

## Skróty oznaczają:

## Refraktory:

M = Merz —  $\bigcirc 162^{\text{mm}}$   
H = Heyde —  $\bigcirc 162^{\text{mm}}$   
C = Cooke —  $\bigcirc 135^{\text{mm}}$   
G = Goerz —  $\bigcirc 110^{\text{mm}}$   
LS = Lerebours-Secretan —  $\bigcirc 102^{\text{mm}}$

## Obserwatorowie:

I. B. = I. Breunero-wa  
J. G. = J. Gadomski  
A. G. = A. Głuskin  
M. K. = M. Kamiński  
L. O. = L. Orkisz  
W. O. = W. Orłowska  
E. R. = E. Rybka  
L. Z. = L. Zajdler

Zjawiska: I — wejście  
E — wyjście.

## Spółrzędne punktów obserwacji:

| Narzędzie       | $\lambda$ Gr                           | $\varphi$     |
|-----------------|----------------------------------------|---------------|
|                 | <sup>h</sup> <sup>m</sup> <sup>s</sup> |               |
| M . . . . .     | 1 24 7.21                              | +52° 13' 4.4" |
| H . . . . .     | 1 24 7.29                              | +52° 13' 4.5" |
| C . . . . .     | 1 24 7.40                              | +52° 13' 5.5" |
| G, LS . . . . . | 1 24 7.26                              | +52° 13' 4.3" |

## Zusammenfassung.

Vorliegender Artikel enthält Beobachtungen der totalen Mondfinsterniss, die am 2 April 1931 an der Warschauer Universitätssternwarte ausgeführt worden waren. An den Beobachtungen nahmen sowohl Astronomen der Sternwarte, wie auch Sternfreunde teil.

Die atmosphärischen Umstände waren sehr günstig, so dass es möglich war viele Einzelheiten der Erscheinung zu beobachten. Sie sind im § 3 zusammengestellt und enthalten, in Weltzeit [T. U.] ausgedrückt, die beobachteten Kontaktmomente, Berührungsmomente des Schattenraumes mit verschiedenen Mondkratern sowie allgemeine Bemerkungen über die Schattenfarben auf der Mondoberfläche.

Die beobachteten Momente der Bedeckungen der verschiedenen Sterne durch den Mond sind im § 4, in der Spalte 2 angegeben.

Die Spalten: 4, 5, 6, 7, 8 der Tafel im § 4 enthalten, der Reihe nach: Sterngrösse, Art der Erscheinung, das heisst Verschwinden (I) oder Wiedererscheinen (E) des Sternes, Instrument, Vergrößerung und die Name des Beobachters. Instrumente, Namenabkürzungen der Beobachter, sowie auch die Koordinaten der Beobachtungsorter sind am Ende des § 4 angegeben.

Warschau, Universitätssternwarte. Juni 1931.

# Sur la théorie riemannienne de certains systèmes orthogonaux, II. \*)

(Teoria Riemanna pewnych układów ortogonalnych)

par

A. Zygmund

Chapitre I.

Fonctions de Bessel.

§ 1.

1. Dans ce chapitre nous allons nous occuper des propriétés des séries de la forme

$$(1) \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_{\nu}(\lambda_k x),$$

où  $J_{\nu}$  désigne la fonction de Bessel d'ordre  $\nu$ :<sup>1)</sup>

$$(2) \quad J_{\nu}(x) = \frac{x^{\nu}}{2^{\nu} \Gamma(\nu+1)} \left[ 1 - \frac{x^2}{2 \cdot (2\nu+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4 \cdot (2\nu+2)(2\nu+4)} - \dots \right]$$

et  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$  est la suite (infinie) des racines positives de l'équation

$$(3) \quad z J'_{\nu}(z) + H J_{\nu}(z) = 0 \quad (H = \text{const.}, -\infty < H \leq \infty).$$

On sait que la fonction  $z = \sqrt{x} J_{\nu}(x)$  vérifie l'équation différentielle

$$z'' + \left( 1 + \frac{1-4\nu^2}{4x^2} \right) z = 0.$$

\*) La première partie de ce travail a été publiée dans les „Studia Mathematica“ 2 (1930) p. 97—173.

<sup>1)</sup> Pour la théorie des fonctions de Bessel cf. Watson [1].

Dans les raisonnements ci-dessous nous nous bornons au cas de  $\nu = 1$ . Les fonctions

$$(4) \quad J_\nu(\lambda_1 x), J_\nu(\lambda_2 x), \dots, J_\nu(\lambda_k x), \dots$$

forment alors, dans l'intervalle  $(0, 1)$ , un système polaire par rapport à la fonction  $x$ . Plus précisément, pour  $m, n = 1, 2, \dots$ , on a

$$(5) \quad \int_0^1 x J_\nu(\lambda_m x) J_\nu(\lambda_n x) dx = 0 \quad (m \neq n) \\ = \frac{1}{2} \left\{ \left( 1 - \frac{\nu^2}{\lambda_m^2} \right) J_\nu^2(\lambda_m) + J_\nu'^2(\lambda_m) \right\} \quad (m = n).$$

Ceci revient à dire que le système des fonctions

$$(6) \quad \sqrt{x} J_\nu(\lambda_1 x), \sqrt{x} J_\nu(\lambda_2 x), \dots, \sqrt{x} J_\nu(\lambda_k x), \dots,$$

est orthogonal dans  $(0, 1)$ , mais la première façon de s'exprimer est souvent plus commode comme nous nous occupons des séries (1) procédant suivant les fonctions  $J_\nu(\lambda_k x)$  et non  $\sqrt{x} J_\nu(\lambda_k x)$ .

2. Les fonctions de Bessel vérifient les équations

$$(7_\nu) \quad J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x); \quad J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2J_\nu'(x)$$

qui sont équivalentes aux égalités:

$$\frac{d}{dx} [x^\nu J_\nu(x)] = x^\nu J_{\nu-1}(x); \quad \frac{d}{dx} [x^{-\nu} J_\nu(x)] = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x).$$

Il nous sera plus commode d'écrire ces égalités sous la forme

$$(8_\nu) \quad \frac{1}{\lambda} \frac{d}{dx} [x^\nu J_\nu(\lambda x)] = x^\nu J_{\nu-1}(\lambda x), \quad (9_\nu) \quad \frac{1}{\lambda} \frac{d}{dx} [x^{-\nu} J_\nu(\lambda x)] = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(\lambda x),$$

$\lambda$  désignant un nombre arbitraire différent de zéro.

On a pour les fonctions  $J_\nu(x)$  ( $0 < x < \infty$ ) l'évaluation asymptotique

$$(10_\nu) \quad J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ \cos \left( x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \cdot \left( A_0 + \frac{A_2}{x^2} + \dots + \frac{A_{2p-2}}{x^{2p-2}} + O(x^{-2p}) \right) \right. \\ \left. + \sin \left( x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \cdot \left( B_1 + \frac{B_3}{x^3} + \dots + \frac{B_{2p-1}}{x^{2p-1}} + O(x^{-2p}) \right) \right\}$$

où  $p$  est un nombre naturel arbitraire. Dans cette formule les constantes  $A_n$  et  $B_n$  ne dépendent que de  $\nu$  et  $n$ . Il nous suffit de savoir que

$$A_0 = 1, \quad B_1 = \frac{1 - 4\nu^2}{8}.$$

Pour l'étude des cas les plus intéressants il nous suffit la formule

$$(11) \quad J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ \cos z + \frac{1 - 4\nu^2}{8x} \sin z + \frac{\alpha(x)}{x^2} \right\} \quad \left( z = x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right)$$

qu'on obtient de (10) en y posant  $p = 1$ . La fonction  $\alpha(x)$  ( $= \alpha_\nu(x)$ ) est bornée dans tout l'intervalle  $(\varepsilon, \infty)$  ( $\varepsilon > 0$ ).

En comparant les deux expressions pour  $J_\nu'$ , dont l'une on obtient en différentiant (11) et l'autre:

$$J_\nu'(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ -\sin z + \frac{1 - 4(\nu^2 + 1)}{8x} \cos z + \frac{\alpha_{\nu-1} - \alpha_{\nu+1}}{2x^2} \right\}$$

résulte de (7<sub>ν</sub>) et (11), on voit que  $\alpha_\nu'(x)$  est également bornée dans  $(\varepsilon, \infty)$ .

Les formules (7<sub>ν</sub>) permettent d'exprimer  $J_\nu'$  par  $J_\nu$  et  $J_{\nu+1}$ . En substituant les expressions obtenues dans (8) nous pouvons écrire cette équation sous la forme

$$(12) \quad x J_{\nu+1}(x) + K J_\nu(x) = 0 \quad (K = -H - \nu).$$

En écrivant la formule (10<sub>ν</sub>) sous la forme

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \{ A_x^{(\nu)} \cdot \cos z + B_x^{(\nu)} \cdot \sin z \} \quad \left( z = x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right)$$

où  $A_x^{(\nu)}$  et  $B_x^{(\nu)}$  désignent certaines fonctions de  $x$ , nous voyons que l'équation

$$(12) \text{ équivaut à } \operatorname{tg} z = \frac{x B_x^{(\nu+1)} - K A_x^{(\nu)}}{x A_x^{(\nu+1)} + K B_x^{(\nu)}}.$$

En prenant les développements asymptotiques des fonctions  $A$  et  $B$  nous obtenons les développements asymptotiques pour les racines de (12). En particulier en posant

$$A_x^{(\nu)} = 1 + O(x^{-2}), \quad B_x^{(\nu)} = \frac{1 - 4\nu^2}{8x} + O(x^{-3})$$

on obtient, par les approximations successives, que

$$(13) \quad \lambda_n = n\pi + \alpha_0 + \alpha_1 \cdot n^{-1} + \gamma_n \cdot n^{-2} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

où  $\alpha$  et  $\alpha_1$  sont des constantes et  $\gamma_n = O(1)$ . Si l'on tient compte de (13), on déduit de la formule (11) que pour  $m = 1, 2, \dots$ :

$$(14_\nu) \quad J_\nu(\lambda_m x) = \sqrt{\frac{2}{\pi m x}} \left\{ \cos [(m+k)\pi x + \varphi] \right. \\ \left. + \frac{\beta(x)}{m} \sin [(m+k)\pi x + \varphi] + \frac{\varrho_m(x)}{m^2} \right\},$$

où  $q_m(x) = O(1)$ ,  $q'_m(x) = O(m)$  dans tout intervalle  $(\varepsilon, 1)$  ( $0 < \varepsilon$ );  $k$  et  $\varphi$  sont des constantes indépendantes de  $m$ .

Remarquons encore que de la formule (10 <sub>$\nu$</sub> ) écrite sous la forme

$$(15_\nu) \quad J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \{ \cos z + o(1) \} \quad \left( z = x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right)$$

et de la formule pour  $J'_\nu$  qu'on obtient de (7 <sub>$\nu$</sub> ), (15 <sub>$\nu-1$</sub> ) et (15 <sub>$\nu+1$</sub> ) on déduit l'évaluation asymptotique suivante:

$$(16) \quad \left( 1 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) J_\nu^2(x) + J_\nu'^2(x) \sim \frac{2}{\pi x} \quad (x \rightarrow \infty)$$

3. Il est important de noter que le système orthogonal (6) n'est complet que pour  $H + \nu > 0$ . Pour le rendre complet dans le cas  $H + \nu \leq 0$  il faut ajouter à (6) une certaine fonction  $\sqrt{x} C_0(x)$ . Conformément à ce fait nous appellerons série de Bessel toute série de la forme

$$(17) \quad a_0 C_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_\nu(\lambda_k x)$$

où les  $\lambda_k$  ont la même signification qu'auparavant et  $C_0(x) \equiv 0$  pour  $H + \nu > 0$ .

Si  $H + \nu \leq 0$ ,  $C_0(x)$  est une fonction régulière pour  $0 < x \leq 1$  et intégrable dans  $(0, 1)$ <sup>2)</sup>. Elle est définie à un facteur constant près qu'on peut choisir de telle façon que l'intégrale de  $x C_0^2(x)$  dans  $(0, 1)$  soit égale à 1. Dans la plupart des cas on peut supposer dans (17) que  $a_0 = 0$ , c'est à dire l'étude de cette série se réduit à celle de (1).

Il résulte de la formule (15 <sub>$\nu$</sub> ) que, si une série (1) resp. (17) converge dans un ensemble de mesure positive, on a  $a_m = o(\sqrt{m})$ . Les s. B. dont les coefficients sont  $o(\sqrt{m})$  correspondent aux s. t. à coefficients tendant vers zéro.

S'il existe une fonction  $f(x)$  telle que les coefficients de la série (17) soient donnés par la formule

<sup>2)</sup> Voir Watson [1], p. 199.

<sup>3)</sup> On a à un facteur indéterminé près) que

$$C_0(x) = x^\nu \quad (H + \nu = 0); \quad C_0(x) = I_\nu(\lambda_0 x) \quad (H + \nu < 0).$$

où  $\pm i\lambda_0$  désignent les racines complexes de l'équation (3) et  $I_\nu(x)$  est la fonction de Bessel d'argument imaginaire définie par la relation

$$I_\nu(x) = e^{-\frac{\pi i \nu}{2}} J_\nu(x e^{\frac{\pi i}{2}})$$

(Cf. Watson [1], p. 597).

$$(18) \quad a_0 = \int_0^1 t C_0(t) f(t) dt, \\ a_m = \frac{2 \lambda_m^2}{(\lambda_m^2 - \nu^2) J_\nu^2(\lambda_m) + J_\nu'^2(\lambda_m)} \int_0^1 t J_\nu(\lambda_m t) f(t) dt \quad (m = 1, 2, \dots),$$

cette série est le développement de Fourier de  $f$  et nous la désignerons par  $\mathfrak{S}_B[f]$ .

## § 2.

4. Pour démontrer la formule (14) (où  $\lambda_m$  sont des racines positives de l'équation (3)) nous ne nous sommes servis que des formules asymptotiques (11) et (13). Il en résulte que la formule analogue à (14) a lieu aussi pour  $J_\mu(\lambda_m x)$  où  $\lambda_m$  ont la même signification qu'auparavant, mais  $\mu$  n'est pas nécessairement égal à  $\nu$ . De ce fait et du fait que  $q_m(x) = O(1)$ ,  $q'_m(x) = O(m)$  uniformément dans  $(\varepsilon, 1)$  on déduit la proposition suivante:

Lemme  $\alpha$ . Soit donné un nombre  $0 < \delta < 1$  et une fonction  $\varphi(x)$  continue avec quelques-unes de ses dérivées dans l'intervalle  $0 < x \leq 1$ .

Si  $\lambda_k$  désignent les racines de l'équation (3) et si  $a_k = o(\sqrt{k})$  la série

$$(19) \quad \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_\mu(\lambda_m) \varphi(x)$$

est uniformément équiconvergente dans  $(\delta, 1)$  avec une s. t.

$$(20) \quad \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\pi x + B_n \sin n\pi x) \quad (A_n, B_n \rightarrow 0).$$

La démonstration étant complètement analogue à celle du lemme  $\eta$  nous la laissons au lecteur.

$M$  désigne, comme auparavant, une méthode linéaire de sommation non moins puissante que la convergence ordinaire et d'ailleurs arbitraire<sup>4)</sup>. Pour que les formules (18) définissant les coefficients de Fourier aient sens il faut et il suffit que la fonction  $x^{1+\nu} f(x)$  soit intégrable dans  $(0, 1)$ . Il est donc naturel de définir les ensembles d'unicité de type  $U'_M$  de la façon suivante: un ensemble  $E$ , situé dans  $(0, 1)$ , est un  $U'_M$ <sup>5)</sup> si toute s. B. (17), à coefficients  $o(\sqrt{k})$ , sommable  $M$  en dehors de  $E$  vers une fonction  $f(x)$  finie et telle que

<sup>4)</sup> Pour la définition précise cf. Chap. I, p. 101.

<sup>5)</sup> Plus exactement: un  $U'_M(\nu)$ .

$x^{1+\nu} f(x)$  soit intégrable dans  $(0, 1)$ , est  $\mathfrak{S}_B[f]$ . En posant  $f \equiv 0$  on obtient la définition des ensembles  $U_M$ .

Les s. t. que nous rencontrerons dans ce chapitre seront toujours de la forme (20). Les ensembles d'unicité que nous allons considérer pour ces séries, seront toujours situés dans l'intervalle  $(0, 1)$ :

**Théorème 1.** Si  $\nu \geq -\frac{1}{2}$  tout ensemble  $U_M$  pour les s. t. est un  $U_M$  pour les s. B.

**Théorème 2.** Si  $\nu \geq -\frac{1}{2}$  tout ensemble  $U'_M$  pour les s. t. est un  $U'_M$  pour les s. B<sup>5)</sup>.

La condition  $\nu \geq -\frac{1}{2}$  est essentielle, car, comme nous le verrons plus loin, dans le cas de  $-1 < \nu < -\frac{1}{2}$  la situation est différente. Les démonstrations des théorèmes 1 et 2 étant analogues nous nous bornons à celle du théorème 2.

