$$
= \frac{\left(\sin\frac{\tau_0+\gamma}{2} + \frac{\eta}{2}\cos\frac{\tau_0+\gamma}{2} + (\eta)_2\right)^2}{(\tau_0+\gamma)^2}\left[1 - \frac{2\eta}{\tau_0+\gamma} + \left(\frac{\eta}{\tau_0}\right)_2\right]
$$

$$
- \frac{\left(\sin\frac{\tau_0-\gamma}{2} + \frac{\eta}{2}\cos\frac{\tau_0-\gamma}{2} + (\eta)_2\right)}{(\tau_0-\gamma)^2}\left[1 - \frac{2\eta}{\tau_0-\gamma} + \left(\frac{\eta}{\tau_0}\right)_2\right]
$$

$$
= \frac{\eta}{2}\left\{\frac{\sin(\tau_0+\gamma)}{(\tau_0+\gamma)^2} - \frac{\sin(\tau_0-\gamma)}{(\tau_0-\gamma)^2}\right\} + \eta^2 f_1\left(\frac{1}{\tau_0}, \eta\right) + \frac{\eta}{\tau_0^3} f_2\left(\eta, \frac{1}{\tau_0}\right),
$$

f_1, f_2 étant des fonctions continues pour les valeurs nulles des arguments.

Or $\sin(\tau_0+\gamma)$ est voisin de $-\sin\gamma$ et $\sin(\tau_0-\gamma)$ est voisin de $\sin\gamma$.

Donc on obtient entre η et τ_0 pour tout γ positif situé entre 0 et π une équation transcendante de la forme

$$
-\eta\sin\gamma + f\left(\eta, \frac{1}{\tau_0}\right) = 0, \tag{85}
$$

où f est somme d'un terme qui tend vers zéro avec $\frac{1}{\tau_0}$ et d'un terme d'ordre η^2.

Donc, lorsque η change de signe, en passant des valeurs négatives aux valeurs positives pour un τ_0 donné suffisamment grand, il y a une racine $\eta = \eta_0$ de l'équation (85), car le membre à gauche de (85) change de signe.

Donc pour un γ arbitraire qui n'est pas de la forme $s\pi$, s entier il existe une infinité de valeurs positives de δ racines de l'équation $D_1 = 0$, ce dont il s'agissait de donner la démonstration.

14. Il y aurait maintenant lieu d'étudier les valeurs exceptionnelles de γ, pour lesquelles deux des équations $D_l = 0$ (pour R donné) s'annulent, et en particulier les γ qui annulent outre D_1 aussi un des D ultérieurs. Cette étude semble difficile.

Encore plus difficile est l'étude du cas classique de γ imaginaire, donc des perturbations périodiques. Il faudrait partir des expressions (5) et voir tout que se passe lorsque l'on a $k = 2h$ etc. Je me propose d'étudier ces choses dans des travaux ultérieurs.

Sur les transformations isomorphiques d'une variété à connexion affine

(Przekształcenia izomorficzne przestrzeni o koneksji afinalnej)

par

W. Ślebodziński

Une transformation ponctuelle d'une variété à connexion affine est dite isomorphique, quand elle conserve la connexion de l'espace. Cette notion est due à M. Cartan qui en 1927, dans son Mémoire [1]) sur les espaces de groupe a étudié les groupes d'isomorphie d'une classe importante de variétés à connexion affine. Dans la même année MM. Eisenhart et Knebelman [2]), en partant d'un point de vue tout différent, ont donné quelques indications sur les transformations isomorphiques d'une variété sans torsion, en leur donnant le nom de collinéations affines. Le présent article a pour but der trouver les conditions pour qu'une variété à connexion affine admette une transformation infinitésimale isomorphique. Les deux premiers n$^{\text{os}}$ sont consacrés à une variété quelconque à connexion affine, les n$^{\text{os}}$ **3** et **4** contiennent quelques applications aux variétés de M. Cartan (variétés dont la courbure et la torsion se conservent par le transport parallèle) et aux variétés riemanniennes.

1. Imaginons une variété à connexion affine A_n à n dimensions. Désignons par x^α $(\alpha = 1, 2, \ldots, n)$ les coordonnées d'un point arbitraire de la variété A_n, par $\Gamma^\mu_{\varkappa\lambda}$ les coefficients du déplacement parallèle déterminé par

[1]) E. Cartan, La Géométrie des groupes de transf., J. de Math. t. 6. 1927. V. aussi du même Auteur: Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann, Bull. Soc. Math. t. 54, 1926; t. 55, 1927.

