYNA.

W teoryi całek określonych podwójnych znane jest twierdzenie, że, gdy funkcya znajdująca się pod znakiem całkowania wśród granic staje się nieoznaczoną, wtedy odwrócenie porządku całkowania zmienia zarazem i wartość całki i że właściwie w tym wypadku nie dwa, ale nieskończenie wiele jest rezultatów całkowania.

Z tem twierdzeniem jest w związku niniejsze poszukiwanie, zmierzające do zbadania pod tym względem niektórych typów całek n-krotnych z dowolnem $n \geqq 2$, a więc z ogólniejszego stanowiska. Przedewszystkiem więc chodziło mi o to, aby przedstawić cały nieskończony zapas wartości do takiéj całki należący a wynikający z najogólniejszego twierdzenia (C) [ustęp II], w którém o porządek całkowania nie troszczymy się, a chcemy to uczynić w sposób prosty w takiéj formie, aby z niéj odrazu wyczytać można było zakresy ciągłe, mieszczące w sobie te wartości. Okazało się, że do tego teoretycznie za każdym razem wystarczają tylko funkcye jednéj zmiennéj.

Tam, gdzie obliczanie całek takich uczyniłem zależnem od wstawiania granic w pewnym porządku, (twierdzenie (D) [ustęp II]), starałem się usystematyzować porządki całkowania prowadzące do tych samych wartości w grupy i rozstrzygnąć pytanie, kiedy i w jaki sposób mimo takiéj postaci funkcyi znajdującéj się pod znakiem całkowania, że się do niéj twierdzenie o zmianie wartości ze zmianą porządku całkowania stosować powinno, całka przecież „jednowartościową“ pozostaje.

Do utworzenia całek o wspomnianych typach posłużyły mi poszukiwania Du Bois-Reymonda, a w szczególności jego twierdzenie o podstawianiu znikających zmiennych w daną funkcyą.

Zająłem się tem obszernie i wyłącznie w ustępie I i w jednéj części ustępu II, a to w tym celu, by przez to twierdzenie, do jakich w teoryi rozważanych n-krotnych określonych całek doszedłem, w całéj ogólności módz wypowiedzieć.

I.

Niech

$$L = a_1 x_1^m + a_2 x_2^m + \ldots + a_n x_n^m + \ldots\ldots,$$

$$M = b_1 x_1^m + b_2 x_2^m + \ldots + b_n x_n^m + \ldots\ldots$$

będą dwie formy jednorodne n zmiennych rzeczywistych i niezależnych $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tego samego stopnia m i o współczynnikach $a_1, a_2, \ldots \ldots, b_1, b_2, \ldots$ rzeczywistych. Daléj niech L i M nie mają żadnego wspólnego wymiernego (całkowitego) dzielnika, i ani L, ani M niech nie będzie potęgą całkowitą innéj formy stopnia niższego tych samych zmiennych.

Przy

$$\frac{x_2}{x_1} = v,\ \frac{x_3}{x_1} = v_1,\ \frac{x_4}{x_1} = v_2, \ldots,\ \frac{x_n}{x_1} = v_{n-2},$$

możemy położyć:

$$\text{(A)} \qquad \frac{L}{M} = u = \frac{a_1 + a_2 v^m + a_3 v_1^m + \ldots + a_n v_{n-2}^m + (v, v_1, v_2, \ldots, v_{n-2})_{m-1}}{b_1 + b_2 v^m + b_3 v_1^m + \ldots + b_n v_{n-2}^m + (v, v_1, v_2, \ldots, v_{n-2})_{m-1}},$$

a gdy dla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zbliżających się *równocześnie* do zera lub do nieskończoności przyjmiemy, że $v, v_1, v_2, \ldots, v_{n-2}$ mogą przyjmować dowolne, ale już tylko *oznaczone* wartości z obszaru

$$(v, v_1, v_2, \ldots, v_{n-2}) = (+\infty \ldots -\infty, +\infty \ldots -\infty, \ldots, +\infty \ldots -\infty) \quad (1)$$

to do każdego układu $(v', v'_1, \ldots, v'_{n-2})$ wyjętego z (1) można dobrać odpowiadający układ $(x'_1\, x'_2, \ldots, x'_n)$ tak, że jego współrzędne $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ *wszystkie są skończone i równocześnie niewszystkie są zerami.*

Stąd wynika:

Nieoznaczoności

$$\left.\frac{L}{M}\right]_{x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0}, \qquad \left.\frac{L}{M}\right]_{x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \infty} \qquad (2)$$

przedstawiają takie i tylko takie wartości, jakie przybiera $\frac{L}{M}$ *w obszarze* — który przez $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ poniżéj oznaczać będziemy — *skończonych i równocześnie do zera niezdążających* $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

albo:

Badając wartości ilorazu $u = \frac{L}{M}$ *w nieograniczonym obszarze* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, *możemy ten obszar zastąpić ścieśnionym obszarem* $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$.

Gdy L i M na dwóch różnych miejscach (rzetelnych) obszaru $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ stają się zerami, to u przedstawia w $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ wszystkie wartości zakresu $(-\infty \ldots +\infty)$ [1]). Tem samem i nieoznaczoności (2) dają każdą wartość z tego zakresu; są — jak się wyrażamy — nieograniczenie nieoznaczone.

Gdy w

$$\frac{L}{M} = \frac{\Sigma A_{s_1 s_2 \ldots s_n} x_1^{s_1} x_2^{s_2} \ldots x_n^{s_n}}{\Sigma B_{s_1 s_2 \ldots s_n} x_1^{s_1} x_2^{s_2} \ldots x_n^{s_n}}, \qquad s_1 + s_2 + \ldots + s_n = m$$

mamy zawsze

$$\frac{A_{s_1 s_2 \ldots s_n}}{B_{s_1 s_2 \ldots s_n}} = \text{stałéj } k, \qquad (3)$$

to $\frac{L}{M}$ i nieoznaczoności (2) przedstawiają jednę tylko wartość $= k$.

Te dwa wypadki zostawiając na uboczu, a przez P, Q, P_1, Q_1 rozumiejąc liczby dodatnie, rzeczywiste skończone i różne od zera, musimy przyjąć, że $\frac{L}{M}$ i nieoznaczoności (2) jeszcze przedstawiać mogą wartości z zakresów takich:

I. $$(+P \ldots -Q), \quad P \gtreqless Q,$$

gdy L może być $= 0$, ale M nigdy się zerem nie staje.

---

1) Tu i poniżéj ze znikaniem form L, M zawsze łączyć będziemy i zmianę znaku, jeżeli wyraźnie tego nie usuniemy.

II. $(+P\dots+Q),\quad P\gtrless Q,$

III. $(-P_1\dots-Q_1)\ P_1\gtrless Q_1$

W obydwóch tych razach licznik L i mianownik M stawać się zerem nigdzie nie może w $[x_1\, x_2\dots x_n]$.

IV. $(+\infty\dots P)$ i $(-Q\dots-\infty)$.

Tutaj mianownik M zerem się staje, przybiera zatem wartości i dodatnie i ujemne, a licznik L zerem się nie stając, statecznie znak zatrzymuje.

W przypadku I może się zdarzyć, że L stając się w $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ zerem, zresztą statecznie jest dodatniem, lub statecznie ujemnem. Gdy tu $M>0$ w $[x_1\, x_2\dots x_n]$ przyjmiemy, mieć będziemy zakres

V. $(0\dots+P)$ lub $(0\dots-Q)$.

W przypadku IV przyjmując zawsze $L>0$, a mianownik M — oprócz jego wartości $=0$ — zresztą zawsze dodatnim, lub zawsze ujemnym, będziemy mieli odpowiednio

VI. $(+\infty\dots+P)$ lub $(-\infty\dots-Q)$.

Gdy wreszcie L i M w obszarze $[x_1, x_2,\dots x_n]$ na różnych miejscach stają się zerem, a zresztą wszędzie wykazują stateczność znaku, mamy

VII. $(0\dots+\infty)$ lub $(0\dots-\infty)$.

Wspomnieć trzeba, że przypadki I—VII należą zawsze do ilorazu u o formach L, M parzystego stopnia m i że ta parzystość stopnia jest tu warunkiem koniecznym (ale jeszcze niedostatecznym).

Wartości $+P, \pm Q, -P_1, -Q_2$ będące granicami powyższych zakresów, należą do największości i najmniejszości, jużto dodatnich jużto ujemnych ilorazu u. Oznaczymy je więc, obliczając wartości u na rzeczywistych miejscach obszaru $[x_1, x_2, \dots, x_n]$, spełniających związki:

$$\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}=0,\qquad \alpha=1,2,\dots,n \tag{4}$$

i z tych wartości wyjmując bezwzględnie największe lub bezwzględnie najmniejsze, według znaczenia granic $P_1, \pm Q, -P_1, -Q_1$ zakresów I — VI.