5. Nous commençons par démontrer la proposition suivante:

**Lemme 1.** Soit  $\beta_m = o(m^{-\frac{3}{2}})$ . Considérons l'expression

$$(21) \quad \frac{F(x)}{x^\alpha} = x^{-\alpha} \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m J_\nu(\lambda_m x).$$

Elle est bornée pour  $x \rightarrow +0$ , si a)  $\nu > \frac{1}{2}$ ,  $\alpha = \frac{1}{2}$ ; b)  $-1 < \nu < \frac{1}{2}$ ,  $\alpha = \nu$ . Dans ce dernier cas elle est de la forme  $K + o(x^{\frac{1}{2}-\nu})$ . Enfin si  $\alpha = \nu = \frac{1}{2}$  l'expression (21) est  $o\left(\lg \frac{1}{x}\right)$ .

En effet, en tenant compte du fait que  $\lambda_m \sim Cm^{-1}$  et en posant  $M = [1/x]$ , nous avons:

$$F(x) \cdot x^{-\alpha} = x^{-\alpha} \sum_{m=1}^M + x^{-\alpha} \sum_{m=M+1}^{\infty} = A_x + B_x.$$

$$A_x = x^{-\alpha} \sum_{m=1}^M o(m^{-\frac{3}{2}}) \cdot O(\lambda_m x)^\nu = x^{\nu-\alpha} \sum_{m=1}^M o(m^{\nu-\frac{3}{2}}).$$

$$B_x = x^{-\alpha} \sum_{m=M+1}^{\infty} o(m^{-\frac{3}{2}}) \cdot O(\lambda_m x)^{-\frac{1}{2}} = x^{-\frac{1}{2}-\alpha} \sum_{m=M+1}^{\infty} o(m^{-\frac{3}{2}}) = o(x^{\frac{1}{2}-\alpha}).$$

Il en résulte que l'expression  $F(x) \cdot x^{-1/2}$  est bornée pour  $\nu > \frac{1}{2}$ , qu'elle est

<sup>5)</sup> On en déduit en particulier que tout ensemble dénombrable est à la fois  $U$  et  $U'$  pour les s. B. M. Plancherel m'a communiqué obligamment qu'il avait démontré que les ensembles  $H$  de M. Rajchman sont de type  $U$  pour les s. B. Les ensembles  $H$  étant de type  $U$  pour les s. t., la proposition de M. Plancherel est une conséquence du théorème 1.

$o(\lg 1/x)$  pour  $\nu = \frac{1}{2}$  et que  $F(x) x^{-\nu}$  est bornée pour  $-1 < \nu < \frac{1}{2}$ . Dans ce dernier cas on a (pour  $\alpha = \nu$ ) que  $B_x = o(x^{\frac{1}{2}-\nu})$  et

$$A_x = \sum_{m=1}^M o(m^{\nu-\frac{3}{2}}) = K - \sum_{m=M+1}^{\infty} o(m^{\nu-\frac{3}{2}}) = K + o(x^{\frac{1}{2}-\nu}). \quad \text{C. q. f. d.}$$

6. Passons maintenant à la démonstration du théorème 2 et supposons d'abord que  $H + \nu \leq 0$  (Cf. (3)). Soit (17) une série à coefficients  $o(k^{\frac{1}{2}})$  sommable  $M$  en dehors de  $E$  ( $E$  est un  $U_M$  pour les s. t.) vers une fonction  $f(x)$  telle que  $x^{1+\nu} f$  soit intégrable dans  $(0, 1)$ . Nous allons prouver que cette série est  $\mathfrak{S}_B[f]$ . Nous pouvons supposer que 1°  $a_0 = 0$ , 2°  $\int_0^1 t^{1+\nu} f dt = 0$ . La condition 1° (qui d'ailleurs n'est pas essentielle)<sup>7)</sup> est naturelle comme nous pouvons toujours retrancher le terme  $a_0 C_0(x)$  de  $f(x)$ . (Si  $H + \nu < 0$  on a  $C_0 \equiv 0$  on peut donc supposer  $a_0 = 0$ )<sup>8)</sup>. Comme dans le cas de  $H + \nu \neq 0$  la fonction  $t^{1+\nu}$  ne peut pas être orthogonale à toutes les  $J_\nu(\lambda_k t)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), on peut toujours choisir un nombre naturel  $m$  et une constante  $A$  telle que

$$\int_0^1 t^{1+\nu} [f - A J_\nu(\lambda_m t)] dt = 0$$

et il suffit de retrancher  $A J_\nu(\lambda_m t)$  de la série et de la fonction  $f(x)$ .

Nous avons l'égalité:

$$(M) \quad \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_\nu(\lambda_m x) = f(x) \quad (x \in CE)$$

$$(M) \quad \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_\nu(\lambda_m x) x^{1+\nu} = f(x) x^{1+\nu} \quad (x \in CE)$$

(où  $\sum_1^\infty$  est considérée comme  $0 + \sum_1^\infty$ ). En tenant compte du lemme  $\kappa$  ( $\mu = \nu$ ,  $\varphi = x^{1+\nu}$ ) et du lemme  $\beta$ <sup>9)</sup>, nous pouvons intégrer terme à terme la dernière série dans l'intervalle  $(x_0, x)$  ( $0 < x_0 < x < 1$ ). En nous servant de la formule (8<sub>ν</sub>) nous avons donc

$$(22) \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{\lambda_m} [J_{\nu+1}(\lambda_m t) t^{1+\nu}]_{x_0}^x = \int_{x_0}^x f(t) t^{1+\nu} dt,$$

<sup>7)</sup> Dans la démonstration du théorème 1 on doit se passer de cette condition.

<sup>8)</sup> Remarquons encore que si le premier terme de la série  $a_0 + a_1 + a_2 + \dots$  est égal à zéro, cette série doit être traitée comme  $0 + a_1 + a_2 + \dots$  et non comme  $a_1 + a_2 + \dots$

<sup>9)</sup> Voir la première partie de ce travail.

la série du second membre convergérant uniformément dans tout intervalle  $(\delta, 1 - \delta)$  ( $\delta > 0$ ).

En multipliant les deux membres de (22) par  $x^{-2\nu-1}$  et en intégrant terme à terme nous obtenons de la formule (9<sub>v</sub>):

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[ -\frac{a_m}{\lambda_m^2} \{J_\nu(\lambda_m x) x^{-\nu}\}_{x_0}^{x_1} + \frac{a_m}{\lambda_m} \frac{(x^{-2\nu} - x_0^{-2\nu})}{2\nu} \cdot J_{\nu+1}(\lambda_m x_0) x_0^{1+\nu} \right] \\ = \int_{x_0}^x du \int_{x_0}^u f(t) t^{1+\nu} dt.$$

Il en résulte que la série à termes  $a_m \lambda_m^{-1} J_{\nu+1}(\lambda_m x_0) x_0^{1+\nu}$  est convergente; l'égalité (22) peut être donc écrite dans la forme

$$(23) \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{\lambda_m} J_{\nu+1}(\lambda_m x) x^{1+\nu} = \int_0^x f(t) t^{1+\nu} dt + C$$

( $C, C_1, \dots$  désignant comme toujours des constantes). En multipliant les deux termes par  $x^{-2\nu-1}$  et intégrant terme à terme dans  $(x, 1)$  nous avons

$$(24) \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{\lambda_m^2} x^{-\nu} J_\nu(\lambda_m x) = \int_x^1 u^{-2\nu-1} \int_0^u f(t) t^{1+\nu} dt + \frac{C}{2\nu} x^{-2\nu} + C_1,$$

où pour  $\nu = 0$  le deuxième terme du second membre doit être remplacé par  $-C \log x$ . Supposons d'abord que  $C = C_1 = 0$ ; nous prouverons plus tard que pour  $\nu \geq -\frac{1}{2}$  ceci en réalité est vrai. Nous avons donc

$$(25) \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{\lambda_m^2} x J_\nu(\lambda_m x) = x^{\nu+1} \int_x^1 u^{-2\nu-1} \int_0^u f(t) t^{1+\nu} dt,$$

la série du premier membre convergérant absolument et uniformément dans  $(0, 1)$ . En multipliant cette égalité par la fonction intégrable  $J_\nu(\lambda_n x)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) et en intégrant dans  $(0, 1)$ , nous obtenons (en désignant par  $h_n^{(\nu)}$  le second membre dans (5) pour  $m = n$  et en nous servant de la condition 2°):

$$(26) \quad \frac{a_n}{\lambda_n^2} h_n^{(\nu)} = \int_0^1 x^{\nu+1} J_\nu(\lambda_n x) dx \int_x^1 u^{-2\nu-1} du \int_0^u f(t) t^{1+\nu} dt \\ = \frac{1}{\lambda_n} \int_0^1 \frac{d}{dx} (x^{\nu+1} J_{\nu+1}(\lambda_n x)) dx \int_x^1 u^{-2\nu-1} du \int_0^u f(t) t^{1+\nu} dt \\ = \frac{1}{\lambda_n} \int_0^1 x^{-\nu} J_{\nu+1}(\lambda_n x) dx \int_0^x f(t) t^{1+\nu} dt = -\frac{1}{\lambda_n^2} \int_0^1 \frac{d}{dx} (x^{-\nu} J_\nu(\lambda_n x) dx) \int_0^x f(t) t^{1+\nu} dt \\ = \frac{1}{\lambda_n^2} \int_0^1 t J_\nu(\lambda_n t) f(t) dt \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Si  $H + \nu < 0$  il en résulte que la s. B. considérée est  $\mathcal{S}_B[f]$ . Pour  $H + \nu > 0$  il faut encore vérifier que l'intégrale de la fonction  $t C_0(t) f(t)$  dans  $(0, 1)$  est nulle.

Comme dans ce cas on a (à un facteur constant près)  $C_0 = J_\nu(\lambda_0 x)$  ( $\lambda_0$  est la racine imaginaire de (3)), le raisonnement est exactement le même que dans (26). Il nous reste seulement de motiver l'hypothèse que  $C = C_1 = 0$  dans (24). D'après le lemme 1 le premier membre de (24) ( $x \rightarrow 0$ ) pour  $\nu > \frac{1}{2}$  est  $o(x^{\frac{1}{2}-\nu})$ , tandis que le second membre est  $o(x^{-2\nu}) + C x^{-2\nu}/2\nu + C_1$ , donc  $C = 0$ . Pour  $\nu = \frac{1}{2}$  le premier membre est  $o(\log 1/x)$ , le second membre  $(C + o(1))x^{-1}$ , donc  $C = 0$ . Dans le cas de  $0 < \nu < \frac{1}{2}$  les membres premier et second sont respectivement  $O(1)$  et  $(C/2\nu + o(1))x^{-2\nu}$ , d'où la même conclusion. De même si  $\nu = 0$  quand le second membre est  $(C + o(1)) \log 1/x$ . Si  $-1 < \nu < 0$  le second membre de (24) peut être écrit sous la forme

$$-\int_0^x u^{-2\nu-1} \int_0^u f(t) t^{1+\nu} dt + \frac{C}{2\nu} x^{-2\nu} + C_2.$$

Il est égal à  $C_2 + (C/2\nu + o(1))x^{-2\nu}$ , tandis que le premier membre est (d'après le lemme 1)  $K + o(x^{\frac{1}{2}-\nu})$ , d'où on déduit que  $C = 0$  pour  $\nu \geq -\frac{1}{2}$ . Le fait que  $C_1 = 0$  pour  $\nu \geq -\frac{1}{2}$  est évident seulement dans le cas de  $H = \infty$ , où il suffit de substituer dans (24) la valeur  $x = 1$ . Si l'on veut de le démontrer dans le cas général on peut raisonner comme il suit.

Comme, pour  $x \rightarrow 1 - 0$ , le second membre dans (23) est  $o(1)$  (d'après la condition 2°), on en obtient, en multipliant par  $x^{-2\nu}$  et en intégrant dans  $(x, 1)$ :

$$(27) \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{\lambda_m^2} \{J_\nu(\lambda_m) - J_\nu(\lambda_m x)/x^\nu\} = o(1 - x).$$

Posons  $M = M(x) = [1/1 - x]$ . Le premier membre de (27) est

$$(28) \quad \sum_{m=1}^M \frac{a_m}{\lambda_m^2} + \sum_{m=M+1}^{\infty} \frac{a_m}{\lambda_m^2} = A_x + B_x, \\ B_x = \sum_{m=M+1}^{\infty} a_m \lambda_m^{-2} \cdot O(\lambda_m^{-1/2}) = o(1 - x), \\ A_x = \sum_{m=1}^M a_m \lambda_m^{-2} \{J_\nu(\lambda_m) - J_\nu(\lambda_m x)\} + (1 - x^{-\nu}) \sum_{m=1}^M a_m \lambda_m^{-2} J_\nu(\lambda_m x) = A'_x + A''_x,$$

où, d'après (24),

$$(29) \quad A'_x \sim -\nu(1 - x) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{\lambda_m^2} J_\nu(\lambda_m) = -\nu(1 - x) C_1.$$

D'après la théorie de la moyenne on a pour  $x \rightarrow 1$

$$J_\nu(\lambda_m x) - J_\nu(\lambda_m) = \lambda_m(x-1)J'_\nu(\lambda_m) + \lambda_m^2(x-1)^2 \cdot O(\lambda_m^{-\frac{1}{2}}),$$

donc

$$(30) \quad A'_x = - \sum_{m=1}^M a_m \lambda_m^{-2} \cdot \lambda_m(x-1) \cdot J'_\nu(\lambda_m) + (1-x)^2 \sum_{m=1}^M a_m O(\lambda_m^{-\frac{1}{2}}) \\ = (1-x) \sum_{m=1}^M a_m \lambda_m^{-1} J'_\nu(\lambda_m) + o(1-x).$$

En substituant (29) et (30) dans (28) et en divisant par  $1-x$  on obtient:

$$(31) \quad \sum_{m=1}^{\infty} a_m \lambda_m^{-1} J'_\nu(\lambda_m) = \nu C_1,$$

la série du premier membre étant convergente. Remarquons en passant que la convergence de cette série résulte de celle de la série (24) pour  $x=1$  et du fait que les  $\lambda_n$  vérifient l'équation (3). Des formules (24) et (31) on déduit que

$$0 = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \lambda_m^{-2} \{ \lambda_m J'_\nu(\lambda_m) + H J_\nu(\lambda_m) \} = (H + \nu) C_1$$

et comme  $H + \nu \neq 0$  on a  $C_1 = 0$ .

7. La démonstration du théorème 2 dans le cas de  $H + \nu = 0$  est analogue.

Dans ce cas, si l'on suppose que l'intégrale  $f \cdot t^{1+\nu}$  dans  $(0, 1)$  est égale à zéro, on ne peut assumer, sans restreindre la généralité des raisonnements, que  $a_0 = 0$ . Nous avons maintenant

$$(M) \quad a_0 x^\nu + \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_\nu(\lambda_m x) = f(x) \quad (x \in E),$$

et, en raisonnant comme auparavant, nous obtenons au lieu de (24) la formule

$$(32) \quad -\frac{a_0 x^2}{4(\nu+1)} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{\lambda_m^2} J_\nu(\lambda_m x) x^{-\nu} = \int_x^1 u^{-2\nu-1} du \int_0^u t^{1+\nu} f dt + \frac{C}{2\nu} x^{-2\nu} + C_1.$$

On prouve que  $C = 0$ . Au lieu de (31) on a

$$(33) \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{\lambda_m} J'_\nu(\lambda_m) = \frac{a_0}{2(\nu+1)} + \nu \left\{ C_1 + \frac{a_0}{4(\nu+1)} \right\}.$$

L'égalité (32) nous donne

$$(34) \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{\lambda_m^2} J_\nu(\lambda_m) = C_1 + \frac{a_0}{4(\nu+1)}.$$

De (33) et (34) on déduit (comme  $H + \nu = 0$ ) que

$$0 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{\lambda_m^2} (\lambda_m J'_\nu(\lambda_m) + H J_\nu(\lambda_m)) = \frac{a_0}{2(\nu+1)},$$

donc

$$a_0 = 0 = \frac{1}{k_0^{(\nu)}} \int_0^1 t^{1+\nu} f dt.$$

Comme  $a_0 = 0$  l'égalité (32) se réduit à (24) ce qui nous donne (26). Le théorème 2 est donc complètement démontré.

8. Essayons maintenant d'étudier le cas de  $-1 < \nu < -\frac{1}{2}$ . Les raisonnements n'étant pas essentiellement différents bornons nous au cas de  $H + \nu < 0$ . Jusqu'à la relation (24) la démonstration reste la même, mais nous ne pouvons affirmer que  $C = C_1 = 0$ .