[2]) L. P. Eisenhart et M. S. Knebelman, Displacements in a geometry of paths, Proc. of Nat. Acad. of Sc. vol. 13, 1927. V. aussi L. P. Eisenhart, Non-Riemannian Geometry, 1927, p. 126.

la connexion et par $R_{\varkappa\lambda\mu}{}^{\nu}$, $S_{\varkappa\lambda}{}^{\mu}$ les composantes de la courbure et de la torsion [3]). Soit

(1) $$Xf = X^\varrho \partial_\varrho f \quad \left(\partial_\varrho f = \frac{\partial f}{\partial x^\varrho}\right)$$

le symbole d'une transformation infinitésimale quelconque. En désignant par $\overline{X}f$ la transformation que l'on obtient en prolongeant Xf aux affineurs de la variété A_n, on a les formules

(2) $$\overline{X}(A^{\lambda_1\ldots\lambda_t}_{\varkappa_1\ldots\varkappa_s}) = X^\varrho \partial_\varrho A^{\lambda_1\ldots\lambda_t}_{\varkappa_1\ldots\varkappa_s} + \sum_{i=1}^{s} A^{\lambda_1\ldots\lambda_t}_{\varkappa_1\ldots\varkappa_{i-1}\varrho\varkappa_{i+1}\ldots\varkappa_s}\partial_{\varkappa_i}X^\varrho - \sum_{j=1}^{t} A^{\lambda_1\ldots\lambda_{j-1}\varrho\lambda_{j+1}\ldots\lambda_t}_{\varkappa_1\ldots\varkappa_s}\partial_\varrho X^{\lambda_j},$$

$A^{\lambda_1\ldots\lambda_t}_{\varkappa_1\ldots\varkappa_s}$ étant les composantes d'un affineur quelconque mixte $\overline{A}$ de degré $s+t$. Si l'on y introduit le symbole $\nabla_\varkappa$ de la différentiation covariante, la formule (2) devient

(3) $$\overline{X}(A^{\lambda_1\ldots\lambda_t}_{\varkappa_1\ldots\varkappa_s}) = X^\varrho \nabla_\varrho A^{\lambda_1\ldots\lambda_t}_{\varkappa_1\ldots\varkappa_s} + \sum_{i=1}^{s} A^{\lambda_1\ldots\lambda_t}_{\varkappa_1\ldots\varkappa_{i-1}\varrho\varkappa_{i+1}\ldots\varkappa_s}\nabla_{\varkappa_i}X^\varrho - \sum_{j=1}^{t} A^{\lambda_1\ldots\lambda_{j-1}\varrho\lambda_{j+1}\ldots\lambda_t}_{\varkappa_1\ldots\varkappa_s}\nabla_\varrho X^{\lambda_j} + 2\sum_{i=1}^{s} S_{\varkappa_i\varrho}{}^{\sigma} A^{\lambda_1\ldots\lambda_t}_{\varkappa_1\ldots\varkappa_{i-1}\sigma\varkappa_{i+1}\ldots\varkappa_s} X^\varrho - 2\sum_{j=1}^{t} S_{\varrho\sigma}{}^{\lambda_j} A^{\lambda_1\ldots\lambda_{j-1}\varrho\lambda_{j+1}\ldots\lambda_t}_{\varkappa_1\ldots\varkappa_s} X^\sigma.$$

La formule ci-dessus met en évidence que les quantités $\overline{X}(A^{\lambda_1\ldots\lambda_t}_{\varkappa_1\ldots\varkappa_s})$ sont les composantes d'un nouvel affineur mixte de dégre $s+t$. Remarquons que si l'on décompose l'affineur $\overline{A}$ en facteurs d'Aronhold-Clebsch [4])

$$A^{\lambda_1\ldots\lambda_t}_{\varkappa_1\ldots\varkappa_s} = \overset{1}{A}_{\varkappa_1}\overset{2}{A}_{\varkappa_2}\ldots\overset{s}{A}_{\varkappa_s}\underset{1}{A}^{\lambda_1}\underset{2}{A}^{\lambda_2}\ldots\underset{t}{A}^{\lambda_t},$$

on aura la relation symbolique

$$\overline{X}(A^{\lambda_1\ldots\lambda_t}_{\varkappa_1\ldots\varkappa_s}) = \sum_{i=1}^{s}\overset{1}{A}_{\varkappa_1}\ldots\overset{i-1}{A}_{\varkappa_{i-1}}\overline{X}(\overset{i}{A}_{\varkappa_i})\overset{i+1}{A}_{\varkappa_{i+1}}\ldots\overset{s}{A}_{\varkappa_s}\underset{1}{A}^{\lambda_1}\ldots\underset{t}{A}^{\lambda_t} + \sum_{j=1}^{t}\overset{1}{A}_{\varkappa_1}\ldots\overset{s}{A}_{\varkappa_s}\underset{1}{A}^{\lambda_1}\ldots\underset{j-1}{A}^{\lambda_{j-1}}\overline{X}(\underset{j}{A}^{\lambda_j})\underset{j+1}{A}^{\lambda_{j+1}}\ldots\underset{t}{A}^{\lambda_t}.$$