Związki (4), gdy położymy

$$\frac{\partial L}{\partial x_\alpha}=L_\alpha,\quad \frac{\partial M}{\partial x_\alpha}=M_\alpha,\qquad \alpha=1,2,\dots,n,$$

mają postać

$$\frac{ML_\alpha-LM_\alpha}{M^2}=0,\qquad \alpha=1,2,\dots,n,$$

a że $M=\infty$ odrzucić trzeba, gdyż obszar $[x_1\, x_2\dots x_n]$ jest zawsze o skończonych $x_1, x_2, \dots, x_n$, więc w miejsce (4) mamy związki:

$$\begin{aligned} l_1&=ML_1-LM_1=0,\\ l_2&=ML_2-LM_2=0,\\ &\vdots\\ l_n&=ML_n-LM_n=0. \end{aligned}\tag{5}$$

Wskutek jednorodności funkcyj L i M zachodzą tu związki

$$\begin{aligned} \frac{1}{m}\,[x_1 L_1+x_2 L_2+\dots+x_n L_n]&=L,\\ \frac{1}{m}\,[x_1 M_1+x_2 M_2+\dots+x_n M_n]&=M. \end{aligned}\tag{6}$$

Pomnóżmy równania (5) kolejno przez $x_1, x_2, \dots, x_n$ i dodajmy, to otrzymamy wskutek (6):

$$l_1 x_1+l_2 x_2+\dots+l_n x_n=0;$$

stąd, ponieważ nie wszystkie tu wchodzące $x_1, x_2, \dots, x_n$ są równocześnie równe zeru, wynika, że w naszem zadaniu dość jest korzystać tylko z $n-1$ związków (5).

Opuszczając np. związek $l_\alpha=0$ i pozostawiając x_α dowolne, otrzymamy

$$\left(x_1^{(\alpha)}, x_2^{(\alpha)}, \dots\ x_{\alpha-1}^{(\alpha)}, x_\alpha, x_{\alpha+1}^{(\alpha)}, \dots, x_n^{(\alpha)}\right)$$

jako układ dający największość lub najmniejszość ilorazu u.

Lecz zamiast wstawiać takie układy w $\frac{L}{M}$, możemy je także — co z związków (5) odrazu wynika — wstawiać w $\frac{L_a}{M_a}$, t. j. w stosunek równomiennych pierwszych pochodnych cząstkowych form L i M.

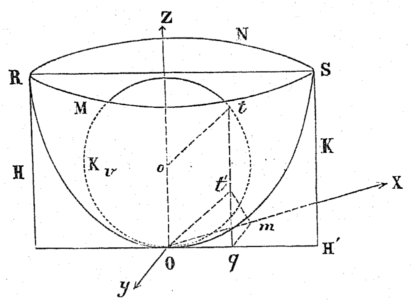
*

* *

Rezultaty powyższych badań sprawdzimy na przykładzie. Niech

$$z = f(xy)$$

będzie równaniem powierzchni MON takiéj, że poziom xoy układu prostokątnego (xyz) jest jéj płaszczyzną styczną, a początek jego 0 leży w punkcie jéj styczności.



Połóżmy

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} = r, \quad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} = s$$

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} = t$$

i poprowadźmy płaszczyznę HK o równaniu

$$y = vx; \quad v = tg\, H'OX,$$

to w przecięciu płaszczyzny $y - v\,x = 0$ z powierzchnią $z - f(xy) = 0$ otrzymamy krzywą ROS, któréj promień krzywizny ϱ_v (koła krzywiznowego K_v) w punkcie O wyrazi się pod postacią

$$\varrho_v = \frac{1 + v^2}{r + t\,v^2 + 2\,s\,v}, \tag{7}$$

albo

$$\varrho_v = \frac{x^2 + y^2}{rx^2 + ty^2 + 2s\,xy}. \tag{8}$$

Z geometrycznego określenia stosunku $\frac{y}{x} = v$ wynika, że tu w wartościach x, y możemy się ograniczyć do obszaru $[x, y]$, a więc do x, y skończonych i nierównocześnie znikających.

Przy nich, v zmieniając się w zakresie $(-\infty \ldots +\infty)$, da w postaci (7) promienie krzywizny wszystkich możliwych tak zwanych przecięć normalnych (takich, jak (ROS)) powierzchni w jéj punkcie O.

Z drugiéj strony, prowadząc w kole K_v

$$ot \text{ równe i równoległe do } Ot' = \varrho_v,$$

oznaczając współrzędne punkta t przez

$$x = Om, \quad y = mq, \quad z = qt,$$

i nazywając

$$\angle\, m\, Ot' = \varphi, \quad \angle\, q\, m\, t' = \vartheta,$$

mieć będziemy:

$$\begin{aligned} Om &= x = \varrho_v \cos\varphi, \\ mq &= y = \varrho_v \cos \sin\varphi, \\ qt &= z = \varrho_v + \varrho_v \sin\vartheta \sin\varphi. \end{aligned}$$

Rugując φ i ϑ z tych związków, znajdujemy

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2z\,\varrho_v,$$

a gdy za ϱ_v położymy wartość (8), mamy

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2z\,\frac{x^2 + y^2}{rx^2 + ty^2 + 2s\,xy}. \tag{9}$$

Jestto widocznie równanie obwiedni kół krzywiznowych, należących do wszelkich przecięć normalnych powierzchni w punkcie O.

Rzędna z téj obwiedni w punkcie $x = 0$, $y = 0$ jest nieskończenie wieloznaczna, przyjmuje bowiem wartości

$$z = 2\,\varrho_o\,,$$

$$v = (-\infty \ldots +\infty)$$

W istocie równanie (9) daje przy $x=0$, $y=0$, prócz $z=0$, jeszcze

$$\frac{z}{2} = \varrho_o = \frac{x^2+y^2}{rx^2+ty^2+2s\,xy}\Big]_{\substack{x=0\\y=0}}\,.$$

Z tego wynika, że iloraz ϱ_o przedstawia tu taki sam nieskończony szereg wartości w formie swéj nieoznaczonéj przy $x=0$, $y=0$, co przy skończonych wartościach x, y branych z obszaru $[x, y]$.

Zakresy mieszczące wartości ilorazu ϱ_o podaje—jak wiadomo—geometrya analityczna w ten sposób:

Gdy oznaczymy

$$R_1 = \frac{r+t+\sqrt{(r+t)^2-4\,(rt-s^2)}}{2\,(rt-s^2)}\,,\quad R_2 = \frac{r+t-\sqrt{(r+t)^2-4\,(rt-s^2)}}{2\,(rt-s^2)}\,,$$

to będzie:

przy $rt - s^2 > 0$,

$$\varrho_o = (R_1 \ldots R_2),$$

gdzie przyjmujemy $R_1>0$ i $R_2>0$ lub $R_1<0$ i $R_2<0$ (przyp. II, III);

przy $rt - s^2 < 0$,

$$\varrho_o = (+\infty \ldots R_1) \text{ i } (R_2 \ldots -\infty),$$

gdzie przyjmujemy $R_1>0$, a $R_2<0$ (przyp. IV);

przy $rt - s^2 = 0$,

$$\varrho_o = \left(+\infty \ldots \frac{1}{r+t}\right),$$

gdy $r>0$, $t>0$, a

$$\varrho_o = \left(\frac{1}{r+t} \ldots -\infty\right),$$

gdy $r<0$, $t<0$ (przyp. VI).

* * *

Przejdźmy do ilorazu form szczególnych

$$\text{(B)}\qquad u = \frac{A_1\,x_1^m + A_2\,x_2^m + \ldots + A_n\,x_n^m}{B_1\,x_1^m + B_2\,x_2^m + \ldots + B_n\,x_n^m}\,;$$

w których przyjmujemy m parzyste, współczynniki $A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_n$ wszystkie rzetelne i jednakowego znaku (dodatnie) i wszystkie najprzód różne od zera. Związki

$$\frac{A_\alpha}{B_\alpha} = k \text{ stałéj}, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, n$$

wykluczamy.

Tak forma L, jak i M nie staje się tu zatém zerem w obszarze $[x_1, x_2, \ldots x_n]$, każda z nich jest tylko dodatnia, a stąd wynika, że iloraz u przedstawia jedynie wartości dodatnie, zamknięte między skończonemi granicami. By je wyznaczyć, zauważmy, że tu związki $l_\alpha = 0$ sprowadzają się do postaci:

$$\begin{aligned} x_1^{m-1}\left[\frac{L}{M} - \frac{A_1}{B_1}\right] &= 0\,,\\ x_2^{m-1}\left[\frac{L}{M} - \frac{A_2}{B_2}\right] &= 0\,,\\ \vdots\qquad & \;\vdots\\ x_n^{m-1}\left[\frac{L}{M} - \frac{A_n}{B_n}\right] &= 0\,. \end{aligned}\tag{11}$$

Z nich wynikają odrazu spodziewane największości i najmniejszości ilorazu u jako stosunki

$$\frac{A_\alpha}{B_\alpha}\,,\qquad \alpha = 1, 2, \ldots, n$$

i należące do nich układy

$$x_1=0,\ x_2=0, \ldots x_{\alpha-1}=0,\ x_\alpha \gtrless 0,\ x_{\alpha+1}=0, \ldots x_n=0\,. \tag{12}$$

Układ bowiem (12) sprawdza związek α-ty czynnikiem drugim, inne czynnikami pierwszemi. Wskutek wykluczenia związków (10) nie znajdziemy układów spełniających związki (11) czynnikami drugimi.