On déduit de (24) que

$$(35) \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{\lambda_m^2} J_\nu(\lambda_m) = C/2\nu + C_1.$$

Au lieu de l'égalité (31) on obtient

$$(36) \quad \sum_{m=1}^{\infty} a_m \lambda_m^{-1} J'_\nu(\lambda_m) = \nu(C_1 + C/2\nu) - C.$$

En ajoutant l'égalité (35) multipliée par  $H$  à (36) on a

$$(H + \nu) \left( \frac{C}{2\nu} + C_1 \right) - C = 0 \\ C_1 = C \cdot \left( \frac{1}{H + \nu} - \frac{1}{2\nu} \right).$$

En raisonnant comme dans (26) on obtient

$$a_n - \frac{1}{k_n^{(\nu)}} \int_0^1 t J_\nu(\lambda_n t) f(t) dt = D \frac{\lambda_n^\nu}{k_n^{(\nu)}} \quad (D = C/2\nu \Gamma(\nu+1))$$

Nous avons donc prouvé que la s. B. considérée diffère de  $\mathfrak{S}_B[f]$  par une série de la forme

$$(37) \quad D \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^\nu J_\nu(\lambda_m x) / k_m^{(\nu)}.$$

\*) Dans le cas de  $H + \nu \geq 0$  la série exceptionnelle (37) doit être légèrement modifiée.



La série (37) dont les coefficients sont  $O(n^{1+\nu}) = o(n^{\frac{1}{2}})$  s'obtient formellement (à un facteur près) de la série

$$(38) \quad \sum_{m=1}^{\infty} J_{\nu}(\lambda_m \xi) J_{\nu}(\lambda_m x) / h_m^{(\nu)} \quad (0 < \xi \leq 1)$$

en la divisant par  $\xi^{\nu}$  et en faisant tendre  $\xi$  vers zéro. La série (38), dont les coefficients sont  $O(\sqrt{n})$ , est sommable  $(C, 1)$  vers zéro partout, sauf pour  $x = \xi$ . La série (37) converge vers zéro pour  $0 < x \leq 1$ . Pour  $x = 0$  tous les termes sont infinis. Les raisonnements que nous venons de faire prouvent que:

Si  $-1 < \nu < -\frac{1}{2}$  toute s. B. à coefficients  $o(\sqrt{n})$ , sommable  $M$  vers zéro en dehors de  $E$ , où  $E$  est un  $U_M$  pour les s. t., est nécessairement de la forme (37). On peut éliminer les séries de la forme (37) en modifiant légèrement, pour  $-1 < \nu < -\frac{1}{2}$ , la définition des ensembles d'unicité, en supposant notamment que les coefficients des séries considérées soient  $o(n^{1+\nu})$ .

**Théorème 2'.** Toute ensemble  $E$  situé dans  $0 \leq x \leq 1$  qui est un  $U_M$  pour les s. t. l'est aussi pour les s. B. (38) à coefficients  $o(n^{1+\nu})$  ( $-\frac{1}{2} > \nu > -1$ ).

Il suffit de démontrer qu'il résulte de nos hypothèses que la constante  $C$  dans (24) est égale à zéro, car ceci entraîne  $C_1 = 0$  ce qui nous donne (26). En intégrant l'égalité (23) multipliée par  $x^{-2\nu-1}$  terme à terme dans l'intervalle  $(x_0, x)$  et ensuite faisant  $x_0$  tendre vers 0 nous obtenons

$$(39) \quad \sum_{m=1}^{\infty} a_m \lambda_m^{\nu-2} \{J_{\nu}(\lambda_m x) \lambda_m^{-\nu} x^{-\nu} - J_{\nu}(\lambda_m x_0) \lambda_m^{-\nu} x_0^{-\nu}\}_{x_0=0} \\ = - \int_0^x u^{-2\nu-1} du \int_0^u t^{1+\nu} f dt + \frac{C}{2\nu} x^{-2\nu} = (o(1) + C/2\nu) x^{-2\nu}.$$

Divisons la série du premier membre en deux parties  $A_x$  et  $B_x$  correspondant aux indices  $(1, N)$  et  $(N+1, \infty)$ , où  $N = N_x = [1/x]$ .

$$(40) \quad B_x = \sum_{m=N+1}^{\infty} a_m \lambda_m^{\nu-2} \cdot \{O(\lambda_m^{-\frac{1}{2}-\nu} x^{-\frac{1}{2}-\nu}) + O(1)\} = o(x^{-2\nu}).$$

Dans le voisinage du point  $x = 0$  nous avons

$$\{J_{\nu}(t) t^{-\nu}\}_x^x = -\frac{\alpha x^2}{4(\nu+1)} + O(x^4) \quad \left(\alpha = \frac{1}{2^{\nu} \Gamma(\nu+1)}\right).$$

Donc

$$(41) \quad A_x = -\alpha \sum_{m=1}^N a_m \lambda_m^{\nu-2} \{x^2 \lambda_m^2 / 4(\nu+1) + O(x^4 \lambda_m^4)\}$$

$$= -\frac{\alpha x^2}{4(\nu+1)} \sum_{m=1}^N a_m \lambda_m^{\nu} + O(x^4) \cdot \sum_{m=1}^N |a_m| \lambda_m^{\nu+2} \\ = -\frac{\alpha x^2}{4(\nu+1)} \sum_{m=1}^N a_m \lambda_m^{\nu} + o(x^{-2\nu}).$$

Des relations (39), (40), (41) on déduit pour  $-1 < \nu < -\frac{1}{2}$

$$-\frac{\alpha x^2}{4(\nu+1)} \sum_{m=1}^N a_m \lambda_m^{\nu} + o(x^{\frac{1}{2}-\nu}) = (C/2\nu + o(1)) x^{-2\nu} \\ (42) \quad -\frac{\alpha}{4(\nu+1)} \sum_{m=1}^N a_m \lambda_m^{\nu} = (C/2\nu + o(1)) x^{-2\nu-2}.$$

Le premier terme étant visiblement  $o(x^{-2\nu-2})$ , on a  $C = 0$ .

10. Un ensemble  $E$  situé dans  $(0, 1)$  sera nommé un  $U_M''$  pour les s. B. si toute s. B. (17) à coefficients  $o(\sqrt{n})$  sommable  $M$  en dehors de  $E$  vers une fonction finie  $f(x) \geq \varphi(x)$ , où  $\varphi(x) x^{1+\nu}$  est intégrable, est  $\mathcal{E}_B[f]$ . Pour  $-1 < \nu < -\frac{1}{2}$  cette définition doit être convenablement modifiée.

**Théorème 3.** Si  $\nu \geq -\frac{1}{2}$  tout  $E$  qui est un  $U_M''$  pour les s. t. l'est aussi pour les s. B.

**Théorème 3'.** Si  $-1 < \nu < -\frac{1}{2}$  tout  $E$  situé dans  $0 \leq x \leq 1$  qui est un  $U_M''$  pour les s. t. l'est aussi pour les s. B. à coefficients  $o(n^{1+\nu})$ .

La démonstration du théorème 3 est analogue à celle du théorème 2. En modifiant légèrement la démonstration de (24) on obtient

$$(43) \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{\lambda_m^2} x^{-\nu} J_{\nu}(\lambda_m x) = - \int_x^1 x^{-2\nu-1} \int_x^1 t^{1+\nu} f dt + \frac{C}{2\nu} x^{-2\nu} + C_1.$$

Si  $t^{1+\nu} f$  n'était pas intégrable, on aurait

$$(44) \quad \lim_{x \rightarrow +0} \int_x^1 t^{1+\nu} f dt = +\infty$$

et le second membre dans (43) serait (pour  $\nu > 0$ ) d'ordre plus élevé que  $x^{-2\nu}$ , ce qui contredit au lemme 2. De même (44) n'est pas possible pour  $-\frac{1}{2} \leq \nu \leq 0$ . Dans le cas de  $-1 < \nu < -\frac{1}{2}$  la relation (44) implique une égalité analogue à (42) où le facteur  $C + o(1)$  du second membre sera remplacé par une fonction tendant vers  $+\infty$  avec  $1/x$ .

L'intégrabilité de  $t^{1+\nu} f(t)$  établie, la démonstration des théorèmes 3 et 3' devient identique à celle des théorèmes 2, 2'.

Dans les théorèmes 2, 2', 3, 3' l'intégrale peut être considérée dans le sens de M. Lebesgue ou de M. Denjoy (au sens étroit ou large). La même méthode permet d'obtenir les théorèmes analogues où, au lieu des limites exactes (ordinaires ou généralisées), on considère les limites d'indétermination. Nous nous bornons à énoncer le théorème suivant dont la démonstration résulte du théorème analogue pour les s. t. et des raisonnements utilisés dans les théorèmes 3, 3'.

**Théorème 4.** Si pour une s. B. (17) à coefficients  $o(\sqrt{n})$  les deux fonctions

$$(45) \quad \begin{aligned} \underline{f}(x) &= \lim_{r \rightarrow 1} [a_0 C_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_{\nu}(\lambda_m x) r^m]; \\ \overline{f}(x) &= \overline{\lim}_{r \rightarrow 1} [a_0 C_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_{\nu}(\lambda_m x) r^m] \quad (\nu \geq -\frac{1}{2})^{11)} \end{aligned}$$

sont finies sauf dans un ensemble  $E$  au plus dénombrable et si  $\underline{f}(x) x^{1+\nu} \geq \varphi(x)$  où  $\varphi$  est intégrable  $L$  ou  $D$  (au sens étroit), alors  $\underline{f} \cdot x^{1+\nu}$  est intégrable et la série considérée est  $\mathcal{O}_B[\underline{f}]$ . La proposition subsiste dans le cas de  $-1 < \nu < -\frac{1}{2}$  pourvu que l'on suppose que

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m (J_{\nu}(\lambda_m x)/x^{\nu})_{x=0} \cdot r^m = o(1-r)^{-2\nu-2}.$$

### § 3.

11. Des lemmes  $\alpha, \beta$ , on déduit les théorèmes suivants:

**Théorème 5.** Si une s. B. (17) à coefficients  $o(\sqrt{n})$  est sommable  $M$  vers zéro dans tout le point d'un intervalle  $(\alpha, \beta)$  ( $0 < \alpha < \beta < 1$ ) n'appartenant pas à un ensemble  $E$  de type  $U_M$  (pour les s. t.), cette série est uniformément convergente vers zéro dans  $(\alpha + \varepsilon, \beta - \varepsilon)$ .

**Théorème 6.** Si une s. B. (17) à coefficients  $o(\sqrt{n})$  est sommable  $M$  dans un intervalle  $(\alpha, \beta)$  ( $0 < \alpha < \beta < 1$ ), sauf pour les  $x$  appartenant à un ensemble  $E$  de type  $U_M$  pour les s. t., vers une fonction  $f$  finie et intégrable dans  $(\alpha, \beta)$ , cette série est uniformément équi-convergente dans  $(\alpha + \varepsilon, \beta - \varepsilon)$  avec  $\mathcal{O}[f\lambda]$ , où  $\lambda = 1$  dans  $(\alpha + \varepsilon, \beta - \varepsilon)$  et  $\lambda = 0$  en dehors de  $(\alpha, \beta)$ , (mod 2) <sup>12)</sup>.

<sup>11)</sup> Il résulte de la formule approximative (13) que les facteurs  $r^m$  dans (45) peuvent être remplacés par  $r^{\lambda m}$ .

<sup>12)</sup> Si  $f$  est intégrable  $L$  ceci revient à dire que la série (17) est uniformément équi-convergente dans  $(\alpha + \varepsilon, \beta - \varepsilon)$  avec  $\mathcal{O}[f^*]$  où  $f^* = f$  dans  $(\alpha, \beta)$  et  $f^* = 0$  ailleurs (mod 2) (ou mod 1). De même dans le théorème 7.

**Théorème 7.** Si pour une série (17) ( $\nu > -1$ ) à coefficients  $o(\sqrt{n})$  les fonctions  $\underline{f}$  et  $\overline{f}$  (cf. (45)) sont finies dans un intervalle  $(\alpha, \beta)$  ( $0 < \alpha < \beta < 1$ ), sauf peut être dans un ensemble  $E$  au plus dénombrable, et si  $\underline{f}$  est intégrable dans  $(\alpha, \beta)$ , la série considérée est uniformément équi-convergente dans  $(\alpha + \varepsilon, \beta - \varepsilon)$  avec  $\mathcal{O}[f\lambda]$ , où  $\lambda = 1$  dans  $(\alpha + \varepsilon, \beta - \varepsilon)$  et  $\lambda = 0$ , en dehors de  $(\alpha, \beta)$  (mod 2) <sup>13)</sup>.

Dans la démonstration de ces théorèmes nous nous servons de l'équi-convergence des séries considérées avec des s. t. Cette équi-convergence résulte de la formule asymptotique pour  $J_{\nu}(\lambda_m x)$ . Maintenant il suffit de remarquer que la formule asymptotique analogue a lieu pour toutes les valeurs de  $\nu$  ( $-\infty < \nu < \infty$ ).

Elle a lieu aussi pour  $J_{\mu}(\lambda x)$ ,  $Y_{\mu}(\lambda_m x)$  etc. où  $\{\lambda_m\}$  désignent les racines positives de (3) et  $\mu \leq \nu$  ( $Y_{\mu}$  désigne la fonction de Bessel de seconde espèce, (voir le § 4).

Les théorèmes analogues aux théorèmes 5, 6, 7 ont donc lieu pour les séries plus générales que (17).

### § 4.

#### 12. L'équation différentielle de Bessel

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

possède, outre l'intégrale  $y = J_{\nu}(x)$ , une autre intégrale (linéairement indépendante) qu'on appelle généralement fonction de Bessel de seconde espèce. Il y a beaucoup de définitions des fonctions de seconde espèce. La plus commode a été proposée par Weber

$$(46) \quad Y_{\nu}(x) = \frac{J_{\nu}(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi}.$$

On a la formule asymptotique suivante <sup>15)</sup>

$$(47) \quad \begin{aligned} Y_{\nu}(x) = & \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ \sin \left( x - \frac{1}{2} \nu\pi - \frac{1}{4}\pi \right) \left( A_0 + \frac{A_2}{x^2} + \dots + \frac{A_{2p-2}}{x^{2p-2}} + O(x^{-2p}) \right) \right. \\ & \left. - \cos \left( x - \frac{1}{2} \nu\pi - \frac{1}{4}\pi \right) \left( \frac{B_1}{x} + \frac{B_3}{x^3} + \dots + \frac{B_{2p-1}}{x^{2p-1}} + O(x^{-2p-1}) \right) \right\} \end{aligned}$$

<sup>13)</sup> Si les coefficients de la série (17) sont  $o(n^{\frac{1}{2}-\gamma})$  ( $0 < \gamma < 1$ ), on peut remplacer dans les théorèmes 5, 6, 7 l'équi-convergence par l'équiosommabilité  $(C, -\gamma)$ . Ceci résulte du fait qu'on peut remplacer dans le lemme  $\alpha$  l'équi-convergence par l'équiosommabilité  $(C, -\gamma)$  pourvu

que  $a_m = o(m^{\frac{1}{2}-\gamma})$  (cf. (19)).

<sup>14)</sup> Cf. Watson [1], p. 67.

<sup>15)</sup> Watson [1], p. 199.



où les constantes  $A, B$  sont les mêmes que dans la formule (10<sub>v</sub>). En prenant dans cette formule  $p=1$  et en se servant de la formule (13) pour les racines positives de l'équation (3), on obtient l'équation analogue à (14<sub>v</sub>)

$$(48_v) \quad Y_v(\lambda_m x) = \sqrt{\frac{2}{\pi m x}} \left\{ \sin((m+k)\pi x + \varphi) - \frac{\beta(x)}{m} \cos((m+k)\pi x + \varphi) + \frac{r_m(x)}{m^2} \right\},$$

où  $r_m(x) = O(1)$ ,  $r'_m(x) = O(m)$  uniformément dans tout intervalle  $(\varepsilon, 1)$  ( $\varepsilon > 0$ ).

La comparaison des expressions (47<sub>v</sub>) avec (10<sub>v</sub>) et (48<sub>v</sub>) avec (14<sub>v</sub>) justifie la définition suivante: étant donnée une série (17), où les  $\lambda_k$  sont des racines positives de l'équation (3), nous appelons la série

$$(49) \quad \sum_{m=1}^{\infty} a_m Y_v(\lambda_m x)$$

conjuguée à (17). La situation est complètement analogue à celle que nous avons rencontré dans la théorie de polynômes de Legendre.

Nous pouvons donc nous dispenser de la démonstration des deux propositions suivantes qui sont complètement analogues au lemme 1 et au théorème 12 du Chapitre III de la première partie du travail.