Pour que Xf soit le symbole d'une transformation isomorphique, il faut et il suffit qu'il existe deux fonctions (scalaires) p et q telles que l'on ait identiquement

(4) $$\nabla_\varkappa \overline{X}(T_\lambda) - \overline{X}(\nabla_\varkappa T_\lambda) = p\nabla_\varkappa T_\lambda,$$

(5) $$\nabla_\varkappa \overline{X}(U_\lambda) - \overline{X}(\nabla_\varkappa U_\lambda) = q\nabla_\varkappa U_\lambda,$$

quelque soit le vecteur covariant $\overline{T}\{T_\lambda\}$ et le vecteur contravariant $\overline{U}\{U_\lambda\}$.

[3]) Pour tout ce qui concerne la symbolique adoptée dans cet article nous renvoyons le lecteur au livre bien connu de M. Schouten, Der Ricci-Kalkül 1924.

[4]) J. A. Schouten, l. c. p. 23.

En calculant au moyen de la formule (3) les trois expressions $\overline{X}(T_\lambda)$, $\nabla_\varkappa\overline{X}(T_\lambda)$ et $\overline{X}(\nabla_\varkappa T_\lambda)$, on trouve facilement

$$\overline{X}(T_\lambda) = X^\varrho\nabla_\varrho T_\lambda + T_\varrho\cdot\nabla_\lambda X^\varrho + 2S_{\lambda\varrho}{}^{\sigma}X^\varrho T_\sigma,$$

$$\nabla_\varkappa\overline{X}(T_\lambda) = X^\varrho\cdot\nabla_\varkappa\nabla_\varrho T_\lambda + \nabla_\varkappa X^\varrho\cdot\nabla_\varrho T_\lambda + \nabla_\varkappa T_\varrho\cdot\nabla_\lambda X^\varrho + T_\varrho\cdot\nabla_\varkappa\nabla_\lambda X^\varrho + 2X^\varrho T_\sigma\cdot\nabla_\varkappa S_{\lambda\varrho}{}^{\sigma} + 2S_{\lambda\varrho}{}^{\sigma}T_\sigma\cdot\nabla_\varkappa X^\varrho + 2S_{\lambda\varrho}{}^{\sigma}X^\varrho\cdot\nabla_\varkappa T_\sigma,$$

$$\overline{X}(\nabla_\varkappa T_\lambda) = X^\varrho\cdot\nabla_\varrho\nabla_\varkappa T_\lambda + \nabla_\varrho T_\lambda\cdot\nabla_\varkappa X^\varrho + \nabla_\varkappa T_\varrho\cdot\nabla_\lambda X^\varrho + 2S_{\varkappa\varrho}{}^{\sigma}X^\varrho\cdot\nabla_\sigma T_\lambda + 2S_{\lambda\varrho}{}^{\sigma}X^\varrho\cdot\nabla_\varkappa T_\sigma.$$

Si l'on tient compte de l'identité généralisée de Ricci [5])

$$2\nabla_{[\varkappa}\nabla_{\varrho]}T_\lambda = R_{\varkappa\varrho\lambda}{}^{\sigma}T_\sigma + 2S_{\varkappa\varrho}{}^{\sigma}\cdot\nabla_\sigma T_\lambda,$$

les formules ci-dessus donnent naissance à la relation

$$\nabla_\varkappa\overline{X}(T_\lambda) - \overline{X}(\nabla_\varkappa T_\lambda) = [\nabla_\varkappa\nabla_\lambda X^\varrho + 2\nabla_\varkappa(S_{\lambda\sigma}{}^{\varrho}X^\sigma) - R_{\sigma\varkappa\lambda}{}^{\varrho}X^\sigma]\,T_\varrho.$$

On trouve aussi d'une manière analogue

$$\nabla_\varkappa\overline{X}(U^\lambda) - \overline{X}(\nabla_\varkappa U^\lambda) = -[\nabla_\varkappa\nabla_\varrho X^\lambda + 2\nabla_\varkappa(S_{\varrho\sigma}{}^{\lambda}X^\sigma) - R_{\sigma\varkappa\varrho}{}^{\lambda}X^\sigma]\,U^\varrho.$$

Ces identités montrent que les relations (4) et (5) ne peuvent être satisfaites que si l'on a $p=q=0$ et

(I) $$\nabla_\varkappa\nabla_\lambda X^\mu + 2\nabla_\varkappa(S_{\lambda\alpha}{}^{\mu}X^\alpha) = R_{\alpha\varkappa\lambda}{}^{\mu}X^\alpha.$$

On voit d'après ce qui précède que les équations (I) entraînent les deux relations suivantes

$$\nabla_\varkappa\overline{X}(T) = \overline{X}(\nabla_\varkappa T_\lambda), \quad \nabla_\varkappa\overline{X}(U^\lambda) = \overline{X}(\nabla_\varkappa U^\lambda),$$

d'où l'on déduit au moyen des facteurs symboliques d'Aronhold-Clebsch la relation générale

$$\nabla_\iota\overline{X}(A^{\lambda_1\ldots\lambda_t}_{\varkappa_1\ldots\varkappa_s}) = \overline{X}(\nabla_\iota A^{\lambda_1\ldots\lambda_t}_{\varkappa_1\ldots\varkappa_s}).$$

Les deux opérations ∇_ι et $\overline{X}$ sont donc permutables, si les équations (I) sont satisfaites.