Niechże $\frac{A_\lambda}{B_\lambda}$ będzie największym, a $\frac{A_\mu}{B_\mu}$ najmniejszym ze stosunków $\frac{A_\alpha}{B_\alpha}$, to

(a) $$u = \left(\frac{A_\lambda}{B_\lambda} \cdots \frac{A_\mu}{B_\mu}\right).$$

W szczególności być może $A_\mu = 0$, podczas gdy wszystkie B_α są > 0. Wtedy mamy

(b) $$u = \left(\frac{A_\lambda}{B_\lambda} \cdots 0\right). \qquad \text{[przyp. V]}$$

Gdy $B_\lambda = 0$, a wszystkie są $A_\alpha > 0$, to

(c) $$u = \left(+\infty \cdots \frac{A_\mu}{B_\mu}\right), \qquad \text{[przyp. VI]}$$

a gdy wreszcie $A_\mu = 0$, $B_\lambda = 0$, to

(d) $$u = (+\infty \ldots 0). \qquad \text{[przyp. VII]}$$

Odnośnie do przypadków (a), (b), (c), (d) mamy np.

(a) $$u = \frac{x_1^2 + 2\,x_2^2 + 3\,x_3^2 + 5\,x_4^2}{8\,x_1^2 + 3\,x_2^2 + 2\,x_3^2 + x^4} = (5 \ldots {}^1/_8),$$

(b) $$u = \frac{5\,x_1^4 + * + 6\,x_3^4 + 3\,x_4^4}{4\,x_1^4 + 4\,x_2^4 + x_3^4 + 8\,x_4^4} = (6 \ldots 0),$$

(c) $$u = \frac{3\,x_1^6 + 4\,x_2^6 + 5\,x_3^6}{* + 8\,x_2 + x_3} = (+\infty \ldots {}^1/_2),$$

(d) $$u = \frac{3\,x_1^4 + x_2^4 + * + 2\,x_4^4}{5\,x^4 + * + 3\,x_3^4 + x_4^4} = (\infty \ldots 0).$$

W przypadku (b) forma L, w przypadku (c) forma M a w (d) i L i M są takiemi, że pozostając w $[x_1\, x_2 \ldots]$ zawsze dodatniemi, na jednem miejscu tego obszaru stają się zerem. Tak np. $5\,x_1^4 + * + 6\,x_3^4 + 3\,x_4^4 = 0$ na miejscu $x_2 \gtreqless 0$, $x_1 = x_3 = x_4 = 0$ i t. p.

Zbadajmy, czy wartości $\frac{A_\nu}{B_\nu}$, $\nu \gtreqless \lambda$, $\nu \gtreqless \mu$, jakie z równań (11) na miejscach

$$x_\nu \gtreqless 0,\ x_1 = 0,\ x_2 = 0, \ldots,\ x_{\nu-1} = 0,\ x_{\nu+1} = 0, \ldots,\ x_n = 0 \qquad (13)$$

jeszcze dostajemy, są największościami albo najmniejszościami funkcyi u w zwykłem analitycznem znaczeniu?

Obierzmy w tym celu miejsce

$$h_1,\ h_2, \ldots,\ h_{\nu-1},\ (x_\nu + h_\nu),\ h_{\nu+1}, \ldots,\ h_n,$$

nieskończenie blizkie miejsca (13) i połóżmy

$$A_\nu\, B_\alpha - A_\alpha\, B_\nu = C_{\nu\alpha}, \qquad {\scriptstyle \alpha = 1, 2, \ldots, \nu-1, \nu+1, \ldots, n},$$
$$(C_{\nu\nu} = 0)$$

to otrzymamy

$$D_\nu = \frac{A_\nu}{B_\nu} - \frac{A_1\, h_1^m + \ldots + A_{\nu-1}\, h_{\nu-1}^m + A_\nu\,(x_\nu + h_\nu)^m + A_{\nu+1}\, h_{\nu+1}^m + \ldots + A_n\, h_n^m}{B_1\, h_1^m + \ldots + B_{\nu-1}\, h_{\nu-1}^m + B_\nu\,(x_\nu + h_\nu)^m + B_{\nu+1}\, h_{\nu+1}^m + \ldots + B_n\, h_n^m}$$

$$= \frac{C_{\nu 1}\, h_1^m + C_{\nu 2}\, h_2^m + \ldots + C_{\nu\nu-1}\, h_{\nu-1}^m + C_{\nu\nu+1}\, h_{\nu+1}^m + \ldots + C_{\nu n}\, h_n^m}{B_\nu\,[B_1\, h_1^m + \ldots + B_{\nu-1}\, h_{\nu-1}^m + B_\nu\,(x_\nu + h_\nu)^m + B_{\nu+1}\, h_{\nu+1}^m + \ldots + B_n\, h_n^m]}$$

Przy $|h_1|$, $|h_2|, \ldots |h_{\nu-1}|$, $|h_{\nu+1}|, \ldots |h_n|$ zdążających do zera pozostaje mianownik zawsze dodatnim, a wskutek $x_\nu \gtreqless 0$ i nie zdążającego do zera jest skończonym.

W liczniku wskutek znaczenia współczynników $C_{\nu\alpha}$ i założenia

$$\frac{A_\lambda}{B_\lambda} > \frac{A_\nu}{B_\nu} > \frac{A_\mu}{B_\mu}$$

będą niektóre $C_{\nu\alpha}$ dodatnie, a niektóre ujemne.

Stąd pochodzi, że między układami $(h_1\, h_2 \ldots h_{\nu-1}\, h_{\nu+1} \ldots h_n)$ o nieskończenie małych $h_1, h_2, \ldots$ znajdą się i takie, które czynią ten licznik dodatnim i takie, które go uczynią ujemnym.

D_ν może więc być przy $\nu \gtreqless \lambda$ i $\nu \gtreqless \mu$ i dodatniem i ujemnem, a gdy tak, to $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ nie są ani największościami ani najmniejszościami funkcyi u.

Tylko przy $\nu = \lambda$ mamy wszystkie $C_{\lambda\alpha} > 0$ i $D_\lambda > 0$ a przy $\nu = \mu$ wszystkie $C_{\mu\alpha} < 0$ i $D_\mu < 0$.

Znaczenie ilorazu (B) zmienimy teraz o tyle, że w L współczynniki $A_1, A_2, \ldots, A_n$ nie wszystkie są jednakowego znaku; B_α pozostają przeciwnie wszystkie d o d a t n i e, lecz każde A_α i każde B_α n a s a m p r z ó d różne od zera zakładamy.

Taki iloraz u przybiera w $[x_1, x_2 \dots x_n]$, między innemi, także wartość $= 0$, ale nieskończonością nigdy być nie może.

Gdy więc między $\frac{A_\alpha}{B_\alpha}$ największy dodatni jest $\frac{A_\lambda}{B_\lambda}$, a bezwzględnie największy ujemny $-\frac{A_\mu}{B_\mu} < 0$, to okaże się tu

$$(a') \qquad u = \left(+\frac{A_\lambda}{B_\lambda} \dots - \frac{A_\mu}{B_\mu}\right)$$

W szczególności, gdy

$$(b') \qquad A_\lambda = 0, \quad \text{mamy} \quad u = \left(0 \dots - \frac{A_\mu}{B_\mu}\right);$$

$$(c') \qquad B_\lambda = 0, \quad \text{„} \quad u = \left(+\infty \dots - \frac{A_\mu}{B_\mu}\right);$$

$$(d') \qquad B_\mu = 0, \quad \text{„} \quad u = \left(+\frac{A_\lambda}{B_\lambda} \dots - \infty\right);$$

$$(e') \qquad B_\lambda = B_\mu = 0, \quad \text{„} \quad u = (+\infty \dots - \infty).$$

Stosownie do tego mamy np.

$$(a'') \qquad u = \frac{5\,x_1^4 - 3\,x_2^4 + 2\,x_3^4 - 6\,x_4^4}{x_1^4 + 4\,x_2^4 + 3\,x_3^4 + 5\,x_4^4} = (+5 \dots - {}^6/_5);$$

$$(b'') \qquad u = \frac{-4\,x_1^2 + * - 3\,x_3^2 - 4\,x_4^2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2} = (0 \dots - 4);$$

$$(c'') \qquad u = \frac{5\,x_1^6 - 3\,x_2^6 - 5\,x_3^6}{* + x_2^6 + 3\,x_3^6} = (+\infty \dots - 3);$$

$$(d'') \qquad u = \frac{2\,x_1^2 + 3\,x_2^2 - 5\,x_3^2 - 7\,x_4^2}{x_1^2 + 3\,x_2^2 + * + x_4^2} = (2 \dots - \infty)$$

$$(e'') \qquad u = \frac{x_1^2 + x_2^2 + 4\,x_3^2 + 5\,x_4^2}{x_1^2 + * + x_3^2 + *} = (+\infty \dots - \infty).$$