Lemme  $\mu$ . Considérons deux s. t. conjuguées:

$$(50) \quad \frac{1}{2} A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \cos m\pi x + B_m \sin m\pi x),$$

$$(51) \quad \sum_{m=1}^{\infty} (B_m \sin m\pi x - A_m \cos m\pi x)$$

à coefficients tendant vers zéro. Si les séries (17) et (50) sont uniformément équiconvergentes dans un intervalle  $(\alpha, \beta)$  ( $0 < \alpha < \beta < 1$ ), leurs conjuguées (49) et (51) sont uniformément équiconvergentes au sens large dans tout l'intervalle  $(\alpha + \varepsilon, \beta - \varepsilon)$  ( $\varepsilon > 0$ ).

**Théorème 8.** Si une s. B. (17) à coefficients  $o(\sqrt{n})$  converge vers zéro dans un intervalle  $(\alpha, \beta)$  ( $0 < \alpha < \beta < 1$ ), sa conjuguée (49) converge uniformément dans  $(\alpha + \varepsilon, \beta - \varepsilon)$  ( $\varepsilon > 0$ ).

12. Pour les s. B. (1) à coefficients  $o(n^{\frac{1}{2}})$  on peut obtenir une formule analogue à celle de Riemann pour les s. t. (cf. Chap. I, § 4 de la première partie de ce travail). La démonstration étant presque la même que dans le cas de s. L. nous nous bornons d'écrire le résultat:

$$\sum_{k=1}^N a_k J_v(\lambda_k x) - \left\{ (1-\nu^2) \frac{\bar{\Phi}(x)}{x} + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\lambda(u)}{u} \bar{\Phi}(u) K'_N(x-u) du + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \lambda(u) \bar{\Phi}(u) K''_N(x-u) du \right\} \rightarrow 0 \quad (\alpha' < x < \beta'; N \rightarrow \infty)$$

où la fonction  $\lambda(x)$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) est suffisamment régulière, égale à 1 dans  $(\alpha', \beta')$  et à 0 en dehors de  $(\alpha, \beta)$  ( $0 < \alpha < \alpha' < \beta' < \beta < 1$ ), et

$$\bar{\Phi}(x) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\lambda_k} J_v(\lambda_k x), \quad K_N(x) = \sin(N + \frac{1}{2})x/2 \sin \frac{1}{2}x.$$

13. Les raisonnements de ce chapitre peuvent être aussi appliqués aux séries dites de Schlömilch. Bornons nous au cas (le plus simple) des séries d'ordre zéro:

$$(S) \quad \frac{1}{2} a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_0(mx) \quad a_m = o(m^{\frac{1}{2}}), \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

et soit  $E$  un  $U_{M^*}$  pour les s. t. Supposons de plus que  $E$  soit situé à l'intérieur de l'intervalle  $(0, \pi)$ . Il est facile de prouver qu'avec cette restriction  $E$  est un  $U_{M^*}$  pour les séries (S).

En effet, supposons qu'une série (S) soit sommable  $M$  vers zéro en dehors de  $E$ . Comme, pour tout  $0 < \varepsilon < 1$ , il existe des s. t. uniformément équiconvergentes dans  $(\varepsilon, 1)$  avec (S), il en résulte (cf. les raisonnements analogues pour les s. B) que nous avons les égalités suivantes:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} a_0 x + \sum_{m=1}^{\infty} a_m x J_0(mx) &= 0 & (x \in E) \\ \frac{1}{2} a_0 x^2 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m} x J_1(mx) &= C \\ \frac{1}{2} a_0 x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m} J_1(mx) &= C/x \\ \frac{1}{2} a_0 x^2 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^2} J_0(mx) &= C \log x + D. \end{aligned} \right\} \quad (0 < x < \pi)$$

$C$  et  $D$  désignant des constantes. D'ailleurs  $C=0$ , la dernière série convergérant uniformément dans  $(0, \pi)$ . Nous avons donc l'égalité

$$(51) \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^2} J_0(mx) = \frac{1}{2} a_0 x^2 - D.$$

En profitant de la relation

$$\frac{\sin x}{x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} J_0(x \sin \theta) \sin \theta d\theta^{(1)},$$

nous obtenons de (51)

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^2} \sin mx = -Dx + \frac{1}{2} a_0 x^2.$$

En développant le second membre en série de sinus et en comparant les coefficients on obtient que  $a_m = (-1)^m a_0$ , c'est à dire que la série (S) considérée est nécessairement de la forme

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m a_0 J_0(mx).$$

<sup>(1)</sup> Watson, [1].

Cette dernière série diverge pour  $x = \pi$  vers  $+\infty$  si  $\alpha_0 \neq 0$ . On a donc  $\alpha_0 = 0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \dots$  et notre assertion est démontrée.

## Chapitre II.

### Polynômes de Jacobi.

#### § 1.

1. Nous les désignerons par  $P_n^{\alpha, \beta}(x)$  (souvent par  $P_n(x)$ , ou même par  $P_n$ ). Il existe plusieurs définitions (équivalentes) de ces polynômes<sup>1)</sup>. On peut les définir (à un facteur constant près) par les conditions que  $P_n^{\alpha, \beta}(x)$  soit exactement de degré  $n$  et que  $2^0$ , pour  $m, n = 0, 1, 2, \dots$ :

$$(1) \quad \begin{aligned} \int_{-1}^{+1} p(t) P_n^{\alpha, \beta}(t) P_m^{\alpha, \beta}(t) dt &= 0 & (m \neq n) \\ \int_{-1}^{+1} p(t) [P_n^{\alpha, \beta}(t)]^2 dt &= k_n \neq 0, \end{aligned}$$

où  $p(t) = p(t; \alpha, \beta) = (1-t)^\alpha (1+t)^\beta$  ( $\alpha, \beta > -1$ ).

Les polynômes  $P_n^{\alpha, \beta}(x)$  vérifient l'équation différentielle

$$(1-x^2)y'' - [( \alpha - \beta ) + ( \alpha + \beta + 2 )x]y' + n(n + \alpha + \beta + 1)y = 0,$$

sont donc égaux — à un facteur constant près — à

$$F\left(-n, n + \alpha + \beta + 1, \alpha + 1, \frac{1-x}{2}\right),$$

$F$  désignant la fonction hypergéométrique.

Les polynômes

$$(1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta}] \quad (\alpha, \beta > 1, n = 0, 1, 2, \dots)$$

vérifiant les conditions (1), ils ne diffèrent des polynômes de Jacobi que par des facteurs constants. En choisissant ces facteurs comme dans la formule bien connue de Rodrigues pour les polynômes de Legendre, c'est à dire en définissant les polynômes de Jacobi par la formule

$$(2) \quad P_n^{\alpha, \beta}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta}]$$

on a la fonction génératrice de ces polynômes de la forme:

<sup>1)</sup> On peut trouver toutes ces définitions (légèrement modifiées) et beaucoup de propriétés des  $P_n^{\alpha, \beta}$  dans le mémoire de Darboux [1]. Voir aussi Pólya et Szegő [1].

$$(3) \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} P_{\nu}^{\alpha, \beta}(x) r^{\nu} = \frac{2^{\alpha+\beta}}{\sqrt{1-2rx+r^2}} (1-r + \sqrt{1-2rx+r^2})^{-\alpha} (1+r + \sqrt{1-2rx+r^2})^{-\beta}.$$

De la définition (2) il résulte (cf. (1)):

$$(4) \quad k_n = k_n(\alpha, \beta) = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n + \alpha + \beta + 1} \frac{\Gamma(n + \alpha + 1) \Gamma(n + \beta + 1)}{\Gamma(n + \alpha + \beta + 1) \Gamma(n + 1)} \sim \frac{2^{\alpha+\beta}}{n}.$$

Si les coefficients  $a_n$  dans la série de Jacobi (ou s. J.)

$$(5) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n^{\alpha, \beta}(x) \quad (-1 \leq x \leq 1; \alpha, \beta > -1)$$

sont donnés par la formule

$$(6) \quad a_n = \frac{1}{k_n} \int_{-1}^{+1} f(t) p(t) P_n^{\alpha, \beta}(t) dt,$$

où  $f(t)p(t)$  est intégrable dans  $(-1, 1)$ , nous désignons cette série par  $\mathcal{E}_f[f]$ . On pourrait démontrer que, si  $fp$  est intégrable  $L$  dans  $(-1, 1)$ , on a  $a_n = O(n^{\gamma+1})$  où  $\gamma = \text{Max}(\alpha, \beta)$ , pourvu que  $\gamma \geq -\frac{1}{2}$  (pour  $-1 < \gamma < -\frac{1}{2}$  ceci n'est pas vrai) mais cette proposition est insuffisante pour nos buts. Un peu plus loin nous démontrerons une proposition (cf. lemme  $\nu$ ), qui, bien que moins générale d'un certain point de vue, nous fournit cependant plus d'informations sur l'influence des deux nombres  $\alpha, \beta$  sur l'ordre de grandeur des  $a_n$ .

2. Dans la suite nous aurons besoin de deux formules récurrentes. La première d'eux

$$(7) \quad P_n = \xi_n P_{n+1} + \eta_n P_n + \zeta_n P_{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

où

$$(8) \quad \begin{aligned} \xi_n &= \frac{2(n + \alpha + \beta + 1)}{(2n + \alpha + \beta + 1)(2n + \alpha + \beta + 2)}, \\ \eta_n &= \frac{2(\alpha - \beta)}{(2n + \alpha + \beta)(2n + \alpha + \beta + 2)}, \\ \zeta_n &= -\frac{2(n + \alpha)(n + \beta)}{(n + \alpha + \beta)(2n + \alpha + \beta)(2n + \alpha + \beta + 1)} \end{aligned}$$

se trouve démontrée dans le mémoire de Darboux. (Si  $\alpha + \beta + 1 = 0$  la formule pour  $\xi_1$  est dépourvue de sens, mais ceci n'a aucune importance car  $P'_0(x) = 0$ ).

Posons

$$(9) \quad P_n^* = p P_n = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta}].$$

La seconde des formules en question est

$$(10) \quad \bar{P}_n^* = \alpha_n \bar{P}_{n+1}^* + \beta_n \bar{P}_n^* + \gamma_n \bar{P}_{n-1}^* \quad (n=1, 2, \dots)$$

où

$$(11) \quad \begin{aligned} \alpha_n &= \frac{2(n+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)}, \\ \beta_n &= \frac{2(\beta-\alpha)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)}, \\ \gamma_n &= -\frac{2(n+\alpha)(n+\beta)}{n(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)}. \end{aligned}$$

La formule (10)–(11) est probablement connue bien qu'il m'est impossible de donner une citation. La démonstration ne présente aucune difficulté: il suffit de remarquer que le second membre dans (10) est de la forme

$$\frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{n+\alpha-1} (1+x)^{n+\beta-1} T(x)],$$

$T$  désignant un polynôme de deuxième degré à coefficients dépendant de  $n, \alpha, \beta, \alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ . Les nombres  $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$  doivent être choisis de telle façon que  $T$  soit de la forme  $\text{Const.}(1-x^2)$ , ce qui nous donne (11).

De la formule (3) on déduit que

$$(12) \quad P_n^{(\alpha, \beta)}(1) = A_n^{(\alpha)}, \quad P_n^{(\alpha, \beta)}(-1) = (-1)^n A_n^{(\beta)}.$$

À l'intérieur de  $(0, \pi)$  on a l'évaluation asymptotique suivante:

$$(13) \quad \begin{aligned} P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta) &= A_n^{(-\frac{1}{2})} \sqrt{\frac{2}{\sin \theta}} \cdot \left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^{-\alpha} \left(\cos \frac{\theta}{2}\right)^{-\beta} \\ &\cdot \left\{ \cos \left[ \left( n + \frac{\alpha + \beta + 1}{2} \right) \theta - \frac{\pi}{2} \left( \alpha + \frac{1}{2} \right) \right] + \frac{r_n(\theta)}{n} \right\} \end{aligned}$$

ou, plus précisément,

$$(14) \quad \begin{aligned} P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta) &= \frac{A_n^{(-\frac{1}{2})}}{\left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^{\alpha + \frac{1}{2}} \left(\cos \frac{\theta}{2}\right)^{\beta + \frac{1}{2}}} \cdot \\ &\cdot \left\{ \left( 1 - \frac{(2\alpha+1)(2\beta+1)}{4(2n-1)} \right) \cos \left[ \left( n + \frac{\alpha + \beta + 1}{2} \right) \theta - \frac{\pi}{2} \left( \alpha + \frac{1}{2} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{1}{2(2n-1)} \left[ \left( \beta^2 - \frac{1}{4} \right) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \left( \alpha^2 - \frac{1}{4} \right) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \right] \sin \left[ \left( n + \frac{\alpha + \beta + 1}{2} \right) \theta \right. \\ &\quad \left. - \frac{\pi}{2} \left( \alpha + \frac{1}{2} \right) \right] + \frac{Q_n(\theta)}{n^2} \Bigg\}^2 \end{aligned}$$

Les fonctions  $r_n(\theta)$  et  $Q_n(\theta)$  dans ces formules sont uniformément bornées dans tout intervalle  $(\varepsilon, \pi - \varepsilon)$ . Les dérivées  $Q'_n(\theta)$  y sont uniformément  $O(n)^{-1}$ .

En posant dans (2)  $\alpha = \beta = 0$  on obtient comme un cas très spécial les polynômes de Legendre. En y posant  $\alpha = \beta$  on obtient une autre classe spéciale de polynômes qu'on appelle ultrasphériques et dont les propriétés sont plus simples que celles des polynômes de Jacobi. Plus précisément, on définit les polynômes ultrasphériques  $U_n^\lambda(x)$  par l'égalité

$$U_n^\lambda(x) = \frac{A_n^{(2\lambda-1)}}{A_n^{(\lambda-\frac{1}{2})}} P_n^{2\lambda-\frac{1}{2}, \lambda-\frac{1}{2}}(x). \quad (\lambda > -\frac{1}{2}, \lambda \neq 0)$$

Ils possèdent la fonction génératrice très simple

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n^\lambda(x) r^n = (1 - 2rx + r^2)^{-\lambda},$$

ce qui permet d'obtenir facilement (en se servant de la méthode de Darboux, ou bien de celle de Stieltjes) leurs expressions asymptotiques \*).

## § 2.

3. Lemme  $\nu$ . Soit  $f(t)$  une fonction définie dans  $(-1, 1)$  et telle que  $f p$  y soit intégrable. Soit  $A_0, A_1, \dots$  la suite des coefficients de Fourier de  $f$ .

Posons pour  $0 \leq r < 1$ :

$$(15) \quad A(r) = (1-r) \sum_{n=0}^{\infty} A_n k_n r^n, \quad B(r) = (1-r) \sum_{n=0}^{\infty} B_n k_n r^n$$

où  $B_n = (-1)^n A_n$ . On alors pour  $r \rightarrow +1$

$$(16) \quad A(r) = o(1-r)^{-\alpha}, \quad B(r) = o(1-r)^{-\beta}.$$

En désignant par  $J(r, x)$  l'expression (3) on déduit de (6) que

$$(17) \quad A(r) = (1-r) \int_{-1}^{+1} f(t) p(t) J(r, t) dt, \quad B(r) = (1-r) \int_{-1}^{+1} f(t) p(t) J(-r, t) dt$$

En supposant que  $a_0 = 0$  et en posant

\* Darboux [1].

\* Darboux [1] p. 53.