Si la variété A_n est un espace holonome: $R_{\iota\varkappa\lambda}{}^{\mu}=0$, $S_{\varkappa\lambda}{}^{\mu}=0$, et si les variables x^α sont ses coordonnées cartésiennes, les équations (I) deviennent

$$\partial_\varkappa\partial_\lambda X^\mu = 0,$$

d'où

$$X^\mu = a^\mu_\varrho x^\varrho + a^\mu,$$

[5]) J. A. Schouten, l. c., p. 85.

a^{μ}_{ϱ} et a^{μ} étant des constantes arbitraires. Donc, dans ce cas spécial, le groupe Xf se compose d'homographies affines. — Si la variété A_n est sans torsion, les équations (I) se réduisent aux suivantes

$$\nabla_{\varkappa}\nabla_{\lambda} X^{\mu} = R_{\alpha\varkappa\lambda}{}^{\mu} X^{\alpha}.$$

Ces équations ont été obtenues par MM. Eisenhart et Knebelman dans le travail cité plus haut.

2. Maintenant, nous allons chercher les conditions de compatibilité des équations (I). Pour ce but, appliquons à ces équations l'opération de l'alternation des indices $\varkappa$, λ; il viendra

$$\nabla_{[\varkappa}\nabla_{\lambda]} X^{\mu} + 2\nabla_{[\varkappa}(S_{\lambda]\alpha}{}^{\mu} X^{\alpha}) = R_{\alpha[\varkappa\lambda]}{}^{\mu} X^{\alpha}.$$

En ayant égard à l'identité de Ricci-Schouten

$$2\nabla_{[\varkappa}\nabla_{\lambda]} X^{\mu} = -R_{\varkappa\lambda\alpha}{}^{\mu} X^{\alpha} + 2S_{\varkappa\lambda}{}^{\alpha}\nabla_{\alpha} X^{\mu},$$

on en déduit la relation suivante

$$2X^{\alpha}\nabla_{\alpha} S_{\varkappa\lambda}{}^{\mu} - 6S_{[\varkappa\lambda}{}^{\alpha}\nabla_{\alpha]} X^{\mu} + 3R_{[\varkappa\lambda\alpha]}{}^{\mu} X^{\alpha} - 6X^{\alpha}\nabla_{[\varkappa} S_{\lambda\alpha]}{}^{\mu} = 0.$$

Si l'on y tient compte de l'identité [6])

$$R_{[\varkappa\lambda\alpha]}{}^{\mu} = 4S_{[\varkappa\lambda}{}^{\beta} S_{\alpha]\beta}{}^{\mu} + 2\nabla_{[\varkappa} S_{\lambda\alpha]}{}^{\mu}$$

et si l'on développe les calculs, on trouve

$$\begin{aligned}(6)\qquad X^{\alpha}\nabla_{\alpha} S_{\varkappa\lambda}{}^{\mu} + S_{\alpha\lambda}{}^{\mu}\nabla_{\varkappa} X^{\alpha} + S_{\varkappa\alpha}{}^{\mu}\nabla_{\lambda} X^{\alpha} - S_{\varkappa\lambda}{}^{\alpha}\nabla_{\alpha} X^{\mu} + 2S_{\varkappa\alpha}{}^{\beta} S_{\beta\lambda}{}^{\mu} X^{\alpha}\\ + 2S_{\lambda\alpha}{}^{\beta} S_{\varkappa\beta}{}^{\mu} X^{\alpha} - 2S_{\beta\alpha}{}^{\mu} S_{\varkappa\lambda}{}^{\beta} X^{\alpha} = 0.\end{aligned}$$

Le rapprochement de la formule générale (3) montre que cette condition peut être écrite de la manière suivante

$$(7)\qquad \overline{X}(S_{\varkappa\lambda}{}^{\mu}) = 0.$$

Pour obtenir d'autres conditions d'intégrabilité des équations (I) faisons les subir à l'opération de la dérivation covariante ∇_{ι} et à l'opération de l'alternation des indices ι, $\varkappa$. Il vient ainsi

$$(8)\qquad 2\nabla_{[\iota}\nabla_{\varkappa]}\nabla_{\lambda} X^{\mu} + 4\nabla_{[\iota}\nabla_{\varkappa]}(S_{\lambda\alpha}{}^{\mu} X^{\alpha}) = X^{\alpha}\nabla_{\iota} R_{\alpha\varkappa\lambda}{}^{\mu} - X^{\alpha}\nabla_{\varkappa} R_{\alpha\iota\lambda}{}^{\mu}.$$