Gdy wreszcie współczynniki B_α nie wszystkie będą tego samego znaku, podczas gdy A_α założymy wszystkie dodatnie, to przy najmniejszym stosunku dodatnim $\frac{A_\lambda}{B_\lambda}$ a bezwzględnie najmniejszym ujemnym $-\frac{A_\mu}{B_\mu}$ mieć będziemy

$$(a''') \qquad u = \left(+\infty \dots + \frac{A_\lambda}{B_\lambda}\right) \;\text{ i }\; \left(-\frac{A_\mu}{B_\mu} \dots - \infty\right),$$

$$\frac{A_\lambda}{B_\lambda} > 0, \quad -\frac{A_\mu}{B_\mu} < 0,$$

a w szczególności

$$(b''') \qquad u = (+\infty \dots 0) \;\text{ i }\; \left(-\frac{A_\mu}{B_\mu} \dots - \infty\right),$$

$$(c''') \qquad u = \left(+\infty \dots + \frac{A_\lambda}{B_\lambda}\right) \;\text{ i }\; (0 \dots - \infty).$$

Po tych uwagach o ilorazie (B), wracając do ogólnego

$$(A) \qquad u = \frac{L}{M},$$

przyjmujemy, że u zawiera swe wartości kolejno w zakresach

$$(+P \dots - Q),\ (+P \dots + Q),\ (-P_1 \dots - Q_1,\ (+\infty \dots + P)$$
$$\text{i } \ (-Q \dots - \infty);$$

te same zakresy należyć będą odpowiednio do ilorazów v takich postaci:

$$\frac{P\,\xi^m - Q\,\eta^m}{\xi^m + \eta^m},\ \frac{P\,\xi^m + Q\eta^m}{\xi^m + \eta^m},\ -\frac{P_1\,\xi^m + Q_1\,\eta^m}{\xi^m + \eta^m},\ \frac{P\,\xi^m + Q\,\eta^m}{\xi^m - \eta^m}.$$

Wszystkie je możemy przedstawić we wspólnej formie:

$$v = \frac{S\,\xi^m + \varepsilon\,T\,\eta^m}{\xi^m + \varepsilon'\,\eta^m},$$

gdzie S, T, są tylko w przypadku 3-im $(-P_1 \dots - Q_1)$ ujemne, zresztą zawsze dodatnie i skończone (jedna z nich może być i zerem), a $\varepsilon = +1$ lub -1, $\varepsilon' = +1$ lub -1 według potrzeby.

Połóżmy $S = \sigma^{-1}$, to w miejsce v możemy także położyć

$$v' = \frac{\xi^m + b\,T\,\eta^m}{\sigma\xi^m + \varepsilon'\,\eta^m}.$$

Przyjmujemy teraz—co w przypadku $\varepsilon' = +1$ zajść może—że $S = \infty$, to używając v' zamiast v, położyć trzeba $\sigma = 0$, tak że mamy wtedy

$$v' = \frac{\xi^m + \varepsilon\, T \eta^m}{\eta^m}.$$

Analogicznie postąpić trzeba, gdy $T = \infty$.

Gdy zakres wartości ilorazu u jest $(\infty \dots 0)$, to wtedy

$$v = \frac{\xi^m}{\eta^m}, \quad (m \text{ parzyste})$$

należy widocznie do tego zakresu. Tylko w przypadku gdy $u = (+\infty \dots \dots -\infty)$ [por. C'] nie znajdziemy do takiego u odpowiadającego mu v z parzystem m. Przytem zauważyć trzeba, że w ilorazach v stopień parzysty m nie potrzebuje być równy stopniowi form L, M; można go zatem aż do 2 obniżyć.

Z tych uwag wynika, że gdy dwa ilorazy $\frac{L}{M}$ różnych postaci o tym samym zakresie ich wartości i o L, M parzystych tych samych stopni, nazwiemy równoważnemi i wprowadzimy znak równoważności $\backsim$, mamy zawsze

$$u = \frac{L}{M} \backsim v$$

wyjąwszy gdy $u = (+\infty \dots -\infty)$.

D u B o i s R e y m o n d [1]) badając wartości funkcyi dwóch rzeczywistych, niezależnych zmiennych x, y w przypadku $x = y = 0$, kładzie—gdy funkcyą jest nasz iloraz

$$(\alpha) \qquad u = \frac{\Sigma\, A_{s_1 s_2}\, x^{s_1} y^{s_2}}{\Sigma\, B_{s_1 s_2}\, x^{s_1} y^{s_2}}, \qquad s_1 + s_2 = m -$$

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

i otrzymuje w miejsce (α) iloraz

$$(\beta) \qquad u = f(\varphi),$$

niezależny od r. Uważając v i φ za współrzędne biegunowe, mamy w związku (β) równanie linii krzywéj, któréj promień wodzący v zmieniając się, przedstawia cały nieskończony szereg wartości, jakie nieoznaczoność $u\big|_{\substack{x=0\\y=0}}$ przybierać może. Krzywą tę D u B o i s R e y m o n d nazywa „l i m i t a l ą“.

[1]) Journal für reine und angew. Mathem. Tom 70, str. 10—37. Über die verschiedenen Werthe einer Function zweier reellen Variablen, wenn man diese Variablen entweder nacheinander, oder gewissen Beziehungen gemäss gleichzeitig verschwinden lässt.

W naszych badaniach możemy podobnie w ilorazie v położyć $\xi = r\cos\varphi$, $\eta = r\sin\varphi$ i wtedy—wskutek równoważności $u \backsim v$ — promieniem wodzącym v linii krzywéj

$$v = \frac{S\cos^m\varphi + \varepsilon\, T \sin^m\varphi}{\cos^m\varphi + \varepsilon' \sin^m\varphi} = F(\varphi)$$

przedstawić wszystkie wartości ilorazu u i powiedzieć, że i do ilorazu u najogólniejszych form parzystego stopnia — z wyjątkiem wypadku $u = (+\infty \dots -\infty)$ — należy l i m i t a l a o takiem znaczeniu, jakie jéj nadał D u B o i s R e y m o n d w obszarze dwóch zmiennych.

Nakoniec szukając ilorazów v równoważnych z ilorazem (B), mamy, nie wchodząc w szczególne wypadki i używając w v stopnia $m = 2$ — takie równoważności

$$u \backsim \frac{A_\lambda \xi^2 + A_\mu \eta^2}{B_\lambda \xi^2 + B_\mu \eta^2} = \left(\frac{A_\lambda}{B_\lambda} \dots \frac{A_\mu}{B_\mu}\right)$$

$$u \backsim \frac{A_\lambda \xi^2 - A_\mu \eta^2}{B_\lambda \xi^2 + B_\mu \eta^2} = \left(\frac{A_\lambda}{B_\lambda} \dots -\frac{A_\mu}{B_\mu}\right)$$

$$u \backsim \frac{A_\lambda \xi^2 + A_\mu \eta^2}{B_\lambda \xi^2 - B_\mu \eta^2} = \left(+\infty \dots + \frac{A_\lambda}{B_\lambda}\right) \text{ i } \left(-\frac{A_\mu}{B_\mu} \dots -\infty\right).$$

Te zestawienia rezultatów zresztą bardzo elementarnych, a przedewszystkiem dokładna analiza ilorazu (B) wydały mi się tu koniecznemi, by przez to poszukiwania ustępu II w każdym wypadku i w całéj ogólności módz przeprowadzić.

II.