\* Voir Hermite et Stieltjes [1], t. 2, p. 115, E. Kogbetliantz [1], p. 133.

$$F(t) = \int_{-1}^t p(u) f(u) du = - \int_t^1 p(u) f(u) du,$$

nous obtenons

$$A(r) = -(1-r) \int_{-1}^1 F(t) \frac{d}{dt} J(r, t) dt.$$

Comme la fonction continue  $F(t)$  disparaît pour  $t = \pm 1$  et comme  $J_i(r, t)$  est uniformément bornée dans  $(-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon)$  quelque petit que soit  $\varepsilon > 0$ , il suffit, pour démontrer la première des formules (16), de prouver que

$$(18) \quad (1-r) \int_{-1}^1 \left| \frac{d}{dt} J(r, t) \right| dt = O(1-r)^{-\alpha}.$$

Mais

$$(19) \quad \frac{d}{dt} J(r, t) = \frac{r}{\Delta^{3/2}} (1-r + \sqrt{\Delta})^{-\alpha} (1+r + \sqrt{\Delta})^{-\beta} + \frac{\alpha r}{\Delta} (1-r + \sqrt{\Delta})^{-\alpha-1} (1+r + \sqrt{\Delta})^{-\beta} + \frac{\beta r}{\Delta} (1-r + \sqrt{\Delta})^{-\alpha} (1+r + \sqrt{\Delta})^{-\beta-1}.$$

$$(\Delta = 1 - 2rt + r^2)$$

Dans le cas de  $\alpha, \beta \geq 0$ , l'expression (19) étant positive, le membre gauche dans (18) est égale à

$$(1-r) \int_{-1}^1 \frac{d}{dt} J(r, t) dt = (1-r) [J(r, 1) - J(r, -1)] = O(1-r)^{-\alpha}.$$

Si l'un au moins des nombres  $\alpha, \beta$  est négatif le raisonnement ne s'applique pas. Nous prouverons que dans ce cas

$$(20) \quad (1-r) \int_{-1}^1 |Q_i| dt = O(1-r)^{-\alpha}, \quad i = 1, 2, 3$$

$Q_1, Q_2, Q_3$ , désignant respectivement le premier, deuxième et troisième terme du second membre dans (19). En tenant compte que l'expression  $(1+r + \sqrt{\Delta})^{-\beta}$  est uniformément bornée ( $\leq C$ ) pour  $-1 \leq t \leq 1$ ,  $0 \leq r \leq 1$ , nous avons

$$\int_{-1}^1 |Q_1| dt = \int_{-1}^0 + \int_0^1 \leq O(1) + C \int_0^1 \frac{(1-r + \sqrt{\Delta})^{-\alpha}}{\Delta^{3/2}} dt.$$

Dans les cas  $\alpha \geq 0$  et  $\alpha < 0$  nous avons respectivement que le dernier terme est

$$\begin{cases} (a \geq 0) & \left\{ \begin{aligned} & \leq C(1-r)^{-\alpha} \int_0^1 \frac{dt}{[(1-r)^2 + 2rt]^{3/2}} \\ & = C(1-r)^{-\alpha} \int_0^1 \frac{dt}{[(1-r)^2 + 2rt]^{3/2}} = C(1-r)^{-\alpha} \left[ \int_0^{(1-r)^2} + \int_{(1-r)^2}^1 \right] \\ & < C(1-r)^{-\alpha} \left[ \int_0^{(1-r)^2} \frac{dt}{(1-r)^2} + \frac{1}{(1-r)^{3/2}} \int_{(1-r)^2}^1 \frac{dt}{t^{3/2}} \right] = O(1-r)^{-\alpha-1}. \end{aligned} \right. \\ (-1 < a < 0) & \left\{ \begin{aligned} & \leq C \int_0^1 \frac{(1-r + \sqrt{\Delta})^{-\alpha}}{\Delta^{3/2}} dt = 2^{-\alpha} C \int_0^1 \frac{dt}{\Delta^{3/2 + \frac{\alpha}{2}}} \\ & < 2^{-\alpha} C \left[ \int_0^{(1-r)^2} \frac{dt}{(1-r)^{3+\alpha}} + \frac{1}{(2r)^{\frac{3}{2} + \frac{\alpha}{2}}} \int_{(1-r)^2}^1 \frac{dt}{t^{\frac{3}{2} + \frac{\alpha}{2}}} \right] = O(1-r)^{-\alpha-1}. \end{aligned} \right. \end{cases}$$

D'une manière analogue on vérifie (20) pour  $i = 2, 3$ .

La seconde inégalité (16) résulte de la première si l'on remarque que  $J(-r, t)$  s'obtient de  $J(r, t)$  si l'on y remplace  $t$  par  $-t$ ,  $\alpha$  par  $\beta$  et réciproquement.

4. Lemme 5. Supposons qu'une série (5), à coefficients  $o(\sqrt{n})$ , intégrée terme à terme devienne uniformément convergente dans  $(-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon)$  quelque soit  $\varepsilon > 0$ , vers l'intégrale d'une fonction  $f$ :

$$(21) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x P_n(t) dt = \int_0^x f dt,$$

telle que  $f(t)p(t)$  soit intégrable dans  $(-1, 1)$ . Alors si  $\alpha, \beta \geq -\frac{1}{2}$  la série en question est  $\mathcal{O}_J[f]$ . Si l'un au moins des nombres  $\alpha, \beta$  est  $< -\frac{1}{2}$ , elle diffère de  $\mathcal{O}_J[f]$  par une série convergente vers zéro à l'intérieur de  $(-1, 1)$  et de la forme  $C_1 S_1 + C_2 S_2$ , où  $S_1$  et  $S_2$  sont données par les formules (33), (34). Si  $\alpha \geq -\frac{1}{2}$  on a  $C_1 = 0$ ; si  $\beta \geq -\frac{1}{2}$  on a  $C_2 = 0$ .

En effet, d'après (7) et (8), le premier membre de (21) est égal à

$$(22) \quad a_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\xi_n P_{n+1} + \eta_n P_n + \zeta_n P_{n-1})_0 = a_0 \xi_0 (P_1)_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\xi_n P_{n+1} + \eta_n P_n + \zeta_n P_{n-1})_0 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n (P_n)_0 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n P_n,$$

où

$$(23) \quad b_n = a_{n-1} \xi_{n-1} + a_n \eta_n + a_{n+1} \zeta_{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots); \quad b_0 = - \sum_{n=1}^{\infty} b_n P_n(0).$$

Désignons par  $F$  le second membre dans (21). Comme  $b_n = o(n^{-1/2})$ , on déduit du théorème de Riesz-Fischer que la série à termes  $b_n P_n$  est  $\mathcal{S}_1[F]$ . Pour  $n = 1, 2, \dots$  on a donc (cf. (10), (11))

$$(24) \quad b_n = \frac{1}{k_n} \int_{-1}^{+1} F \cdot P_n^* dt = \frac{1}{k_n} \int_{-1}^{+1} F \cdot (\alpha_n P_{n+1}' + \beta_n P_n' + \gamma_n P_{n-1}') dt.$$

$$(25) \quad b_n \cdot k_n = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{ [F \cdot (\alpha_n P_{n+1}' + \beta_n P_n' + \gamma_n P_{n-1}')]_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} - \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} f \cdot (\alpha_n P_{n+1}' + \beta_n P_n' + \gamma_n P_{n-1}') dt \}.$$

Considérons les trois cas 1°  $\alpha, \beta > 0$ ; 2°  $\alpha > 0, -1 < \beta \leq 0$ ; 3°  $-1 < \alpha \leq 0, \beta > 0$ .

Nous allons montrer que dans ces cas le premier terme sous le signe de limite tend vers zéro avec  $\varepsilon$ . Posons

$$(26) \quad \left. \begin{aligned} B_i(\varepsilon) &= F(1-\varepsilon) \cdot P_i^*(1-\varepsilon) = O(\varepsilon^\alpha) \cdot F(1-\varepsilon) \\ C_i(\varepsilon) &= F(-1+\varepsilon) \cdot P_i^*(-1+\varepsilon) = O(\varepsilon^\beta) \cdot F(-1+\varepsilon) \end{aligned} \right\} (i=0, 1, 2, \dots).$$

Dans les cas 1°, 2° on a

$$B_i(\varepsilon) = O(\varepsilon^\alpha) \int_0^{1-\delta} f(t) dt + O(\varepsilon^\alpha) \int_{1-\delta}^{1-\varepsilon} f(t) dt \quad (0 < \varepsilon < \delta < 1).$$

Le premier terme du second membre tend vers zéro avec  $\varepsilon$  quelque petit (mais fixe) que soit  $\delta$ . En appliquant le second théorème de la moyenne on a pour  $\delta$  suffisamment petit

$$\left| \varepsilon^\alpha \int_{1-\delta}^{1-\varepsilon} f(t) (1-t)^\alpha (1-t)^{-\alpha} dt \right| = \left| \int_{\xi}^{1-\varepsilon} f(t) (1-t)^\alpha dt \right| \leq \eta \quad (1-\delta < \xi < 1-\varepsilon)$$

$\eta$  désignant une quantité positive donnée d'avance. D'une façon analogue on prouve dans les cas 1°, 3° que  $C_i(\varepsilon) \rightarrow 0$ . Considérons maintenant l'expression  $B_i(\varepsilon)$  dans le cas 3°. Dans ce cas l'intégrabilité de  $f \cdot p$  dans  $(0, 1)$  entraîne celle de  $f$ . Sans restreindre la généralité des raisonnements nous pouvons supposer (en changeant s'il est nécessaire la valeur de  $a_0$ ) que  $F(1) = 0$ . Alors

$$|B_i(\varepsilon)| = O(\varepsilon^\alpha) \left| \int_{1-\varepsilon}^1 f \cdot (1-t)^\alpha (1-t)^{-\alpha} dt \right| = O(1) \cdot \int_{1-\varepsilon}^1 f \cdot (1-t)^\alpha dt < \eta$$

pour  $\varepsilon$  suffisamment petit. De même on prouve que  $C_i(\varepsilon) \rightarrow 0$  dans le cas 2°. En résumant: dans les trois cas énoncés plus haut on a

$$(27) \quad b_n = -\frac{1}{k_n} \int_{-1}^1 f \cdot (\alpha_n P_{n+1}' + \beta_n P_n' + \gamma_n P_{n-1}') dt \quad (n=1, 2, \dots).$$

Cette égalité subsiste dans le cas 4°  $-1 < \alpha, \beta \leq 0$ . En effet, dans ce cas  $f$  est intégrable dans  $(-1, 1)$ . En posant donc

$$F_1(x) = \int_{-1}^x f dt = \int_{-1}^0 f dt + F(x),$$

nous pouvons supposer — en changeant  $a_0$  s'il est nécessaire — que  $F_1(1) = 0 = F_1(-1)$ . Dans la formule (24) nous pouvons remplacer  $F$  par  $F_1$  car toute constante est orthogonale à  $P_n^*$  ( $n=1, 2, \dots$ ). De même  $F_1$  remplacera  $F$  dans (25) et on voit que la formule (27) a lieu.

En posant

$$(28) \quad A_i = \frac{1}{k_i} \int_{-1}^{+1} f P_i^* dt \quad (i=0, 1, 2, \dots)$$

nous pouvons écrire l'égalité (27) sous la forme

$$-b_n = \frac{k_{n+1}}{k_n} \alpha_n A_{n+1} + \beta_n A_n + \frac{k_{n-1}}{k_n} \gamma_n A_{n-1} = -\zeta_{n+1} A_{n+1} - \eta_n A_n - \xi_{n-1} A_{n-1}.$$

En posant  $\delta_n = a_n - A_n$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ) nous avons donc une suite d'équations:

$$(29) \quad \zeta_{n+1} \delta_{n+1} + \eta_n \delta_n + \xi_{n-1} \delta_{n-1} = 0 \quad (n=1, 2, \dots).$$

Il est facile d'indiquer deux solutions de ces équations:

$$(30) \quad \begin{aligned} \delta'_n &= \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(n+\beta+1)} (2n+\alpha+\beta+1) \sim 2n^{\alpha+1} \\ \delta''_n &= (-1)^n \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} (2n+\alpha+\beta+1) \sim 2 \cdot (-1)^n \cdot n^{\beta+1}. \end{aligned}$$

Le déterminant des quatre nombres  $\delta'_0, \delta'_1, \delta''_0, \delta''_1$  étant différent de zéro ( $\alpha, \beta > -1$ ), la solution générale du système (29) est de la forme  $C_1 \delta'_n + C_2 \delta''_n$  ( $C_1$  et  $C_2$  étant des constantes arbitraires). Il en résulte que (en posant  $B_n = (-1)^n A_n$ ,  $b_n = (-1)^n a_n$ )

$$(31) \quad (1-r) \sum_{n=0}^{\infty} k_n a_n r^n = (1-r) \sum_{n=0}^{\infty} k_n A_n r^n + C_1 (1-r) \sum_{n=0}^{\infty} \delta'_n k_n r^n \\ + C_2 (1-r) \sum_{n=0}^{\infty} \delta''_n k_n r^n.$$

$$(32) \quad (1-r) \sum_{n=0}^{\infty} k_n b_n r^n = (1-r) \sum_{n=0}^{\infty} k_n B_n r^n + C_1 (1-r) \sum_{n=0}^{\infty} \delta'_n (-1)^n k_n r^n \\ + C_2 (1-r) \sum_{n=0}^{\infty} \delta''_n (-1)^n k_n r^n.$$

En tenant compte des égalités (4), (30) et du lemme  $\nu$  on peut écrire (31) sous la forme:

$$o(1-r)^{\frac{1}{2}} = o(1-r)^{-\alpha} + (C_3 + o(1))(1-r)^{-\alpha} + O(1-r)$$

où  $C_3$  diffère de  $C_1$  par un facteur numérique différent de zéro. Si  $\alpha \geq -\frac{1}{2}$  il en résulte que  $C_3 = 0$ , c'est-à-dire  $C_1 = 0$ . De même on déduit de l'égalité (32) que  $C_2 = 0$  pourvu que  $\beta \geq -\frac{1}{2}$ .

Les séries

$$(33) \quad S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \delta'_n P_n^{\alpha, \beta}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(n+\beta+1)} (2n+\alpha+\beta+1) P_n^{\alpha, \beta}(x)$$

$$(34) \quad S_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \delta''_n P_n^{\alpha, \beta}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} (2n+\alpha+\beta+1) P_n^{\alpha, \beta}(x)$$

(dont une combinaison linéaire

$$(35) \quad C_1 S_1 + C_2 S_2$$

représente la différence entre la série étudiée (5) et  $\mathcal{S}_\gamma[f]$  s'obtiennent (aux facteurs constants près) de la série

$$(35a) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(x) P_n(\xi)}{k_n},$$

en y substituant respectivement  $\xi = 1$  et  $\xi = -1$ . Si  $-1 < \alpha < -\frac{1}{2}$  on déduit de la formule (14) que la série (33) converge uniformément dans tout intervalle  $(-1+\varepsilon, 1-\varepsilon)$ . Etant de la forme (35a) elle y converge vers zéro<sup>5)</sup>.

<sup>5)</sup> Voir la première partie de ce travail, pp. 128 et 129.

Pour  $x = 1$  la série (33) diverge vers  $+\infty$ . Si  $-1 < \beta < -\frac{1}{2}$  on vérifie qu'elle converge vers zéro aussi dans le point  $x = -1$ . Le lemme  $\xi$  est donc complètement démontré.

5. De la formule (14) on déduit la proposition suivante.

Lemme  $\sigma$ . Soit  $\varphi(\theta)$  une fonction continue avec quelques unes de ses dérivées. Etant donnée une série de la forme

$$(36) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n^{\alpha, \beta}(\cos \theta) \varphi(\theta)$$

et un nombre  $\delta$  ( $0 < \delta < \pi/2$ ), il existe une s. t.

$$(37) \quad \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta), \quad A_n^2 + B_n^2 \rightarrow 0$$

uniformément équiconvergente avec (36) dans l'intervalle  $(\delta, \pi - \delta)$ .

La démonstration de cette proposition est analogue à celle du lemme  $\eta$  (Chap. III de la première partie de ce travail).

### § 3.

6. Un ensemble  $E$  situé dans l'intervalle  $-1 \leq x \leq 1$  est un  $U$  (plus précisément, un  $U(\alpha, \beta)$ ) pour les séries (5), si toute série (5) convergente vers zéro en dehors de  $E$  possède tous ses coefficients égaux à zéro. En remplaçant dans cette définition convergence par sommabilité  $M$  et en ajoutant la condition que les coefficients des séries considérées soient  $o(n^{\frac{1}{2}})$  on obtient la définition des ensembles  $U_M$ . Pareillement on définit des ensembles  $U'_M$ ,  $U''_M$ , en supposant que l'expression  $(1-x)^\alpha (1+x)^\beta f(x)$  ( $f(x)$  désignant la somme de la série en dehors de  $E$ ) soit intégrable, resp. plus grande qu'une fonction intégrable.

Theorème 1. Si  $\alpha, \beta \geq -\frac{1}{2}$  et si un ensemble  $E^*$  est un  $U_M$  (resp.  $U'_M$ ) pour les s. t. il est un  $U_M$  (resp.  $U'_M$ ) pour les s. J. <sup>6)</sup>.

Nous nous bornons aux ensembles  $U'_M$ . Soit

$$(38) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n^{\alpha, \beta}(\cos \theta)$$

une série à coefficients  $o(\sqrt{n})$ , sommable  $M$  en dehors de  $E^*$  vers une fonc-

<sup>6)</sup> Comme dans le cas des polynômes de Legendre nous utilisons une astérisque pour marquer qu'un ensemble appartient à l'intervalle  $0 \leq \theta \leq \pi$ . La même lettre sans astérisque désigne l'ensemble correspondant de l'intervalle  $-1 \leq x \leq 1$  ( $x = \cos \theta$ ). Un ensemble  $E^*$  est par définition, un  $U_M$  (resp.  $U'_M$ ) si  $E$  est un  $U_M$  (resp.  $U'_M$ ).



tion  $f(\cos \theta)$ , telle que  $f(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$  soit intégrable dans l'intervalle  $(-1, 1)$ . Du lemme 6 il résulte que, pour tout  $0 < \delta < \pi/2$ , il existe une s. t. (37) uniformément équi-convergente dans  $(\delta, \pi - \delta)$  avec

$$(39) \quad \sin \theta \sum_{n=0}^{\infty} a_n P^{\alpha, \beta}(\cos \theta).$$

La série (37), donc aussi (39), peut être intégrée terme à terme vers l'intégrale de  $f(\cos \theta) \sin \theta$ . Les prémisses du lemme 6 étant vérifiées on en déduit que la série (38) (pour  $\cos \theta = x$ ) est  $\mathcal{E}_f[f]$ .