Cela posé, l'identité géneralisée de Ricci et l'identité de Bianchi [7]) nous donnent respectivement

$$2\nabla_{[\iota}\nabla_{\varkappa]}\nabla_{\lambda} X^{\mu} = R_{\iota\varkappa\lambda}{}^{\alpha}\nabla_{\alpha} X^{\mu} - R_{\iota\varkappa\alpha}{}^{\mu}\nabla_{\lambda} X^{\alpha} + 2S_{\iota\varkappa}{}^{\alpha}\nabla_{\alpha}\nabla_{\lambda} X^{\mu},$$

[6]) J. A. Schouten, l. c. p. 88. [7]) J. A. Schouten, l. c, p. 91.

$$2\nabla_{[\iota}\nabla_{\varkappa]}(S_{\lambda\alpha}{}^{\mu} X^{\alpha}) = R_{\iota\varkappa\lambda}{}^{\beta} S_{\beta\alpha}{}^{\mu} X^{\alpha} - R_{\iota\varkappa\beta}{}^{\mu} S_{\lambda\alpha}{}^{\beta} X^{\alpha} + 2S_{\iota\varkappa}{}^{\beta}\nabla_{\beta}(S_{\lambda\alpha}{}^{\mu} X^{\alpha})$$

et

$$\nabla_{\iota} R_{\varkappa\alpha\lambda}{}^{\mu} + \nabla_{\varkappa} R_{\alpha\iota\lambda}{}^{\mu} + \nabla_{\alpha} R_{\iota\varkappa\lambda}{}^{\mu} = -2(S_{\iota\varkappa}{}^{\beta} R_{\alpha\beta\lambda}{}^{\mu} + S_{\varkappa\alpha}{}^{\beta} R_{\iota\beta\lambda}{}^{\lambda} + S_{\alpha\iota}{}^{\beta} R_{\varkappa\beta\lambda}{}^{\mu}).$$

En portant ces expressions dans l'équation (8) et en y remplaçant les dérivées secondes des coefficients X^{μ} par leurs valeurs tirées des équations (I), on aura

$$\begin{aligned}X^{\alpha}\nabla_{\alpha} R_{\iota\varkappa\lambda}{}^{\mu} + R_{\alpha\varkappa\lambda}{}^{\mu}\nabla_{\iota} X^{\alpha} + R_{\iota\alpha\lambda}{}^{\mu}\nabla_{\varkappa} X^{\alpha} + R_{\iota\varkappa\alpha}{}^{\mu}\nabla_{\lambda} X^{\alpha} - R_{\iota\varkappa\lambda}{}^{\alpha}\nabla_{\alpha} X^{\mu}\\ + 2S_{\iota\beta}{}^{\alpha} R_{\alpha\varkappa\lambda}{}^{\mu} X^{\beta} + 2S_{\varkappa\beta}{}^{\alpha} R_{\iota\alpha\lambda}{}^{\mu} X^{\beta} + 2S_{\lambda\beta}{}^{\alpha} R_{\iota\varkappa\alpha}{}^{\mu} X^{\beta} - 2S_{\alpha\beta}{}^{\mu} R_{\iota\varkappa\beta}{}^{\alpha} X^{\beta} = 0.\end{aligned}$$

En vertu de la formule (3) la relation ci-dessus peut s'écrire comme il suit

$$(9)\qquad \overline{X}(R_{\iota\varkappa\lambda}{}^{\mu}) = 0.$$

Aux conditions (7) et (9) on doit adjoindre toutes celles qui s'en déduisent au moyen de la différentiation covariante. Or, les équations (I) entraînant la permutabilité des opérations ∇ et $\overline{X}$ (v. n° 1), nous voyons que toutes les conditions d'intégrabilité des équations (I) sont comprises dans le système de relations suivantes

$$(\mathrm{II})\qquad \overline{X}(R_{\iota\varkappa\lambda}{}^{\mu}) = 0, \qquad \overline{X}(S_{\varkappa\lambda}{}^{\mu}) = 0,$$

$$(\mathrm{III})\qquad \overline{X}(\nabla_{\alpha_1}\nabla_{\alpha_2}\cdots\nabla_{\alpha_r} R_{\iota\varkappa\lambda}{}^{\mu}) = 0, \qquad \overline{X}(\nabla_{\beta_1}\nabla_{\beta_2}\cdots\nabla_{\beta_s} S_{\varkappa\lambda}{}^{\mu}) = 0$$
$$(r, s = 1, 2, 3, \ldots).$$

Il est évident, d'après la forme de la formule (3), que les équations (II) sont linéaires et homogènes par rapport aux inconnues X^{ν} et à leurs dérivées covariantes du premier ordre. Il en est de même des équations (III), les dérivées d'ordres supérieurs qui y se présentent pouvant être éliminées au moyen des équations (I). Si les conditions (II) et (III) se réduisent à un nombre fini d'équations admettant des solutions différentes de zéro, le système formé d'équations (I), (II) et (III) est un système complètement intégrable et la variété A_n admet des transformations infinitésimales isomorphiques.