W teoryi całek określonych spotykamy się z takiem twierdzeniem:

(C). Gdy funkcya $f(x_1\, x_2 \dots x_n)$ w całce określonéj

$$v = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \dots x_n)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n$$

o ilościach $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n, x_1, x_2, \dots, x_n$ rzeczywistych staje się dla układu $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ nieoznaczoną, a z resztą w całym obszarze całkowania jest skończoną i oznaczoną, to wtedy wartością całki jest

$$\lim_{\substack{\varepsilon_1 = 0 \\ \varepsilon_2 = 0 \\ \vdots \\ \varepsilon_n = 0}} \int\limits_{a_1+\varepsilon_1}^{b_1} \int\limits_{a_2+\varepsilon_2}^{b_2} \cdots \int\limits_{a_n+\varepsilon_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \ldots x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n \quad ^{1)}$$

Niechże $f(x_1, x_2, \ldots x_n) = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial}{\partial x_n} F(u)$ lub wprost $= \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial}{\partial x_n} u$ gdzie u jest ilorazem (B) rozważanym w ustępie I, a F analityczną funkcyą całkowalną w obszarze

$$(0 \ldots b_1,\ 0 \ldots b_2, \ldots,\ 0 \ldots b_n).$$

Wtedy będzie całka określona n-krotna

$$V = \int\limits_0^{b_1} \int\limits_0^{b_2} \cdots \int\limits_0^{b_n} \frac{\partial}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial}{\partial x_n} F\left[\frac{A_1 x_1^m + A_2 x_2^m + \ldots + A_n x_n^m}{B_1 x_1^m + B_2 x_2^m + \ldots + B_n x_n^m}\right] dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

$$= H + (-1)^n F\left[\frac{A_1 \varepsilon_1^m + A_2 \varepsilon_2^m + \ldots + A_n \varepsilon_n^m}{B_1 \varepsilon_1^m + B_2 \varepsilon_2^m + \ldots + B_n \varepsilon_n^m}\right]_{\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_n = 0}.$$

H jest tu—wskutek uczynionych założeń—skończone i oznaczone. Co się tyczy $F[\ldots]_{\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_n = 0}$, to wyraz ten według uwag ustępu I jest nieskończenie wieloznaczny i przedstawia zbiór wartości określony albo wyrazem

$$F\left[\frac{A_\lambda \xi^2 + A_\mu \eta^2}{B_\lambda \xi^2 + B_\mu \eta^2}\right] = G_1(\xi\, \eta),$$

albo wyrazem

$$F\left[\frac{A_\lambda \xi^2 - A_\mu \eta^2}{B_\lambda \xi^2 + B_\mu \eta^2}\right] = G_2(\xi\, \eta),$$

albo wreszcie wyrazem

$$F\left[\frac{A_\lambda \xi^2 + A_\mu \eta^2}{B_\lambda \xi^2 - B_\mu \eta^2}\right] = G_3(\xi\, \eta).$$

Mamy więc

$$V = H + (-1)^n G_k(\xi\, \eta), \qquad k = 1, 2, 3.$$

---

[1]) por. n. p. C. Jordan, Cours d' Analyse T. II, str 150.

W ten sposób, używając rezultatów ustępu I, wykonaliśmy zadanie wskazane twierdzeniem (C) w zupełności.

Całka jest wieloznaczna, ale nie przedstawia zawsze nieoznaczoności nieograniczonéj, a cały zbiór jéj wartości uczynić można zależnym od dwóch zmiennych ξ, η obszaru $[\xi, \eta]$ lub wreszcie od jednéj zmiennéj $v = \frac{\eta}{\xi}$ obszaru $v = (+\infty \ldots -\infty)$.

Niech np. dana będzie całka

$$V = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z}\, e^{\frac{5x^4 - 3y^4 + 2z^4}{x^4 + y^4 + z^4}}\, dx\, dy\, dz,$$

to otrzymamy tu

$$V = [e^{4/3} - e - e^{7/2} + e^5 - e^{-1/2} + e^{-3} + e^2]$$

$$- e^{\frac{5\varepsilon_1^4 - 3\varepsilon_2^4 + 2\varepsilon_3^4}{\varepsilon_1^4 + \varepsilon_2^4 + \varepsilon_3^4}} \Bigg]_{\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0},$$

a gdy sumę pierwszą w nawiasie nazwiemy H, dostaniemy dalej:

$$V = H - e^{\frac{5 - 3v^2}{1 + v^2}}, \qquad v = (+\infty \ldots -\infty).$$

Że zaś największa wartość funkcyi $e^{\frac{5 - 3v^2}{1 + v^2}}$ jest e^5, a najmniejsza e^{-3}, więc ostatecznie mamy:

$$V = [(e^{4/3} - e - e^{7/2} - e^{-1/2} + e^{-3} + e^2) \ldots (e^{4/3} - e - e^{7/2} + e^5 - c^{-1/2} + e^2)].$$

Niech

$$u = \frac{x^2 + y^2 - z^2}{x^2 + 3y^2 + z^2},$$

a

$$F(u) = u^r,$$

gdzie r całkowite i > 0. Rozważając całkę

$$V = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} u^r\, dx\, dy\, dz,$$

otrzymamy:

$$V=\left(\frac{1}{5}\right)^r-\left(\frac{1}{2}\right)^r+1+\left(\frac{1}{3}\right)^r+(-1)^r-\left[\frac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2-\varepsilon_3^2}{\varepsilon_1^2+3\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2}\right]^r_{\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=0}$$

czyli

$$V=\left(\frac{1}{5}\right)^r-\left(\frac{1}{2}\right)^r+1+\left(\frac{1}{3}\right)^r+(-1)^r-\left(\frac{1-v^2}{1+v^2}\right)^r, \qquad v=(+\infty\ldots-\infty)$$

Funkcya $\left(\frac{1-v^2}{1+v^2}\right)^r$ daje przy r nieparzystem wartości z zakresu $(+1\ldots-1)$, przy r zaś parzystem wartości z zakresu $(0\ldots1)$. Stąd wynika, że przy r nieparzystem jest

$$V=\left[\left(\tfrac{1}{5}\right)^r-\left(\tfrac{1}{2}\right)^r+\left(\tfrac{1}{3}\right)^r-1\ldots\quad\ldots\left(\tfrac{1}{5}\right)^r-\left(\tfrac{1}{2}\right)^r+\left(\tfrac{1}{3}\right)^r+1\right],$$

a przy r parzystem

$$V=\left[\left(\tfrac{1}{5}\right)^r-\left(\tfrac{1}{2}\right)^r+\left(\tfrac{1}{3}\right)^r-2\ldots\quad\ldots\left(\tfrac{1}{5}\right)^r-\left(\tfrac{1}{2}\right)^r+\left(\tfrac{1}{3}\right)^r+1\right].$$

W całkach V wybraliśmy umyślnie $F(u)$ z ilorazem u o formie (B), gdyż Cauchy [1]), który pierwszy zwrócił uwagę matematyków na wieloznaczność całek określonych, ograniczając się do dwóch zmiennych, właśnie ilorazu o formie (B) używał. Że metodę, jaką powyżéj postępowaliśmy, i wtedy zastosować trzeba i można, kiedy w $F(u)$ mieć będziemy iloraz (A) ogólnych form i że wtedy cały zbiór wartości, jakie całka V przedstawić może zależy od wyrazu

$$F\left[\frac{S\,\xi^2+\varepsilon\,T\,\eta^2}{\xi^2+\varepsilon'\,\eta^2}\right]=F\left[\frac{S+\varepsilon\,T\,v^2}{1+\varepsilon'\,v^2}\right],$$

rozumie się samo przez się.

Lecz twierdzenie (C), które naszem zdaniem podaje jedynie dobrą i ogólną regułę obliczania całek V, wypowiadają jeszcze inaczéj w ten sposób:

(D). Gdy w całce V funkcya $f(x_1\,x_2\ldots x_n)$ dla układu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ staje się nieoznaczonością, to porządek całkowania nie zawsze może być zmieniony bez zmiany wartości całki [2]).

Zbadajmyż pod tym względem całkę V, zakładając

[1]) Mémoire sur les intégrales définies.

[2]) porówn. n. p. H. Laurent, Traité d'Analyse. T. III, str. 177.

$$f(x_1\,x_2\ldots x_n)=\frac{\partial}{\partial x_1}\,\frac{\partial}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial}{\partial x_n}\,F(u)$$

Przyjmijmy, jak wprzódy, u w formie (B), a $(a_1\,a_2\ldots a_n)=(0\;0\ldots0)$. Całkujmy V w ten sposób, że granice po każdem poszczególnem całkowaniu odrazu podstawiamy, a według x_α całkujemy na ostatku, to na rezultat otrzymamy oznaczoną wartość

$$H+(-1)^n\,F\left(\frac{A_\alpha}{B_\alpha}\right).$$

Że zaś $\alpha=1,2,\ldots,n$, a $\frac{A_\alpha}{B_\alpha}$ przyjmujemy wszystkie między sobą różne, więc mieć tu będziemy w najogólniejszym przypadku n od siebie różnych (zależnych od porządku całkowania) wartości całki.

Może się jednak zdarzyć, że, mimo iż stosunki $\frac{A_\alpha}{B_\alpha}$ wszystkie są między sobą różne, wszystkie $F\left(\frac{A_\alpha}{B_\alpha}\right)$ okażą się równe. Wtedy i tylko wtedy zmiana porządku całkowania nie wpłynie i tu na wartość całki.

Z tego daléj wynika, że jeżeli $F(u)$ jest wprost $=u$, nigdy nie dostaniemy wartości całki niezależnéj od porządku całkowania.

Niech np.

$$u=\frac{2x^2-3y^2+z^2}{x^2+3y^2+2z^2},$$

$$\text{a}\qquad F(u)=(u-1)\,(u-4)\,(u-3),$$

to będzie

$$F=\left(\frac{2}{1}\right)=+2,\quad F\left(\frac{-1}{+1}\right)=-40,\quad F\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{35}{8};$$

a gdy położymy

$$F\left(\frac{2-3+1}{1+3+2}\right)-F\left(\frac{2-3}{1+3}\right)-F\left(\frac{2+1}{1+2}\right)-F\left(\frac{-3+1}{3+2}\right)=H,$$

mieć będziemy:

$$V=\int_0^1\int_0^1\int_0^1\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\partial}{\partial y}\,\frac{\partial}{\partial z}\,F(u)\,dx\,dy\,\partial z$$

$$= H - 2\,,$$
$$= H + 40\,,$$
$$= H + \frac{35}{8}\,,$$

podług tego, czy kończymy całkowanie zmienną x, y lub z.