Le théorème subsiste sans doute pour les ensembles  $U''_M$ , mais je ne peux le démontrer, car, pour les polynômes de Jacobi, les formules analogues à celles dont je me suis servi pour les polynômes de Legendre ne me sont pas connues.

7. **Théorème 2.** Si une s. J. est sommable  $M$  vers zéro (resp. vers une fonction  $f$  telle que  $f \cdot (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$  soit intégrable) en dehors d'un ensemble  $E$  de type  $U_M$  (resp.  $U'_M$ ) pour les s. t., alors cette série est de la forme (resp. diffère de  $\mathcal{E}_f[f]$  par une série de la forme) (35), où  $S_1$  et  $S_2$  sont données par (33), (34). Si  $\alpha \geq -\frac{1}{2}$  (resp.  $\beta \geq -\frac{1}{2}$ ) on a  $C_1 = 0$  (resp.  $C_2 = 0$ ).

La démonstration est identique avec celle du théorème 1.

**Remarque additionnelle.** Supposons qu'un des nombres  $\alpha, \beta$  (par exemple le premier d'eux) soit contenu à l'intérieur de l'intervalle  $(-1, -1/2)$  et que le procédé  $M$  considéré soit celui de Poisson. Supposons de plus que l'ensemble  $E$  du théorème 2 ne contienne pas du point  $x = 1$ , c'est-à-dire que les sommes de Poisson soient bornées dans ce point (on peut faire des hypothèses moins restrictives). On peut poser alors dans le théorème précédent  $C_1 = 0$ .

En effet, si  $f \equiv 0$  ceci est évident. Si  $f \not\equiv 0$  il suffit de remarquer que les sommes de Poisson de  $\mathcal{E}_f[f]$  sont, pour  $x = 1$ ,  $o(1-r)^{-2-2n}$  (la démonstration de ce fait n'est pas difficile), tandis que les sommes de Poisson de la série (33) sont, pour  $x = 1$ , exactement d'ordre  $(1-r)^{-2n-2}$ .

8. La proposition suivante est évidente.

**Théorème 3.** Soient  $\bar{f}(x)$  et  $f(x)$  respectivement les sommes supérieure et inférieure de Poisson d'une s. J. à coefficients  $o(\sqrt{n})$ . Supposons que les fonctions  $\bar{f}$  et  $f$  soient finies partout sauf, peut-être, dans un ensemble dénombrable, et que la première d'eux soit intégrable. Alors la série en question diffère de  $\mathcal{E}_f[f]$  par une série de la forme (35), où  $C_1 = 0$  pour  $\alpha \geq -1/2$  et  $C_2 = 0$  pour  $\beta \geq -1/2$ .

<sup>7)</sup> Nous laissons au lecteur le soin d'énoncer et de démontrer les théorèmes sur localisation pour les s. J. à coefficients  $o(\sqrt{n})$ . Cf. (Chap. II, § 5; Chap. III, § 3 de la première partie de ce travail et le chapitre précédent).

### Chapitre III.

#### Le problème de Fourier pour quelques systèmes orthogonaux \*).

##### § 1.

1. Soient  $v_0, v_1, v_2, \dots$  les solutions du problème

$$(1a) \quad v''(z) + (Q(z) + \lambda)v(z) = 0 \quad (0 \leq z \leq \pi)$$

$$(1b) \quad v'(0) - h v(0) = 0; \quad v'(\pi) + H v(\pi) = 0 \quad (h, H = \text{const.})$$

et soit  $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < \dots$  la suite correspondante de valeurs du paramètre  $\lambda$ . On peut supposer que les fonctions  $v_n$  forment un système orthogonal et normal dans  $(0, \pi)$ . Leur représentation asymptotique est donnée par la formule (5) du Chap. I de la première partie de ce travail.

**Théorème 1.** Soit  $f(z)$  une fonction intégrable  $L$  dans  $(0, \pi)$ . Soit

$$(2) \quad f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n v_n(z).$$

La série du second membre est uniformément équi-convergente dans  $(0, \pi)$  avec le développement de  $f$  en série de cosinus.

Ce théorème a été démontré pour la première fois par M. Haar<sup>1)</sup>. La démonstration que nous allons donner permet de prouver le théorème analogue pour  $f$  intégrable  $D$  (au sens large).

2. Commençons par quelques remarques générales.

1°. Nous admettons comme démontré que le système  $\{v_n\}$  est complet, dans le domaine des fonctions de carré intégrable.

Pour démontrer que  $\{v_n\}$  est aussi complet dans le domaine des fonctions intégrables  $L$ , ou, plus généralement, intégrables  $D$ , écrivons la formule asymptotique pour les  $v_n$  dans la forme

$$(3) \quad v_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos n z + \frac{\beta(z)}{n} \sin n z + \frac{q_n(z)}{(n+1)^2} \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

où pour  $n=0$  nous remplaçons le deuxième terme du second membre par 0.

De l'intégrabilité de  $f$  il résulte celle de  $f\beta$ . Désignons leurs primitives respectivement par  $F$  et  $\Phi$ ; en intégrant par parties :

$$\int_0^\pi f\beta \cdot \frac{\sin nt}{n} dt = - \int_0^\pi \Phi \cos nt dt$$

<sup>\*</sup>) Certains théorèmes démontrés dans ce chapitre sont connus (cf. Haar [1], W. H. Young [1], [2], Szegő [1]). Il nous paraît cependant que l'application de la multiplication formelle simplifie les raisonnements.

<sup>1)</sup> Haar [1].

$$(4) \quad \int_0^{2\pi} f \cdot \frac{Q_n}{(n+1)^2} dt = \left[ \frac{F \cdot Q_n}{(n+1)^2} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} F' \cdot \frac{Q'_n}{(n+1)^2} dt = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

car  $Q'(n) = O(n)^2$ . On a donc

$$a_n = \int_0^{2\pi} \left( \sqrt{\frac{2}{\pi}} f - \Phi \right) \cos nt \, dt + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

ou, en vertu du théorème de Riesz-Fischer,

$$(5) \quad a_n = \int_0^{2\pi} \left( \sqrt{\frac{2}{\pi}} f - \Phi + r \right) \cos nt \, dt$$

où  $r$  est de carré intégrable.

Nous savons que le système trigonométrique est complet pour les fonctions intégrables  $L$  on  $D^*$ , donc si  $a_0 = a_1 = \dots = a_n = \dots = 0$ , on déduit de

(5) que  $\sqrt{\frac{2}{\pi}} f - \Phi + r = 0$  presque partout, donc  $f$  est de carré intégrable,

donc, d'après ce que nous avons dit,  $f = 0$ .

2°. Montrons maintenant que le développement  $\mathcal{S}_{SL}[f]$  d'une fonction  $f$  peut être intégrée terme à terme et que la série obtenue converge uniformément si  $f$  est intégrable  $L$  et est sommable uniformément  $(C, 1)$  si  $f$  est intégrable  $D$ .

En effet, si  $f$  est intégrable  $L$ , on déduit de la formule (5) que  $\sum a_n \cos nz$  est une série de Fourier, donc en vertu des théorèmes connus, la série

$$(6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\sin nz}{n}$$

est uniformément convergente dans  $(0, \pi)$  vers une fonction absolument continue. Donc, en vertu de la formule (3), la série  $\sum a_n v_n$ , après l'intégration terme à terme, converge uniformément vers une fonction qui est une intégrale:

$$(7) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^z v_n(t) \, dt = \int_0^z \psi(t) \, dt.$$

De l'égalité

$$(8) \quad \int_0^z \left[ \psi(t) - \sum_{k=0}^n a_k v_k(t) \right] dt \rightarrow 0$$

<sup>1)</sup> Cf. la première partie de ce travail p. 122. Si  $f$  est intégrable  $L$  nous pouvons nous passer de l'intégration par parties car il résulte du premier théorème de la moyenne que l'expression (4) est  $O(n^{-2})$ .

<sup>2)</sup> L'intégration par parties réduit le cas des fonctions intégrables à celui des fonctions continues.

on déduit, en appliquant le second théorème de la moyenne, que

$$(9) \quad \int_0^{\pi} \left[ \psi(t) - \sum_{k=0}^n a_k v_k(t) \right] v_m(t) \, dt \rightarrow 0, \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

par conséquent

$$(10) \quad a_m = \int_0^{\pi} \psi(t) v_m(t) \, dt,$$

donc, comme  $\{v_n\}$  est complet, on a  $\psi = f$ . Si l'on remplace  $\psi$  par  $f$  dans (7), on voit que notre assertion est démontrée — dans le cas où  $f$  est intégrable  $L$ . Si  $f$  est intégrable  $D$  on ne doit changer que légèrement la démonstration. Dans ce cas la série (6) est (d'après le théorème de M. Fejér) uniformément sommable  $(C, 1)$  vers une fonction intégrale (totale). De plus, bien que  $a_n = o(n)^4$ , la série

$$\sum \frac{a_n Q_n}{(n+1)^2}$$

converge uniformément et absolument. En effet, d'après (5) les nombres  $b_n = a_n/n$  sont des coefficients de Fourier d'une fonction continue — donc  $\sum b_n^2 < \infty$  et il suffit de remarquer que  $b_n/n < \frac{1}{2} b_n^2 + \frac{1}{2n^2}$ . Il en résulte que la relation (8) a lieu par le procédé de la première moyenne arithmétique, d'où on obtient (10).

3. Passons maintenant à la démonstration du théorème. Sans restreindre la généralité nous pouvons supposer que  $a_0 = 0$ . Nous avons, d'après 2°, que

$$(11) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^z \left[ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nt + \frac{\beta(t)}{n} \sin nt + \frac{Q_n(t)}{n^2} \right] dt = \int_0^z f(t) \, dt.$$

La série

$$(12) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n(z)$$

peut être décomposée en somme de trois séries

$$(13) \quad 1^\circ) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nz, \quad 2^\circ) \beta(z) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\sin nz}{n}, \quad 3^\circ) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{Q_n(z)}{n^2}.$$

<sup>4)</sup> L'intégration par parties prouve pour le système trigonométrique que les coefficients de Fourier sont  $o(n)$ . La formule (5) prouve que la proposition subsiste pour les fonctions de Sturm-Liouville.

La première d'eux, comme il résulte de (5), est le développement en série de cosinus d'une fonction  $f_1$ . La deuxième, d'après ce que nous avons dit de la série (6), converge uniformément vers une fonction absolument continue  $f_2 = \beta(z) G(z)$ , où  $G(z)$  désigne la somme de la série (6). Enfin la somme  $f_3$  de la troisième vérifie la condition de Lipschitz d'ordre  $1 - \varepsilon$ .

On voit donc que la série (13) est uniformément équi-convergente dans  $(0, \pi)$  avec le développement en série de cosinus de la fonction  $f_1 + f_2 + f_3$  et il nous reste à démontrer que  $f = f_1 + f_2 + f_3$ . Chacune des séries  $\mathcal{S}_{SL}[f]$  et  $\mathcal{S}[f_1 + f_2 + f_3]$  peut être intégrée dans l'intervalle  $(0, z)$  ( $0 \leq z \leq \pi$ ) et les sommes obtenues sont respectivement égales à

$$(14) \quad \int_0^z f dt, \quad \int_0^z (f_1 + f_2 + f_3) dt.$$

Comme  $\mathcal{S}_{SL}[f]$  et  $\mathcal{S}[f_1 + f_2 + f_3]$  sont uniformément équi-convergentes on obtient que les intégrales (14) sont égales pour toute valeur de  $z$ ,  $0 \leq z \leq \pi$  donc  $f = f_1 + f_2 + f_3$ .

4. Passons maintenant au cas de l'intégrale  $D$  (au sens étroit ou large). Nous démontrerons les propositions suivantes:

**Théorème 2.** 1°. Les développements de  $f(z)$ , intégrable  $D$ , en série de cosinus sont uniformément équisommables  $(C, 1)$  (ou même  $(C, \varepsilon)$  ( $\varepsilon > 0$ )) dans  $(0, \pi)$ .

2°. Ces développements sont uniformément équi-convergentes dans tout intervalle  $(\delta, \pi - \delta)$  ( $\delta > 0$ ). La proposition cesse d'être vraie pour  $\delta = 0$ .

3°. Les développements mentionnés sont uniformément équi-convergentes dans  $(0, \pi)$ , pourvu que l'on suppose que les coefficients  $a_n$  de  $f(z)$  tendent vers zéro.

La démonstration du théorème 2, 1° est la même que celle du théorème 1: on décompose la série (12) en somme des séries (13) et il suffit de remarquer que la série (6) est uniformément sommable  $(C, 1)$  vers une fonction continue et que les fonctions  $f_2$  et  $f_3$ , comme continues, possèdent leurs développements en séries de cosinus sommables  $(C, \varepsilon)$  ( $\varepsilon > 0$ ).

Pour démontrer la proposition 2, 2° remarquons d'abord que le développement de la fonction (13, 3°) en série de cosinus converge uniformément, cette fonction vérifiant la condition de Lipschitz d'ordre  $\frac{1}{2}$ . En effet, en posant

<sup>\*)</sup> La somme de la série (13, 3°) ( $a_n \rightarrow 0$ ) vérifie la condition de Lipschitz d'ordre positif, pourvu que  $e_n = O(1)$ ,  $e'_n = O(n)$ . La démonstration de ce fait a été donnée dans les Stud. Math. 2, p. 122, mais elle peut être déduite aussi d'une proposition générale que nous démontrerons plus loin.

$$b_n = \frac{a_n}{n}, \quad f_3 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{Q_n(t)}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} Q_n(t),$$

nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} |f_3(z+h) - f_3(z)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} |Q_n(z+h) - Q_n(z)| = \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{1}{h} \rfloor} + \sum_{n=\lfloor \frac{1}{h} \rfloor + 1}^{\infty} = A_h + B_h. \\ (15) \quad A_h &\leq h \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{1}{h} \rfloor} \frac{|b_n|}{n} \cdot Cn = Ch \cdot \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{1}{h} \rfloor} |b_n| \leq Ch \left( \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{1}{h} \rfloor} b_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{1}{h} \rfloor} 1^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_1 h^{\frac{1}{2}}. \\ B_h &\leq C_2 \sum_{n=\lfloor \frac{1}{h} \rfloor + 1}^{\infty} \frac{|b_n|}{n} \leq C_2 \left( \sum_{n=\lfloor \frac{1}{h} \rfloor + 1}^{\infty} b_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{n=\lfloor \frac{1}{h} \rfloor + 1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_3 h^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Remarquons ensuite que, si l'on développe  $\beta(z)$  en série de cosinus, on obtient une série à coefficients  $O(n^{-2})$ , donc le produit formel de cette série par la série (6) est équi-convergent avec la série (13, 2°). Ce produit est le développement en série de sinus de la fonction  $\beta(z) G(z) = f_2$ . En vertu de la proposition fondamentale sur la localisation pour les séries de Fourier, les développements de la fonction  $f_2$  en séries de sinus et de cosinus sont uniformément équi-convergentes dans  $(\delta, \pi - \delta)$  ( $\delta > 0$ ) et la première partie du théorème 2, 2° est démontrée.

5. Pour prouver que la proposition démontrée cesse d'être vraie pour  $\delta = 0$  nous nous bornons au cas le plus simple. La fonction  $\beta(x)$  dans la formule (3) est égale à

$$\beta(x) = h + \frac{1}{2} \int_0^x Q(t) dt - cx,$$

où

$$\pi c = h + H + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} Q(t) dt.$$

Si l'on suppose donc que  $h = -H = 1$  et  $Q(x) \equiv 0$ , on obtient que  $\beta(x) \equiv 1$ .

On sait qu'il existe une fonction  $\varphi(x)$  continue dans  $(0, \pi)$  dont le développement en série de cosinus diverge pour  $x = 0$ , bien que  $\varphi'$  existe et est continue dans chaque intervalle  $(\delta, \pi)$  ( $\delta > 0$ ). Évidemment  $\varphi'$  est intégrable au sens de Riemann (donc à fortiori intégrable  $D$ ) et  $\varphi$  est l'intégrale de  $\varphi'$ . Supposons que  $\varphi(0) = 0$ . Développons  $\varphi$  en série de sinus et écrivons ce développement sous la forme

$$(16) \quad \varphi \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \sin nx \quad (a_n = o(n)).$$

Ce développement converge partout vers  $\varphi$ , donc ne peut être équi-convergent

<sup>\*)</sup> Cf. par exemple Hobson [1].

dans  $(0, \pi)$  avec le développement de  $g$  en série de cosinus qui diverge pour  $z = 0$ . Les nombres  $a_n$  étant donnés par la relation (16), on voit immédiatement que la série  $\sum a_n v_n$ , qui est celle de Fourier d'une fonction  $f$ , n'est pas équi-convergente pour  $z = 0$  avec le développement de  $f$  en série de cosinus.