3. Lorsque la variété A_n est un espace de Cartan, on a par définition

$$(10)\qquad \nabla_{\iota} R_{\varkappa\lambda\mu}{}^{\nu} = 0, \qquad \nabla_{\varkappa} S_{\lambda\mu}{}^{\nu} = 0.$$

Dans ce cas, les relations (III) étant satisfaites identiquement, les conditions d'intégrabilité des équations (I) se réduisent aux équations (II). En posant

$$B_{\lambda}{}^{\mu} = \nabla_{\lambda} X^{\mu} + 2S_{\lambda\alpha}{}^{\mu} X^{\alpha},$$

le système formé d'équations (I) et (II) peut être remplacé par les équations suivantes

(11 a) $$\nabla_\lambda X^\mu + 2\, S_{\lambda\alpha}^{\cdot\cdot\mu} X^\alpha = B_\lambda^{\cdot\mu},$$

(11 b) $$\nabla_\varkappa B_\lambda^{\cdot\mu} = R_{\alpha\varkappa\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\mu} X^\alpha,$$

(11 c) $$S_{\alpha\lambda}^{\cdot\cdot\mu} B_\varkappa^{\cdot\alpha} + S_{\varkappa\alpha}^{\cdot\cdot\mu} B_\lambda^{\cdot\alpha} - S_{\varkappa\lambda}^{\cdot\cdot\alpha} B_\alpha^{\cdot\mu} = 0,$$

(11 d) $$R_{\alpha\varkappa\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\mu} B_\iota^{\cdot\alpha} + R_{\iota\alpha\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\mu} B_\varkappa^{\cdot\alpha} + R_{\iota\varkappa\alpha}^{\cdot\cdot\cdot\mu} B_\lambda^{\cdot\alpha} - R_{\iota\varkappa\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\alpha} B_\alpha^{\cdot\mu} = 0.$$

Les équatiions (11 c) et (11 d) ont été déduites des équations (II), en y substituant à la place des dérivées $\nabla_\lambda X^\mu$ les expressions tirées de (11 a) et en tenant compte des hypothèses (10). Nous allons montrer que toute variété de Cartan admet une transformation infinitésimale isomorphique. D'après la proposition générale établie à la fin du n⁰ 2 tout revient à démontrer que le système formé d'équations (11 c) et (11 d), linéaires et homogènes par rapport aux inconnues X^ν et $B_\nu^{\cdot\lambda}$, admet des solutions différentes de zéro. En effet, l'identité de Ricci-Schouten nous donne

$$2\nabla_{[\varrho}\nabla_{\sigma]} S_{\varkappa\lambda}^{\cdot\cdot\mu} = R_{\varrho\sigma\varkappa}^{\cdot\cdot\cdot\alpha} S_{\alpha\lambda}^{\cdot\cdot\mu} + R_{\varrho\sigma\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\alpha} S_{\varkappa\alpha}^{\cdot\cdot\mu} - R_{\varrho\sigma\alpha}^{\cdot\cdot\cdot\mu} S_{\varkappa\lambda}^{\cdot\cdot\alpha} + 2\, S_{\varrho\sigma}^{\cdot\cdot\alpha} \nabla_\alpha S_{\varkappa\lambda}^{\cdot\cdot\mu},$$

$$\begin{aligned} 2\nabla_{[\varrho}\nabla_{\sigma]} R_{\iota\varkappa\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\mu} = {} & R_{\varrho\sigma\iota}^{\cdot\cdot\cdot\alpha} R_{\alpha\varkappa\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\mu} + R_{\varrho\sigma\varkappa}^{\cdot\cdot\cdot\alpha} R_{\iota\alpha\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\mu} + R_{\varrho\sigma\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\alpha} R_{\iota\varkappa\alpha}^{\cdot\cdot\cdot\mu} \\ & - R_{\varrho\sigma\alpha}^{\cdot\cdot\cdot\mu} R_{\iota\varkappa\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\alpha} + 2\, S_{\varrho\sigma}^{\cdot\cdot\alpha} \nabla_\alpha R_{\iota\varkappa\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\mu}. \end{aligned}$$