Przyjmijmy przeciwnie, przy tem samem u,

$$F(u) = (u - 2)\ (u + 1)\left(u - \frac{1}{2}\right) = F_1(u)\,,$$

to mamy tu

$$F_1\left(\frac{2}{1}\right) = F_1\left(\frac{-1}{+1}\right) = F_1\left(\frac{1}{2}\right) = 0\,,$$

$$V = F_1\left(\frac{2-3+1}{1+3+2}\right) - F_1\left(\frac{2-3}{1+3}\right) - F_1\left(\frac{2+1}{1+2}\right) - F_1\left(\frac{-3+1}{3+2}\right) = H_1$$

bez względu na porządek całkowania.

Iloraz (B) i całki z takim ilorazem zależały o tyle od porządku, w jakim się współrzędne miejsca $(0, 0, \ldots, 0)$ podstawiały, że jedynie zmienna zdążająca po wszystkich innych do zera decydowała o wartości tych wyrażeń.

Lecz mogą tu zajść jeszcze inne wypadki:

Iloraz ogólnych form (A) napiszmy w ten sposób

$$u = \frac{(1) + (2) + (3) + \ldots + (q)}{(1)' + (2)' + (3)' + \ldots + (q)'}\,,$$

gdzie (ν), $(\nu)'$ są funkcye jednorodne stopnia m-go o wyrazach zawierających ν, a nie mniej zmiennych. Zatem

$$(\nu) = \Sigma\, A_{k_1 k_2 \ldots k_\nu}\ x_{k_1}^{p_1} x_{k_2}^{p_2} \ldots x_{k_\nu}^{p_\nu}\,,$$

$$(\nu)' = \Sigma\, A'_{k_1 k_2 \ldots k_\nu}\ x_{k_1}^{p_1} x_{k_2}^{p_2} \ldots x_{k_\nu}^{p_\nu}\,,$$

$$p_1 > 0\,,\ p_2 > 0\,, \ldots, p_\nu > 0\,,$$

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_\nu = m\,;$$

$(k_1, k_2, \ldots, k_\nu)$ przedstawiają tu wszelkie kombinacye ν-téj klasy n elementów $1, 2, 3, \ldots, n$.

Gdy $n \leqq m$, to q może być $\leqq n$; gdy zaś $n > m$, to q może być $\leqq m$.

Mając to, zauważmy iloraz

$$u_1 = \frac{(2) + (3) + \ldots}{(2)' + (3)' + \ldots}\,, \tag{1}$$

w którym w szczególności mamy

$$\begin{aligned} (2) &= (x_1\ x_2)_m + \ldots + (x_\alpha\ x_\beta)_m + \ldots\,, \\ (2)' &= (x_1\ x_2)'_m + \ldots + (x_\alpha\ x_\beta)'_m + \ldots\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Tu $\ldots (x_\alpha\ x_\beta)_m \ldots (x_\alpha\ x_\beta)'_m \ldots$ są funkcyami jednorodnemi m-go stopnia o wyrazach zawierających zawsze obie zmienne x_α, x_β.

Połóżmy w (1) w jakimbądź porządku

$$(\alpha\beta) \qquad x_1 = 0, \ldots, x_{\alpha-1} = 0,\ x_{\alpha+1} = 0, \ldots, x_{\beta-1} = 0,\ x_{\beta+1} = 0, \ldots, x_n = 0,$$

to przedewszystkiem mamy:

$$(3) = (4) = \ldots = (3)' = (4)' = \ldots = 0$$

$$(2) = (x_\alpha\ x_\beta)_m\,, \qquad (2)' = (x_\alpha\ x_\beta)'_m$$

a stąd wynika, że za podstawieniem $(\alpha\beta)$ mieć będziemy

$$u_1\Big|_{(\alpha\beta)} = \frac{(x_\alpha\ x_\beta)_m}{(x_\alpha\ x_\beta)'_m} = \frac{A_1\, x_\alpha\, x_\beta^{m-1} + A_2\, x_\alpha^2\, x_\beta^{m-2} + \ldots + A_{m-1}\, x_\alpha^{m-1}\, x_\beta}{B_1\, x_\alpha\, x_\beta^{m-1} + B_2\, x_\alpha^2\, x_\beta^{m-2} + \ldots + B_{m-1}\, x_\alpha^{m-1}\, x_\beta}\,.$$

Daléj okaże się:

$$(\alpha) \qquad u_1 \Big|_{(\alpha\beta),\ x_\alpha = 0,\ x_\beta = 0} = \frac{A_1}{B_1},$$

$$(\beta) \qquad u_1 \Big|_{(\alpha\beta),\ x_\beta = 0,\ x_\alpha = 0} = \frac{A_{m-1}}{B_{m-1}}.$$

W razie $\frac{A_1}{B_1} = \frac{0}{0}$ zastąpi tę wartość stosunek $\frac{A_2}{B_2}$, a gdy jeszcze $\frac{A_2}{B_2} = \frac{0}{0}$, to dostaniemy na wartość (α) stosunek $\frac{A_3}{B_3}$ i t. d. To samo analogicznie dotyczy wartości (β).

Lecz $(n-2)$ zmiennych $(\alpha\beta)$ zdążających nasamprzód do zera można wybrać na $\binom{n}{n-2} = \binom{n}{2}$ sposobów.

Z dwóch każdym razem pozostałych zmiennych można każdą z nich wziąć za zdążającą do zera na samym końcu. Mając więc to na względzie, otrzymamy

$$2\,\frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2} = n\,.\,\frac{n-1}{1}$$

wartości ilorazu u_1 zależnych od porządku podstawiania współrzędnych miejsca $(0, 0, \ldots 0)$.

Analogicznie, gdy mieć będziemy iloraz

$$u_2 = \frac{(3) + (4) + \ldots}{(3)' + (4)' + \ldots},$$

gdzie

$$(3) = (x_1\,x_2\,x_3)_m + \ldots + (x_\alpha\,x_\beta\,x_\gamma)_m + \ldots,$$

$$(3)' = (x_1\,x_2\,x_3)'_m + \ldots + (x_\alpha\,x_\beta\,x_\gamma)'_m + \ldots,$$

przy $\ldots (x_\alpha\,x_\beta\,x_\gamma)_m \ldots (x_\alpha\,x_\beta\,x_\gamma)'_m \ldots$ użytych w analogicznem, jak wyżéj, znaczeniu—a położymy w jakim bądź porządku

$$(\alpha\beta\gamma) \quad x_1 = 0, \ldots, x_{\alpha-1} = 0,\ x_{\alpha+1} = 0, \ldots, x_{\beta-1} = 0,\ x_{\beta+1} = 0, \ldots x_{\gamma-1} = 0, \ldots x_n = 0,$$

to otrzymamy po uporządkowaniu licznika i mianownika według x_α, x_β lub x_γ:

$$u_2 \Big|_{(\alpha\beta\gamma)} = \frac{(x_\alpha\,x_\beta\,x_\gamma)_m}{(x_\alpha\,x_\beta\,x_\gamma)'_m}$$

$$= \frac{A_1{}'\,x_\alpha^{m-2}\,x_\beta\,x_\gamma + \ldots}{B_1{}'\,x_\alpha^{m-2}\,x_\beta\,x_\gamma + \ldots}$$

$$= \frac{A_1{}''\,x_\beta^{m-2}\,x_\gamma\,x_\alpha + \ldots}{B_1{}''\,x_\beta^{m-2}\,x_\gamma\,x_\alpha + \ldots}$$

$$= \frac{A_1{}'''\,x_\gamma^{m-2}\,x_\alpha\,x_\beta + \ldots}{B_1{}'''\,x_\gamma^{m-2}\,x_\alpha\,x_\beta + \ldots}$$

Stąd mieć daléj będziemy:

$$\left.\begin{aligned}
u_2 \Big|_{(\alpha\beta\gamma),\ x_\beta = 0,\ x_\gamma = 0,\ x_\alpha = 0} &= u_2 \Big|_{(\alpha\beta\gamma),\ x_\gamma = 0,\ x_\beta = 0,\ x_\alpha = 0} = \frac{A_1{}'}{B_1{}'} \\
u_2 \Big|_{(\alpha\beta\gamma),\ x_\gamma = 0,\ x_\alpha = 0,\ x_\beta = 0} &= u_2 \Big|_{(\alpha\beta\gamma),\ x_\alpha = 0,\ x_\gamma = 0,\ x_\beta = 0} = \frac{A_1{}''}{B_1{}''} \\
u_2 \Big|_{(\alpha\beta\gamma),\ x_\alpha = 0,\ x_\beta = 0,\ x_\gamma = 0} &= u_2 \Big|_{(\alpha\beta\gamma),\ x_\beta = 0,\ x_\alpha = 0,\ x_\gamma = 0} = \frac{A_1{}'''}{B_1{}'''}
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Tu $(n-3)$ zmiennych $(\alpha\beta\gamma)$ zdążających nasamprzód do zera można wybrać na $\binom{n}{n-3} = \binom{n}{3}$ sposobów, a że z trzech pozostałych zmiennych każdą można wziąć za zdążającą na ostatku do zera, więc otrzymamy tu w całości

$$3\,.\,\frac{n\,.\,(n-1)\,(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3} = n\,.\,\frac{(n-1)\,(n-2)}{1\,.\,2}$$

wartości ilorazu u_2.