6. Passons maintenant au cas 3°. En répétant la démonstration de la proposition 2° on voit que la série (6), qui est uniformément sommable  $(C, 1)$ , converge uniformément — en vertu du théorème de Tauber. Le développement de  $\beta G$  en série de sinus (qu'on peut obtenir en multipliant formellement la série (6) par le développement de  $\beta$  en série de cosinus) possède les coefficients  $o(1/n)$ , est donc aussi uniformément convergente. La proposition 3° sera donc démontrée si nous pouvons démontrer le lemme suivant:

Lemme  $\pi$ . Si une fonction  $g(z)$  ( $0 \leq z \leq \pi$ ) possède le développement en série de sinus uniformément convergent à coefficients  $o(n^{-1})$ , alors le développement de  $g(z)$  en série de cosinus est aussi uniformément convergent<sup>7)</sup>. Soient

$$(17) \quad 1^0) \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nz, \quad 2^0) \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nz$$

(ou  $b_n = o(n^{-1})$ ) les développements de  $g$  en séries de cosinus et de sinus. L'idée la plus naturelle d'obtenir la série (17, 1°) de (17, 2°), c'est de multiplier cette dernière par le développement de la fonction  $\text{sign } z$ :

$$(18) \quad \text{sign } z = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin(2\nu-1)z}{2\nu-1}.$$

Si les coefficients de ce produit (égaux à  $a_n$ ) étaient  $o(n^{-1})$  (resp.  $O(n^{-1})$ ) on pourrait appliquer le théorème de Tauber (resp. celui de M. Hardy<sup>8)</sup>) et comme la série (17) est sommable  $(C, 1)$  elle serait convergente. Cependant cette hypothèse sur l'ordre de  $a_n$  n'est pas vraie et on est conduit à calculer explicitement les sommes partielles de ce produit.

Nous décomposons la démonstration du lemme  $\pi$  en deux parties, dont la plus essentielle est la suivante.

7. a) Considérons le produit formel des deux s. t.

$$(19) \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nz + b_n \sin nz) \quad (20) \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nz + \beta_n \sin nz),$$

où  $a_n, b_n = O(n^{-1})$  et  $\alpha_n, \beta_n = o(n^{-1})$ . Si l'une de ces séries — par ex. la

<sup>7)</sup> La proposition analogue pour les séries de cosinus est également vraie, pourvu que l'on suppose que  $g(0) = 0$ .

<sup>8)</sup> Toute série à coefficients  $O\left(\frac{1}{n}\right)$  et sommable  $(C, 1)$  converge.

première — possède pour  $z = z_0$  les sommes partielles bornées et l'autre y converge vers zéro, alors leur produit aussi converge vers zéro pour  $z = z_0$ <sup>9)</sup>.

Il est plus commode d'écrire les séries en question sous la forme complexe:

$$\frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}, \quad \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n e^{inx}, \quad \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{inx},$$

où la dernière de ces séries est le produit formel des deux premières; plus précisément

$$c_n = a_n - i b_n \quad (n \geq 0), \quad c_{-n} = \bar{c}_n, \quad \gamma_n = a_n - i \beta_n \quad (n \geq 0), \quad \gamma_{-n} = \gamma_n,$$

$$C_n = \frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} c_p \gamma_{n-p}.$$

Nous pouvons supposer que  $z_0 = 0$ . Soit

$$\frac{1}{2} \sum_{n=-N}^{+N} c_n = s_N, \quad \frac{1}{2} \sum_{n=-N}^{+N} \gamma_n = \sigma_N, \quad \frac{1}{2} \sum_{n=-N}^{+N} C_n = S_N \quad (N = 0, 1, 2, \dots),$$

$$c_0^* = c_0, \quad c_N^* = c_N + c_{-N}, \quad \gamma_0^* = \gamma_0, \quad \gamma_N^* = \gamma_N + \gamma_{-N} \quad (N = 1, 2, \dots)$$

$$\gamma_N^* = \varepsilon_N \cdot N^{-1}, \quad \eta_N = \max_{n \geq N} |\varepsilon_n| \quad (N = 1, 2, \dots).$$

Sans restreindre la généralité nous pouvons supposer que

$$|c_n^*| \leq \frac{1}{n}, \quad |s_n| \leq 1, \quad \eta_n \leq 1 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

On a

$$\begin{aligned} S_N &= \frac{1}{2} \sum_{n=-N}^{+N} C_n = \frac{1}{4} \sum_{n=-N}^{+N} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} c_p \gamma_{n-p} = \frac{1}{4} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} c_p \sum_{n=-N-p}^{N-p} \gamma_n \\ &= o(1) + \frac{1}{4} \sum_{p=1}^{\infty} \left( c_p \sum_{n=-N-p}^{N-p} \gamma_n + c_{-p} \sum_{n=-N+p}^{N+p} \gamma_n \right) = o(1) + \frac{1}{4} \sum_{p=1}^{\infty} c_p^* \left( \sum_{n=-N-p}^{N-p} \gamma_n \right) \\ &\quad + \frac{1}{4} \sum_{p=1}^{\infty} c_{-p} \left( \sum_{n=-N+p}^{N+p} \gamma_n - \sum_{n=-N-p}^{N-p} \gamma_n \right) = o(1) + P_N + Q_N. \end{aligned}$$

<sup>9)</sup> Cette proposition cesse d'être vraie si l'on suppose que les coefficients des deux séries en question soient  $O(n^{-1})$ . Il suffit de considérer le produit formel de la série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$  par elle-même pour  $z = 0$ . Ce produit représente la fonction  $\left(\frac{\pi - x}{2}\right)^2$ ; il converge donc pour  $x = 0$  vers  $\frac{\pi^2}{4}$ , bien que les deux facteurs y convergent vers zéro.

$$4P_N = \sum_{p=1}^N + \sum_{p=N+1}^{\infty} = P'_N + P''_N,$$

$$P'_N = \sum_{p=1}^N c_p^* \sum_{n=-N-p}^{N-p} \gamma_n = \sum_{p=1}^N c_p^* \left( 2\sigma_{N-p} + \sum_{n=-N-p}^{-N+p-1} \gamma_n \right).$$

Posons  $M = [\frac{1}{2}N]$ ; alors

$$\sum_{p=1}^N c_p^* \sigma_{N-p} = \sum_{p=1}^M + \sum_{p=M+1}^N; \quad \left| \sum_{p=M+1}^N c_p^* \sigma_{N-p} \right| \leq \frac{1}{M} \sum_{p=M+1}^N |\sigma_{N-p}| \leq \frac{1}{M} \sum_{p=1}^N |\sigma_p| \rightarrow 0.$$

$$\left| \sum_{p=1}^M c_p^* \sigma_{N-p} \right| = 2 \left| \sum_{p=1}^M (s_p - s_{p-1}) \sigma_{N-p} \right| = 2 \left| \sum_{p=1}^M s_p (\sigma_{N-p} - \sigma_{N-p-1}) \right| + o(1)$$

$$= \left| \sum_{p=1}^M s_p \gamma_{N-p}^* \right| + o(1) \leq \frac{\eta_{N-M}}{N-M} \sum_{p=1}^M 1 + o(1) = o(1).$$

Dans les calculs ultérieurs nous utilisons seulement l'ordre de grandeur des  $c_p$  et  $\gamma_p$ .

Soit  $0 < \delta < \frac{1}{2}$ . En posant  $M = M(\delta) = [N(1-\delta)]$ , nous avons

$$\sum_{p=1}^N c_p^* \sum_{n=-N-p}^{-N+p-1} \gamma_n = \sum_{p=1}^M + \sum_{p=M+1}^N.$$

$$(21) \quad \left| \sum_{p=1}^M \right| \leq \sum_{p=1}^M \frac{1}{p} \cdot 2p \cdot \frac{\eta_{N-M}}{N-M} \rightarrow 0.$$

$$\left| \sum_{p=M+1}^N \right| \leq \frac{1}{M} \sum_{p=M+1}^N \sum_{n=-N-p}^{N+p} \frac{1}{n} = \frac{1}{M} \sum_{p=M+1}^{N-1} \sum_{n=-N-p+1}^{N+p} \frac{1}{n} + o(1)$$

$$\leq \frac{1}{M} \sum_{p=M+1}^{N-1} \log \frac{N+p}{N-p} + o(1) \leq C\delta + o(1),$$

où  $C$  est une constante absolue. De même façon, en posant  $M = M(\delta) = [N(1+\delta)]$ , on décompose  $P''_N$  en somme de deux séries

$$P''_N = \sum_{p=N+1}^M + \sum_{p=M+1}^{\infty},$$

dont la première est  $O(\delta)$  et la seconde tend vers zéro. Pour évaluer  $Q_N$  on écrit:

$$Q_N = \sum_{p=1}^{\infty} c_{-p} \left( \sum_{n=-N+p}^{N+p} \gamma_n - \sum_{n=-N-p}^{N-p} \gamma_n \right) = \sum_{p=1}^{\infty} c_{-p} \left( \sum_{n=-N+p}^{N+p} (\gamma_n + \gamma_{-n}) \right)$$

$$= \sum_{p=1}^{\infty} c_{-p} \sum_{n=-N+p}^{N+p} \gamma_n^* = \sum_{p=1}^N + \sum_{p=N+1}^{\infty} = Q'_N + Q''_N.$$

L'évaluation de  $Q'_N$  est analogue à (21) et l'évaluation de  $Q''_N$  à celle de  $P''_N$ . En résumant, on a

$$S_N = o(1) + O(\delta) = o(1).$$

b) De la proposition démontrée il résulte immédiatement que le produit formel des deux séries trigonométriques à coefficients  $O\left(\frac{1}{n}\right)$  et  $o\left(\frac{1}{n}\right)$ , convergentes respectivement vers les sommes  $s$  et  $\sigma$ , converge aussi et a pour somme  $S = s\sigma$ <sup>10</sup>). Ce théorème présente peut être quelque intérêt indépendamment de ses applications, mais pour ces

<sup>10</sup>) Ceci correspond au théorème suivant concernant la multiplication des séries numériques. Considérons deux séries

$$(S) \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n, \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n$$

convergentes respectivement vers les sommes  $A, B$ , c'est à dire que

$$\sum_{n=-N}^{+N} a_n \rightarrow A, \quad \sum_{n=-N}^{+N} b_n \rightarrow B \quad (N \rightarrow \infty).$$

Si l'une des séries (S) possède les coefficients  $O(n^{-1})$  et l'autre  $o(n^{-1})$ , alors leur produit (de Laurent) converge vers  $AB$ , c'est à dire que

$$(T) \quad \sum_{n=-N}^N c_n \rightarrow AB, \quad \text{où} \quad c_n = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p b_{n-p}.$$

Remarquons que nous ne supposons rien sur la convergence des séries partielles  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ou  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ . Si l'on suppose que ces séries convergent, on peut démontrer la convergence de  $\sum_{n=1}^{\infty} c_{\pm n}$ .

La proposition (T) cesse d'être vraie si l'on considère les séries (S) à coefficients  $O\left(\frac{1}{n}\right)$ . On obtient l'exemple le plus simple en considérant le produit de la série  $\dots \frac{1}{n} \dots$   $-\frac{1}{2} - 1 + 0 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$  (convergente vers zéro) par elle-même. On peut facilement démontrer (en considérant par ex. le produit formel de la série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$  par elle-même) que ce produit est égalé à  $-\pi^2$ .



dernières il est plus commode de l'énoncer sous une forme un peu différente. Supposons de nouveau que pour  $z = z_0$  les sommes partielles de la série (19) soient bornées tandis que la série (20) converge vers la somme  $\lambda(z_0)$ . La série (20) peut être décomposée en somme de deux:

$$(22) \quad \frac{\alpha_0}{2} - \lambda(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nz + \beta_n \sin nz); \quad (23) \quad \lambda(z_0) + 0 + 0 + 0 \dots$$

Le produit formel de la série (19) par (22) converge vers zéro, donc le produit formel de la série (19) par (20) est équi-convergent avec la série (19) multipliée par  $\lambda(z_0)$ .

Évidemment cette équi-convergence est uniforme si les sommes partielles de (19) sont uniformément bornées et la série (20) converge uniformément. Appliquons cette proposition au produit des séries (17, 20) et (18), dont la première converge dans  $(0, \pi)$  uniformément vers  $g(z)$  ( $0 \leq z \leq \pi$ ) et la seconde possède les sommes partielles uniformément bornées. Ce produit se comporte comme la série (18) multipliée par  $g(z)$ , c'est à dire converge uniformément, car  $g(0) = 0$  et la série (18) converge uniformément dans  $(\delta, \pi)$  pour tout  $\delta > 0$ .

## § 2.

8. Passons maintenant au problème de Fourier pour les polynômes de Legendre, Jacobi et les fonctions de Bessel.

**Théorème 3.** Si les coefficients de Fourier-Legendre

$$(24) \quad a_n = (n + \frac{1}{2}) \int_{-1}^{+1} f(t) P_n(t) dt$$

d'une fonction  $f(x)$  intégrable  $L^{(1)}$  sont  $o(\sqrt{n})$ , la série

$$(25) \quad \sin \theta \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\cos \theta)$$

<sup>11)</sup> Le théorème subsiste aussi pour  $\varphi$  intégrable  $D$  pourvu que l'on suppose que  $\mathcal{S}[\varphi]$  possède les coefficients tendant vers zéro ce qui a lieu si  $f$  est intégrable  $L$ . La démonstration reste la même. Si l'on veut éviter cette hypothèse additionnelle, on doit considérer, au lieu de  $\mathcal{S}[\varphi]$ , la série  $\mathcal{S}[\lambda \varphi]$  où  $\lambda$  est une fonction suffisamment régulière, égale à 1 dans  $(\varepsilon, \pi - \varepsilon)$  et à zéro dans  $(-\pi, \varepsilon/2)$  et dans  $(\pi - \varepsilon/2, \pi)$ . En effet, comme la série (31) peut être intégrée terme à terme dans  $(\varepsilon/2, \pi - \varepsilon/2)$ , le produit formel (à coefficients tendant vers zéro) de cette série par  $\mathcal{S}[\lambda]$  peut être intégré partout, donc ce produit est la série  $\mathcal{S}[\lambda \varphi]$ , équi-convergente avec (31), donc aussi avec (25), dans l'intervalle  $(\varepsilon, \pi - \varepsilon)$ . Les mêmes remarques s'appliquent aux théorèmes 4 et 5.

est dans tout intervalle  $(\varepsilon, \pi - \varepsilon)$  uniformément équi-convergente avec  $\mathcal{S}[\varphi]$ , où  $\varphi$  est la fonction paire, égale dans l'intervalle  $(0, \pi)$  à  $f(\cos \theta) \sin \theta$  <sup>12)</sup>.

**Démonstration.** Posons

$$(26) \quad F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt; \quad (27) \quad A_n = (n + \frac{1}{2}) \int_{-1}^{+1} F(t) P_n(t) dt.$$

Sans restreindre la généralité nous pouvons supposer que  $F(1) = 0$ . L'intégration par parties nous donne

$$(28) \quad A_0 = -\frac{1}{2} a_1; \quad A_n = \frac{a_{n-1}}{2n-1} - \frac{a_{n+1}}{2n+1} \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

Commençons par le cas où  $f \in L^2$ . Désignons par  $s_n(x)$  la  $n$ ème somme partielle de  $\mathcal{S}_L[f]$ . Comme le système de Legendre est complet, on a

$$(29) \quad \int_{-1}^{+1} [f(x) - s_n(x)]^2 dx = \int_0^\pi [f(\cos \theta) - s_n(\cos \theta)]^2 \sin \theta d\theta \rightarrow 0.$$

D'après l'inégalité de Schwarz, nous avons

$$\int_0^\pi |f(\cos \theta) - s_n(\cos \theta)| \sin \theta d\theta \rightarrow 0,$$

ou

$$(30) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{\frac{\pi}{2}}^\theta P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^\theta f(\cos \theta) \sin \theta d\theta,$$

la série du premier membre convergeant uniformément dans  $(0, \pi)$ . Soit

$$(31) \quad \frac{1}{2} a'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a'_n \cos n\theta + b'_n \sin n\theta) \quad (a'_n, b'_n \rightarrow 0)$$

une s. t. uniformément équi-convergente avec (25) dans  $(\varepsilon/2, \pi - \varepsilon/2)$  (cf. le lemme  $\eta$ ). En vertu de (30), la série (31) peut être intégrée dans  $(\varepsilon/2, \pi - \varepsilon/2)$  et la somme obtenue est égale à l'intégrale de  $f(\cos \theta) \sin \theta$ . La série (31), donc aussi celle de (25), est, d'après le lemme  $\delta$  uniformément équi-convergente dans  $(\varepsilon, \pi - \varepsilon)$  avec  $\mathcal{S}[\varphi]$ .