En ayant égard aux hypothèses (10), les relations ci-dessus peuvent s'écrire

(12) $$\begin{aligned} & S_{\alpha\lambda}^{\cdot\cdot\mu} R_{\varrho\sigma\varkappa}^{\cdot\cdot\cdot\alpha} + S_{\varkappa\alpha}^{\cdot\cdot\mu} R_{\varrho\sigma\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\alpha} - S_{\varkappa\lambda}^{\cdot\cdot\alpha} R_{\varrho\sigma\alpha}^{\cdot\cdot\cdot\mu} = 0, \\ & R_{\alpha\varkappa\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\mu} R_{\varrho\sigma\iota}^{\cdot\cdot\cdot\alpha} + R_{\iota\alpha\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\mu} R_{\varrho\sigma\varkappa}^{\cdot\cdot\cdot\alpha} + R_{\iota\varkappa\alpha}^{\cdot\cdot\cdot\mu} R_{\varrho\sigma\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\alpha} - R_{\iota\varkappa\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\alpha} R_{\varrho\sigma\alpha}^{\cdot\cdot\cdot\mu} = 0. \end{aligned}$$

Posons

(13) $$\overline{B}_\lambda^{\cdot\mu} = R_{\varrho\sigma\varkappa}^{\cdot\cdot\cdot\mu} A^{\varrho\sigma},$$

où l'on a désigné par $A^{\varrho\sigma}$ un affineur contravariant quelconque. En multipliant les équations (12) par $A^{\varrho\sigma}$ et en sommant par rapport aux indices ϱ et σ, on a

$$S_{\alpha\lambda}^{\cdot\cdot\mu} \overline{B}_\varkappa^{\cdot\alpha} + S_{\varkappa\alpha}^{\cdot\cdot\mu} \overline{B}_\lambda^{\cdot\alpha} - S_{\varkappa\lambda}^{\cdot\cdot\alpha} \overline{B}_\alpha^{\cdot\mu} = 0,$$

$$R_{\alpha\varkappa\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\mu} \overline{B}_\iota^{\cdot\alpha} + R_{\iota\alpha\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\mu} \overline{B}_\varkappa^{\cdot\alpha} + R_{\iota\varkappa\alpha}^{\cdot\cdot\cdot\mu} \overline{B}_\lambda^{\cdot\alpha} - R_{\iota\varkappa\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\alpha} \overline{B}_\alpha^{\cdot\mu} = 0.$$

En rapprochant ces relations des équations (11 c) et (11 d), on voit bien que les expressions (13) donnent une solution de ces dernières équations, quelque soit l'affineur contravariant $A^{\varrho\sigma}$. Les expressions (13) n'étant pas identiquement nulles, notre proposition est ainsi établie. — Le raisonnement précédent tombe en défaut, si la variété $A_\varkappa$ est sans courbure. Néanmoins la proposition ne cesse pas d'être vraie.. Pour la démontrer partons de l'identité [8])

[8]) J. A. Schouten, l. c. p. 88.

$$R_{\iota\varkappa\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\mu} = 4\, S_{[\iota\varkappa}^{\cdot\cdot\alpha} S_{\lambda]\alpha}^{\cdot\cdot\mu} + 2\, \nabla_{[\iota} S_{\varkappa\lambda]}^{\cdot\cdot\mu}$$

qui, dans le cas d'une variété cartanienne sans courbure, prend la forme

(14) $$S_{\iota\varkappa}^{\cdot\cdot\alpha} S_{\lambda\alpha}^{\cdot\cdot\mu} + S_{\varkappa\lambda}^{\cdot\cdot\alpha} S_{\iota\alpha}^{\cdot\cdot\mu} + S_{\lambda\iota}^{\cdot\cdot\alpha} S_{\varkappa\alpha}^{\cdot\cdot\mu} = 0.$$

Posons

(15) $$\overline{\overline{B}}_\lambda^{\cdot\mu} = S_{\lambda\iota}^{\cdot\cdot\mu} A^\iota,$$

où l'on a désigné par A^ι les composantes d'un vecteur contravariant quelconque. Si l'on multiplie les equations (14) par A^ι et si l'on fait la somme par rapport à l'indice ι, on obtient

$$S_{\alpha\lambda}^{\cdot\cdot\mu} \overline{\overline{B}}_\varkappa^{\cdot\alpha} + S_{\varkappa\alpha}^{\cdot\cdot\mu} \overline{\overline{B}}_\lambda^{\cdot\alpha} - S_{\varkappa\lambda}^{\cdot\cdot\alpha} \overline{\overline{B}}_\alpha^{\cdot\mu} = 0.$$

Ceci montre que les équations (11 c) admettent des solutions en $B_\lambda^{\cdot\mu}$ différentes de zéro; les équations (11 d) sont par hypothèse ($R_{\iota\varkappa\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\mu} = 0$) identiquement satisfaites.