Zauważyć tu jednak trzeba, że tak wartości ilorazu u_1, jak wartości ilorazu u_2 na miejscu $(0, 0, \ldots, 0)$ mogą się okazać wszystkie równe, mimo że tu związki (3) ustępu I-go wcale nie zachodzą.

Postępując w ten sposób daléj, możemy przy $n < m$ utworzyć ilorazy

$$u_1,\ u_2, \ldots,\ u_\nu, \ldots,\ u_{n-1}$$

i na miejscu $(0, 0, \ldots 0)$ otrzymać odpowiednio liczbę wartości:

$$n.\binom{n-1}{1},\ n\binom{n-1}{2},\ \ldots,\ n\binom{n-1}{r},\ \ldots,\ n\binom{n-1}{n-1}. \tag{4}$$

Przy $n = m$ będzie iloraz

$$u_{n-1} = \frac{C\,.\,x_1\,.\,x_2\ldots x_n}{C'\,x_1\,x_2\ldots x_n} \tag{5}$$

na miejscu $(0, 0, \ldots 0)$ tylko jednowartościowym i będzie $= \frac{C}{C'}$, podczas gdy ilorazy $u_1, u_2, \ldots u_{n-2}$ wykażą tam taką liczbę wartości, jak to szereg (4) wskazuje.

Gdy $n > m$, to wiemy, że $\eta \leqq m$ i wtedy utworzyć możemy ilorazy

$$u_1,\ u_2, \ldots, u_\nu, \ldots, u_{\eta-1}$$

z liczbami wartości:

$$n.\binom{n-1}{1},\ n.\binom{n-1}{2}, \ldots, n.\binom{n-1}{\nu}, \ldots, n.\binom{n-1}{\eta-1}.$$

Podług ustępu I mają jednak wartości ilorazów $u_1, u_2, u_3, \ldots$ na miejscu $(0, 0, \ldots, 0)$ znajdować się także i w obszarze $[x_1\,x_2\,x_3\ldots x_n]$.

Że to tu zachodzi, jest widocznem. Podstawiając bowiem w u_ν współrzędne miejsca $(0, 0, \ldots, 0)$ w porządku

$$x_{k_1} = 0,\ x_{k_2} =, \ldots, x_{k_{n-1}} = 0,\quad x_{k_n} = 0,$$

otrzymujemy taką wartość, jak za podstawieniem

$$x_{k_1} = 0,\ x_{k_2} = 0, \ldots, x_{k_{n-1}} = 0,\quad x_{k_n} \gtrless 0,$$

a to miejsce należy do obszaru $[x_1\,x_2\ldots x_n]$.

Z tego powodu można i wartość $\frac{C}{C'}$ ilorazu (5) uważać za n razy się powtarzającą, gdyż w obszarze $[x_1\,x_2\ldots x_n]$ możemy—bez zmiany téj wartości—położyć $k_n = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Zbierając powyższe uwagi, powiemy:

Chcąc otrzymać wartości ilorazu

$$u_{t-1} = \frac{(t) + (t+1) + \ldots}{(t)' + (t+1)' + \ldots}$$

na miejscu $(0, 0, \ldots 0)$ zależne od porządku podstawienia, dajemy $(n-t)$ którymkolwiek zmiennym $x_1, x_2, \ldots, x_{n-t}$ wartości zero w jakimbądź porządku. Przez to dostaniemy

$$u_{t-1}\Big|_{x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-t} = 0} = \frac{(t)}{(t)'}\Big|_{x_1 = x_2 = \ldots x_{n-t} = 0}, \tag{6}$$

a gdy ostatniem podstawieniem ma być $x_\alpha = 0$, szukamy w ilorazie (6) w jego liczniku i mianowniku iloczynu z potęgą $x_\alpha^{m-(t-1)}$.

Stosunek $\left(\text{nie przedstawiający się w postaci } \frac{0}{0}\right)$ współczynników tych iloczynów będzie jedną z żądanych wartości. Każda taka wartość zależy jedynie od wyboru $(n-t)$ zmiennych, którym nasamprzód wartości $= 0$ dajemy, a potem od tego, któréj z pozostałych t zmiennych każemy na ostatku zdążać do zera. W jakim porządku $(n-t)$ pierwszym zmiennym i $(t-1)$ następnym udzielamy wartości $= 0$, jest obojętnem.

W ten sposób otrzymujemy każdą z $n.\binom{n-1}{t-1}$ wartości ilorazu u_{t-1}. W obszarze $[x_1\,x_2\,.\,.\,x_n]$ możemy je tak rozdzielić, że $\binom{n-1}{t-1}$ wartości z końcowem podstawieniem $x_\alpha = 0$ należy do jednego miejsca

$$x_1 = 0, \ldots, x_{\alpha-1} = 0,\ x_{\alpha+1} = 0, \ldots, x_n = 0;\quad x_\alpha \gtrless 0.$$

Liczba wartości może się jednak okazać i mniejszą od $n.\binom{n-1}{t-1}$, a to

1) gdy niektóre z nich będą sobie równe;

2) gdy ani w liczniku, ani w mianowniku ilorazu (6) nie znajdziemy ani jednego wyrazu, który za ostatecznem podstawieniem $(x_\alpha = 0)$ miałby już prowadzić do odpowiedniej wartości.

Możliwość wreszcie, że wszystkie $n\binom{n-1}{t-1}$ **wartości będą sobie równe—mimo, że związki** (3) **ustępu** I-go **nie zachodzą—nie jest tu wykluczona.**

Iloraz u_{t-1} niech posiada wartość w, gdy w nim współrzędne miejsca $(0, 0, \ldots, 0)$ w takim podstawiamy porządku:

$$x_1=0,\ x_2=0, \ldots, x_{n-t}=0\,;\quad x_{n-t+1}=0, \ldots, x_{n-1}=0,\ x_n=0$$

Oznaczmy podstawienia zawierające jedynie elementa $x_1, x_2, \ldots, x_{n-t}$ przez S_{n-t}, a podstawienia zawierające jedynie $x_{n-t+1}, \ldots, x_{n-1}$ przez S_{t-1}, to cały zbiór porządków podstawiania wartości zera niezmieniających w, przedstawiają iloczyny

$$S_{n-t}\,.\,S_{t-1} \tag{7}$$

w liczbie $(n-t)!\ (t-1)!$

W teoryi podstawień miałby miejsce związek

$$S_{n-t}\,.\,S_{t-1}=S_{t-1}\,.\,S_{n-t}$$

gdyż S_{n-t}, S_{t-1} nie mają ani jednéj wspólnéj litery.

Tu nie zachodzi to, tak, że do (7) tylko iloczyny o porządku $S_{n-t}\,.\,S_{t-1}$ zaliczać trzeba.

To zastrzeżenie mając ciągle na uwadze, będziemy i tu zbiór (7) nazywali grupą ilorazu u_{t-1}, należącą do jego wartości w, a to tem bardziéj, że zbiór ten jest tu grupą taką jak ją określają w teoryi podstawień (iloczyn dwóch podstawień (7) jest znowu podstawieniem grupy).

Grupą należącą do jednéj wartości ilorazu (B) będzie grupą symetryczną odnoszącą się do $(n-1)$ elementów, a więc rzędu $(n-1)!$

Taka sama grupa należy do jednéj wartości ogólnego ilorazu

$$u=\frac{(1)+(2)+\ldots}{(1)'+(2)'+\ldots},$$

w którym zakładamy $(1)\neq 0$, $(1)'\neq 0$.

Liczba $n\binom{n-1}{t-1}$ ma przy $n=2$, $t=1$ wartość $2=2!$, a przy $n=3$, $t=2$—wartość $3\,.\,2=3!$. Stąd wynika, że jedynie ilorazy u z takiemi kombinacyami (n, t) są odpowiednio $2!$ i $3!$—wartościowe i stanowią w teoryi

podstawień analogią z funkcyami o gatunku G a l o i s, jak je K r o n e c k e r zwykł był nazywać.

Do takich tu zatem rezultatów dojść można, biorąc za punkt wyjścia zasadę D u B o i s - R e y m o n d'a nierównoczesnego podstawiania współrzędnych miejsca $(0, 0, \ldots, 0)$.