Considérons maintenant le cas général de  $f$  intégrable, en conservant l'hy-

<sup>12)</sup> Le théorème subsiste si l'on divise en même temps la série (25) et la fonction  $\varphi$  par  $\sin \theta$ , mais il est plus commode de définir  $\varphi$  comme  $f(\cos \theta) \sin \theta$  car la fonction  $f(\cos \theta)$  n'est pas nécessairement intégrable.



pothèse que  $a_n = o(\sqrt{n})$ . La série de Fourier de  $F(x)$  (cf. (28)) peut être écrite (en posant  $x = \cos \theta$ ) sous la forme

$$(32) \quad -\frac{1}{2}a_0 + (a_0 - \frac{1}{2}a_2)P_1(\cos \theta) + (\frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{2}a_3)P_2(\cos \theta) + \dots$$

D'après ce que nous avons déjà démontré, comme  $F$  est absolument continue, cette série est uniformément convergente dans  $(\varepsilon, \pi - \varepsilon)$  vers  $F(\cos \theta)^{13}$ .

La série (32) est équiconvergente avec

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x P_n(t) dt$$

et, en égalant la somme de cette série à  $F(x)$ , nous obtenons l'égalité (30). La reste de la démonstration est la même que dans le cas de  $f^*$  intégrable.

9. Théorème 4. Soit  $f(x)$  ( $-1 < x < 1$ ) une fonction telle que  $f(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$  ( $\alpha, \beta > -1$ ) soit intégrable  $L$  et telle que les coefficients  $a_n$  de son développement

$$(33) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n^{\alpha, \beta}(x)$$

en série de polynômes de Jacobi soient  $o(\sqrt{n})$ . Soit  $\mathfrak{S}[\varphi]$  le développement de  $\varphi(\theta) = 2^{\alpha+\beta+1}(\sin \frac{1}{2}\theta)^{\alpha+1}(\cos \frac{1}{2}\theta)^{\beta+1}f(\cos \theta)$  ( $0 < \theta < \pi$ ) en série de cosinus. Alors  $\mathfrak{S}[\varphi]$  et la série

$$(34) \quad 2^{\alpha+\beta+1}(\sin \frac{1}{2}\theta)^{\alpha+1}(\cos \frac{1}{2}\theta)^{\beta+1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n^{\alpha, \beta}(\cos \theta)$$

sont uniformément équiconvergentes dans tout intervalle  $(\varepsilon, \pi - \varepsilon)$ .

Démonstration. Soit  $p(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ . Supposons d'abord que  $f^2 p$  soit intégrable. On obtient des relations analogues à (29), (30), où on remplace  $P_n$  par  $P_n^{\alpha, \beta}$ ,  $dx$  par  $p(x)dx$ , et  $d\theta$  par  $p(\cos \theta)d\theta$ . Soit (31) une s. t. uniformément équiconvergente dans  $(\varepsilon/2, \pi - \varepsilon/2)$  avec la série (34) (cf. lemme o). La série (34), donc aussi celle de (31), peut être intégrée terme à terme dans l'intervalle  $(\varepsilon/2, \pi - \varepsilon/2)$  et la série obtenue  $y$  converge vers l'intégrale de  $\varphi(\theta)$ . D'après lemme  $\delta$  la série (31) se comporte dans  $(\varepsilon, \pi - \varepsilon)$  de la même façon que  $\mathfrak{S}[\varphi]$ , ce qui prouve le théorème dans notre cas spécial.

Passons au cas général et écrivons, pour simplicité,  $P_n$  au lieu de  $P_n^{\alpha, \beta}$ .

<sup>13</sup> Si  $f$  est intégrable  $D$ , la série (32)  $y$  est uniformément sommable  $(G, 1)$ , donc, ses termes étant  $o(1/n)$ , elle converge uniformément.

En retranchant de  $f$  une fonction linéaire  $Ax + B$  nous pouvons obtenir que

$$(35) \quad \int_{-1}^0 f p dx = \int_0^1 f p dx = 0$$

(le système des deux équations linéaires qu'on obtient pour  $A, B$  étant à déterminant non nul). Posons

$$(36) \quad F(x) = \frac{1}{p} \int_0^x f p dt.$$

Évidemment  $Fp$  est intégrable. Soient  $A_n$  les coefficients de Fourier-Jacobi de  $F$ .

En intégrant par parties et en nous servant des formules (7) du Chap. II nous obtenons (pour  $n = 1, 2, \dots$ )

$$(37) \quad \begin{aligned} A_n &= \frac{1}{k_n} \int_{-1}^{+1} F p P_n dx = -\frac{1}{k_n} \int_{-1}^{+1} f p \left( \int_0^x P_n dt \right) dx \\ &= -\frac{1}{k_n} \int_{-1}^{+1} f p [\xi_n (P_{n+1})_0^\infty + \eta_n (P_n)_0^\infty + \zeta_n (P_{n-1})_0^\infty] dx. \end{aligned}$$

En vertu de (35) les différences  $(P_k)_0^\infty$  ( $k = n-1, n, n+1$ ) dans la dernière intégrale peuvent être remplacées par  $P_k(x)$ . On obtient donc, en se servant des égalités (4), (6), (8), (11) du Chapitre II, que

$$(38) \quad A_n = - \left[ \frac{k_{n+1}}{k_n} \xi_n a_{n+1} + \eta_n a_n + \frac{k_{n-1}}{k_n} \zeta_n a_{n-1} \right] = \gamma_{n+1} a_{n+1} + \beta_n a_n + \alpha_{n-1} a_{n-1} \quad (n \geq 1).$$

La formule (7) du Chap. II subsiste aussi pour  $n=0$  pourvu que l'on pose  $P_{-1} = 0$ . L'égalité (38) nous donne ainsi  $A_0 = \alpha_1 \gamma_1$ . Comme  $A_n = o(1/\sqrt{n})$  la fonction  $F^* p$  est intégrable et, d'après ce que nous avons déjà démontré, la série  $\mathfrak{S}_p[F]$  converge uniformément dans tout intervalle  $(-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon)$  vers  $F(x)$ .

En particulier, comme  $F(0) = 0$ , nous avons  $\sum_0^\infty A_n P_n(0) = 0$ .

Multiplions maintenant la série (33) par  $p(x)$  et intégrons formellement dans l'intervalle  $(0, x)$  ( $-1 < x < 1$ ). En posant  $p P_n = P_n^*$  et en se servant des formules (11) du Chap. II, on voit facilement que les deux séries (remarquons que  $a_0 = 0$ )

$$(39) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^x P_n^* dt, \quad \alpha_1 \gamma_1 (P_1^*)_0^\infty + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{n+1} \gamma_{n+1} + \alpha_n \beta_n + \alpha_{n-1} \alpha_{n-1}) (P_n^*)_0^\infty$$

sont uniformément équi-convergentes dans  $(-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon)$ . Mais la dernière série est égale à

$$\sum_0^\infty A_n(\tilde{P})_0^* = p(x) \sum_0^\infty A_n P_n(x)$$

et nous avons ainsi démontré que la première série (39) converge uniformément dans tout intervalle  $(-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon)$  vers  $\int_0^x p f dt$  et dès maintenant la démonstration est la même que dans le cas de  $f^2 p$  intégrable.

10. Théorème 5. Soit  $f(t)$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) une fonction telle que  $f(t) t^{1+\nu}$  ( $\nu > -1$ ) soit intégrable  $L$  dans  $(0, 1)$ . Supposons que le développement

$$(40) \quad a_0 C_0(x) + \sum_{m=1}^\infty a_m J_\nu(\lambda_m x)$$

de  $f(t)$  en série de Fourier-Bessel (d'ordre  $\nu$ ) possède les coefficients  $o(\sqrt{m})$ . Alors la série

$$(41) \quad x^{1+\nu} [a_0 C_0(x) + \sum_{m=1}^\infty a_m J_\nu(\lambda_m x)]$$

est dans tout intervalle  $(\varepsilon, 1 - \varepsilon)$  uniformément équi-convergente avec le développement  $\mathcal{S}[\varphi]$  de la fonction  $\varphi(x) = x^{1+\nu} f(x)$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) en série de cosinus.

Pour fixer les idées supposons que  $H + \nu > 0$ . Alors dans les séries (40) et (41) le terme  $a_0 C_0$  peut être omis. Si  $x f^2(x)$  est intégrable la démonstration est exactement la même que dans le cas des polynômes  $P_n$  ou  $P_n^{\alpha, \beta}$  et nous pouvons passer directement au cas général. Ici la situation est un peu différente. Comme l'intégration simple change l'ordre  $\nu$  des fonctions de Bessel, nous serons obligés d'intégrer deux fois.

Le système  $J_\nu(\lambda_m x)$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) étant complet, une au moins de ces fonctions (disons  $J_\nu(\lambda_{m_0} x)$ ) n'est pas orthogonale à  $x^{1+\nu}$ . Par conséquent, en retranchant de  $f$  une expression  $C J_\nu(\lambda_{m_0} x)$ , nous pouvons supposer que l'intégrale de  $x^{1+\nu} f$  étendue à l'intervalle  $(0, 1)$  soit nulle.

Considérons la fonction

$$(42) \quad F(x) = x^\nu \int_x^1 u^{-2\nu-1} \left[ \int_0^1 f(t) t^{1+\nu} dt \right] du$$

que nous avons déjà rencontré dans les problèmes d'unicité pour les s. B. La fonction  $F(x) x^{1+\nu}$  est intégrable  $L$ . En intégrant par parties et en nous servant des formules  $(8_\nu)$ ,  $(9_\nu)$  du Chap. I nous trouvons facilement que le coefficient  $A_m$  du développement de  $F(x)$  est égal  $-a_m / \lambda_m^2$  ( $m = 1, 2, \dots$ ).

Le système de fonctions de Bessel étant complet<sup>14)</sup> nous avons l'égalité

$$(43) \quad - \sum_{m=1}^\infty \frac{a_m}{\lambda_m^2} J_\nu(\lambda_m x) = F(x)$$

la série du premier membre convergeant uniformément dans tout intervalle  $(\delta, 1)$  ( $\delta > 0$ ). En particulier

$$(44) \quad - \sum_{m=1}^\infty \frac{a_m}{\lambda_m^2} J_\nu(\lambda_m) = F(1) = 0.$$

La formule (42) représente une opération transformant la fonction  $f(x) x^{1+\nu}$  en  $F(x)$ . Appliquons cette opération formellement (terme à terme) à la série  $\mathcal{S}_\delta[f]$  multipliée par  $x^{1+\nu}$  c'est à dire à

$$(45) \quad \sum_{m=1}^\infty a_m J_\nu(\lambda_m x) x^{1+\nu}.$$

En intégrant par parties deux fois (cf. les formules  $(8_\nu)$ ,  $(9_\nu)$  du Chap. I) et en tenant compte de ce que l'équation  $z J'_\nu(z) + H J_\nu(z)$  peut être écrite sous la forme  $z J_{\nu+1}(z) - (H + \nu) J_\nu(z) = 0$  (d'où  $J_{\nu+1}(\lambda_m) = (H + \nu) \lambda_m^{-1} J_\nu(\lambda_m)$ ) nous obtenons, en utilisant l'égalité (44), que l'application formelle de l'opération mentionnée transforme la série (45) en celle du premier membre de l'égalité (43)<sup>15)</sup>.

Bien entendu, en appliquant formellement la même opération à la s. t.

$$(46) \quad \frac{1}{2} a'_0 + \sum_{m=1}^\infty (a'_m \cos m\pi x + b'_m \sin m\pi x) \quad (a'_m, b'_m \rightarrow 0)$$

uniformément équi-convergente avec (45) dans l'intervalle  $(\varepsilon/4, 1)$  (cf. le lemme  $\alpha$ ) nous obtiendrons aussi  $F(x)$ . Nous pouvons supposer que  $a'_0 = 0$ , car nous pouvons remplacer  $a'_0/2$  par le développement de Fourier d'une fonction de  $x$ , égale à  $a'_0/2$  dans  $(\varepsilon/4, 1)$  et sans terme constant. Nous obtenons ainsi que la limite, pour  $M \rightarrow \infty$ , de l'expression

$$(47) \quad \sum_{m=1}^M \int_x^1 u^{-2\nu-1} \left[ \int_0^1 (a'_m \cos m\pi t + b'_m \sin m\pi t) dt \right] du$$

<sup>14)</sup> Une fois établi que le système de Bessel est complet dans le domaine des fonctions analytiques dans l'intervalle  $(0, 1)$ , il n'est pas difficile de prouver qu'il est complet dans le domaine des fonction  $f$  telles que  $f t^{1+\nu}$  soit intégrable ( $L$  ou  $D$ ) dans  $(0, 1)$ .

<sup>15)</sup> De même si  $H = \infty$ .

existe uniformément et représente  $F(x)x^{-\nu}$  dans  $(\varepsilon/4, 1)$ . L'expression (47) est égale à

$$(48) \quad \int_x^1 u^{-2\nu-1} [C_M - \sum_{m=1}^M (a'_m \sin m\pi u - b'_m \cos m\pi u)/m\pi] du$$

$$\text{où } C_M = -\sum_{m=1}^M b'_m/m\pi.$$

Comme l'expression (48) tend vers  $F(x)x^{-\nu}$ , il en résulte l'existence de  $\lim C_M = C$ . Si l'on remplace donc dans (48)  $C_M$  par  $C$  on commet une erreur  $\varrho_M(x)$ , tendant vers zéro pour  $\varepsilon/4 \leq x \leq 1$ . Soit  $\lambda(u)$  une fonction de période 2, suffisamment régulière et égale à  $u^{-2\nu-1}$  dans  $(\varepsilon/4, 1)$ . Soient  $a'_m, b'_m$  ( $=o(1/m)$ ) les coefficients du produit formel de  $\mathcal{S}[\lambda]$  par la série

$$(49) \quad C - \sum_{m=1}^{\infty} (a'_m \sin m\pi t - b'_m \cos m\pi t)/m\pi$$

Les sommes partielles de ce produit se comportent de la même façon que les sommes partielles (correspondantes) de la série (49) multipliées par  $\lambda(u)$ . Par conséquent, si  $\varepsilon/4 \leq x \leq 1$ , nous pouvons remplacer l'expression (48) par

$$\int_x^1 [\tfrac{1}{2} a'_0 + \sum_{m=1}^M (a'_m \cos m\pi u + b'_m \sin m\pi u)] du + \varrho'_M(x),$$

où  $\varrho'_M(x) \rightarrow 0$ . Il en résulte que

$$\int_x^1 \tfrac{1}{2} a'_0 du + \sum_{m=1}^{\infty} \int_x^1 (a'_m \cos m\pi u + b'_m \sin m\pi u) du = F(x)x^{-\nu}.$$

Le second membre est une fonction intégrale. D'après le principe de localisation (cf. le lemme d), la série

$$\tfrac{1}{2} a'_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (a'_m \cos m\pi x + b'_m \sin m\pi x)$$

converge uniformément dans  $(\varepsilon/2, 1-\varepsilon/2)$  vers  $\lambda(x) \int_x^1 t^{2\nu} f(t) dt$ . Par conséquent, la série (49) converge uniformément vers  $\int_x^1 t^{2\nu} f(t) dt$ . En appliquant le principe de localisation encore une fois on voit que la série (46) se comporte dans  $(\varepsilon, 1-\varepsilon)$  comme  $\mathcal{S}[\varphi]$ , ce qui prouve le théorème.

Ajouté pendant la correction des épreuves. On peut démontrer assez facilement que le théorème 1 du Chap. II subsiste aussi pour les ensembles  $U''$ , pourvu que l'on suppose que  $\alpha, \beta \geq 1$ .

### Liste des travaux cités.

1. G. Darboux, [1], *Mémoire sur l'approximation des fonctions des très grands nombres*, Journ. de Math. 4 (1878), pp. 5-57 et 377-416.
2. A. Haar, [1], *Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme*, 1. Mitt., Math. Ann. 69 (1910), p. 331-371; 2. Mitt., Math. Ann. 71 (1911), p. 38-53.
3. Hermite et Stieltjes, *Correspondance...*, 2 volumes, Paris (1905).
4. E. W. Hobson, [1], *A General Convergence Theorem...*, Proc. London Math. Soc. 6 (2) 1908, p. 349-395.
5. E. Kogbetliantz, [1], *Recherches sur l'unicité des séries ultrasphériques*, Journal de Math. 5 (9) (1926) p. 125-196.
6. G. Pólya und G. Szegő, [1], *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, 2 Bd., Berlin, 1925.
7. G. Szegő, [1], *Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach den Polynomen eines Orthogonalsystems*, Math. Zeitschr. 12 (1922), p. 61-94.
8. G. N. Watson, [1], *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge University Press, 1922.
9. W. H. Young, [1], *On the Connexion between Legendre Series and Fourier Series*, Proc. Lond. Math. Soc., 18 (2) (1919), p. 141-162.
10. W. H. Young, [2], *On Series of Bessel Functions*, Proc. London Math. Soc., 18 (2) (1919), p. 163-200.