W ścisłym związku z tą analizą ilorazu u_{t-1} stoi rozważanie całki n-krotnéj

$$V=\int_0^{b_1}\int_0^{b_2}\ldots\int_0^{b_n}\frac{\partial}{\partial x_1}\,\frac{\partial}{\partial x_2}\ldots\frac{\partial}{\partial x_n}\,F(u_{t-1})\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n,$$

gdy się ją ze stanowiska twierdzenia (D) oblicza.

Możemy o niéj bowiem odrazu wypowiedzieć takie twierdzenie:

I. Gdy całka V, obliczona w porządku zmiennych $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ daje wartość W, a porządek całkowania tak zmienimy, że $(n-t)$ pierwsze całkowania [według $x_1, x_2, \ldots, x_{n-t}$] wykonamy w dowolnym innym porządku, potem całkowania podług dalszych $(t-1)$ zmiennych [$x_{n-t+1}, \ldots, x_{n-1}$] także w innym jakimbądź porządku, pozostawiając całkowanie podług x_n zawsze na ostatku—to całka nie zmieni swéj wartości W.

Każdy inny porządek zmienia wartość całki w ogólności na inną.

II. Gdy całkę V obliczać będziemy według wszystkich $n!$ porządków, rozdzielą się te porządki na grupy po $\left\{n!:n\binom{n-1}{t-1}\right\}=(n-t)!\,(t-1)!$ porządków.

Do każdéj takiéj grupy—a jest ich $n\,.\binom{n-1}{t-1}$ — należeć będzie w ogólności inna wartość całki.

III. Do całki z przyjętym już porządkiem całkowania należy jedna tylko grupa; przeciwnie całka, o któréj porządku całkowania nic nie założono, posiada ich $n\binom{n-1}{t-1}$.

Te grupy są tu brane w określonem poprzednio znaczeniu.

IV. Wartości całki należące do grup poszczególnych mają postać

$$H + (-1)^n F_0^{(s)} ,$$

$$s = 1, 2, 3, \ldots , n \binom{n-1}{t-1} .$$

$F_0^{(s)}$ są to wartości funkcyi $F(u_{t-1})$ z u_{t-1} obliczonem na miejscu $(0, 0, \ldots , 0)$ w porządkach s-tej grupy; H jest funkcyą skończoną i oznaczoną granic $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

V. Wszystkie wartości całki V mogą tu być równe sobie z dwojakiéj przyczyny:

1) wartości ilorazu u_{t-1} na miejscu $(0, 0, \ldots 0)$ są wszystkie jednakowe.

2) wartości te nie są wprawdzie jednakowe, ale $F(u_{t-1})$ na miejscu $(0, 0, \ldots 0)$ jest zawsze jedno i to samo.

Z tego powodu mogą tu wartości całki i wtedy nie zależeć od porządków całkowania, gdy $F(u_{t-1})$ jest wprost $= u_{t-1}$. W całkach zawierających wprost iloraz u o formie (B) nigdy—jak to widzieliśmy — zajść to nie mogło.

Dla przykładu utwórzmy iloraz

$$u_1 = (x_1 \, x_2 \, x_3 \, x_4) ,$$

którego licznikiem jest

$$\begin{aligned} & x_1^4 (a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2) + x_2^4 (b_1 x_1^2 + b_3 x_3^2 + b_4 x_4^2) \\ & + x_3^4 (c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 + c_4 x_4^2) + x_4^4 (d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + d_3 x_3^2) \\ & + e \, x_1^2 x_2^2 x_3^2 + f \, x_2^2 x_3^2 x_4^2 + g \, x_1^2 x_3^2 x_4^2 + h \, x_1^2 x_2^2 x_4^2 ; \end{aligned}$$

mianownik taką samą ma formę, tylko w miejsce współczynników $a_2, a_3, \ldots, e, f, g, h$ wchodzą kreskowane: $a'_2, a'_3, \ldots, e', f', g', h'$, i zauważmy całkę

$$V = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial x_4} u_1 \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 \, dx_4 .$$

Gdy $a'_2, a'_3, \ldots, e', f', g', h'$, założymy wszystkie dodatnie, to funkcya

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial x_4} u_1$$

w obszarze $[x_1 \, x_2 \, x_3 \, x_4]$ nigdzie nie staje się nieskończonością, tak że tu w obszarze całkowania $(0 \ldots 1, 0 \ldots 1, 0 \ldots 1, 0 \ldots 1)$ mamy do czynienia tylko z elementami skończonemi.

Położymy dla krótkości:

$$\begin{aligned} & (1111) - (1110) - (1101) + (1100) - (1011) + (1010) \\ & + (1001) - (1000) - (0111) + (0110) + (0101) - (0100) \\ & + (0011) - (0010) - (0001) = H , \end{aligned}$$

to całka obliczona podług twierdzenia (C) ma wartość:

$$H + \lim_{\substack{\varepsilon_1 = 0 \\ \varepsilon_2 = 0 \\ \varepsilon_3 = 0 \\ \varepsilon_4 = 0}} (u_1)_{x_1 = \varepsilon_1 , \, x_2 = \varepsilon_2 , \, x_3 = \varepsilon_3 , \, x_4 = \varepsilon_4} ;$$

postępując zaś podług twierdzenia (D) mieć będziemy: H takie jak wyżéj a powiększone dodatkiem, który stosownie do porządku całkowania będzie:

z porządku			$x_1 \, x_2 , x_3 \, x_4 \ldots$	$\dfrac{d_3}{d'_3}$
„	„	„ „	$x_4 \, x_3 \ldots$	$\dfrac{c_4}{c'_4}$
„	„		$x_1 \, x_3 , x_2 \, x_4 \ldots$	$\dfrac{d_2}{d'_2}$
„	„	„ „	$x_4 \, x_2 \ldots$	$\dfrac{b_4}{b'_4}$
„	„		$x_1 \, x_4 , x_2 \, x_3 \ldots$	$\dfrac{c_2}{c'_2}$
„	„	„ „	$x_3 \, x_2 \ldots$	$\dfrac{b_3}{b'_3}$
„	„		$x_2 \, x_3 , x_4 \, x_1 \ldots$	$\dfrac{a_4}{a'_4}$
„	„	„ „	$x_1 \, x_4 \ldots$	$\dfrac{d_1}{d'_1}$
„	„		$x_2 \, x_4 , x_1 \, x_3 \ldots$	$\dfrac{c_1}{c'_1}$
„	„	„ „	$x_3 \, x_1 \ldots$	$\dfrac{a_3}{a'_3}$
„	„		$x_3 \, x_4 , x_1 \, x_2 \ldots$	$\dfrac{b_1}{b'_1}$
„	„	„ „	$x_1 \, x_2 \ldots$	$\dfrac{a_2}{a'_2}$

W każdym z tych 12 porządków możemy jeszcze dwie pierwsze zmienne przemienić ze sobą, a przez to wartość dodatku się nie zmieni. Tak np. porządek $x_1\, x_2,\, x_3\, x_4$ należy do wartości dodatku $\frac{d_3}{d'_3}$; do tego dodatku należy także i porządek $x_2\, x_1,\, x_3\, x_4$ i t. d.

Przyjmując, że stosunki $\frac{d_3}{d'_3}$, $\frac{c_4}{c'_4}$, ... są wszystkie jednakie, ale o wartości różnéj przynajmniéj od jednego ze stosunków

$$\frac{e}{e'}\,,\ \frac{f}{f'}\,,\ \frac{g}{g'}\,,\ \frac{h}{h'}$$

mamy tu jeden tylko rezultat bez względu na to, jaki porządek całkowania z 4! możliwych użyto przy całkowaniu.

Lwów, 1892.

O CAŁKOWANIU RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH LINIOWYCH RZĘDU *n*-go POD POSTACIĄ SKOŃCZONĄ.

PRZEZ

A. J. STODÓŁKIEWICZA.

Niech będzie równanie różniczkowe, o różniczkach zupełnych, liniowe rzędu n-go

$$\frac{d^n y}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + X_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots + X_{n-1} \frac{dy}{dx} + X_n\, y = X\,, \tag{1}$$

w którem X_1, X_2, ..., X_n, X są pewne funkcye zmiennéj niezależnéj x. Wprowadźmy oznaczenia

$$\frac{dy^{(n-2)}}{dx} = y^{(n-1)}\,,\ \frac{dy^{(n-3)}}{dx} = y^{(n-2)}\,, \ldots,\ \frac{dy'}{dx} = y''\,,\ \frac{dy}{dx} = y'\,, \tag{2}$$

natenczas, równanie (1) można napisać tak

$$\frac{dy^{(n-1)}}{dx} = X - X_1\, y^{(n-1)} - X_2\, y^{(n-2)} - \ldots - X_{n-1}\, y' - X_n\, y\,. \tag{3}$$

Mnożąc równania (2) odpowiednio przez czynniki nieoznaczone μ_1, μ_2, ..., μ_{n-2}, μ_{n-1} i dodając do równania (3), otrzymamy