Le rapprochement des résultats obtenus plus haut met en évidence que le système formé d'équations (11 a)—(11 d) est un système mixte complètement intégrable admettant des solutions différentes de zéro. Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante:

Toute variété de M. Cartan admet au moins une transformation infinitésinale isomorhique [9]); la détermination de ces transformation revient à l'intégration du système mixte forme d'équations (11 a)—(11 d).

Ajoutons que, si la variété A_n est sans courbure, le système susmentionné admet la solution définie par les formules

$$\nabla_\lambda X^\mu = 0, \qquad B_\lambda^{\cdot\mu} = 2\, S_{\lambda\alpha}^{\cdot\cdot\mu} X^\alpha.$$

Cette solution correspond à une translation parallèle. On obtient une autre solution, si l'on pose

$$B_\lambda^{\cdot\mu} = 2\, S_{\lambda\alpha}^{\cdot\cdot\mu} A^\alpha, \qquad \nabla_\lambda A^\mu = 0.$$

Les coefficients X^μ doivent satisfaire dans ce cas aux relations

$$\nabla_\lambda (X^\mu - A^\mu) + 2\, S_{\lambda\alpha}^{\cdot\cdot\mu} (X^\alpha - A^\alpha) = 0.$$

Il est facile de vérifier directement que les conditions d'intégrabilité de ces équations sont identiquement satisfaites.

4. Supposons maintenant que la variété A_n soit une variété riemannienne sans torsion. Nous allons montrer que le groupe de transforma-

[9]) Le groupe d'isomorphie d'une variété cartanienne sans torsion a été étudié par M. Cartan dans sons Mémoire cité au commencement de cet article; v. en particulier Ch. IV.

tions isomorphiques de cette variété contient comme sous-groupe les mouvements rigides. En effet, si

$$Xf = X^{\varrho}\,\partial_{\varrho} f$$

est le symbole d'un mouvement infinitésimal rigide, les composantes covariantes X_{λ} du vecteur $\overline{X}\{\overline{X}^{\mu}\}$ satisfont aux équations de Killing

$$\nabla_{\lambda} X_{\mu} + \nabla_{\mu} X_{\lambda} = 0. \tag{16}$$

On sait [10]) que les équations de Killing entraînent les relations suivantes

$$\nabla_{\varkappa} \nabla_{\lambda} X_{\mu} = R_{\alpha\varkappa\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot} X^{\alpha},$$

qui dans le cas d'une variété riemannienne sans torsion sont équivalentes aux équations (I), c'est ce qu'il fallait démontrer. Ce point établi, nous en concluons que la détermination du groupe de mouvements rigides d'une variété riemannienne revient à l'etude du systême formé d'équations suivantes

$$\nabla_{\lambda} X_{\mu} + \nabla_{\mu} X_{\lambda} = 0,$$

$$\nabla_{\varkappa} \nabla_{\lambda} X_{\mu} = R^{\alpha}_{\cdot\varkappa\lambda\mu} X_{\alpha},$$

$$\overline{X}(R_{\varkappa\lambda\mu\nu}) = 0, \qquad \overline{X}(\nabla_{\alpha_1}\ldots\nabla_{\alpha_r} R_{\varkappa\lambda\mu\nu}) = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots).$$

A propos de ce système on peut énoncer une proposition analogue à celle donnée au n⁰ 2.

Streszczenie.

Przekształceniami izomorficznemi przestrzeni o koneksji afinalnej nazywamy za E. Cartanem takie przekształcenia punktowe przestrzeni, które zachowują jej koneksję. Celem artykułu jest znalezienie kryterjów, zapomocą których można rozstrzygnąć pytanie, czy dana przestrzeń o koneksji afinalnej dozwala na nieskończonostkowe przekształcenie izomorficzne. Ust. 1 i 2 poświęcone są ogólnej przestrzeni o koneksji afinalnej. ust. 3 zawiera zastosowania poprzednich rozważań do przetrzeni Cartana, t. j. przestrzeni, w których przesunięcie równolegle zachowuje krzywiznę i skręcenie; ostatni wreszcie ustęp poświęcony jest przestrzeniom Riemanna bez skręcenia.

10) L. P. Eisenhart, Riemannian Geometry, 1926, p. 237.

Einige photometrische Messungen des Lichtwechsels von *Eros*

(Pomiary fotometryczne zmiany blasku *Erosa*)

von

J. Gadomski

Während der diesjährigen Opposition (1930—31) habe ich 153 Anschlüsse von *Eros* an die benachbarten Vergleichsterne mit Hilfe eines Keilphotometers durchgeführt. Das Photometer wurde mit einem Refraktor von Cooke (134 mm Object., Vergr. 44) der Warschauer Universitätssternwarte verbunden. Die Beobachtungen wurden in dem Zeitraume 1930 XI 12ᵈ—1931 II 17ᵈ angestellt. Am Anfang dieser Zeitperiode, als *Eros* hoch am nördlichem Himmel stand und grosse Lichtwechselamplitude aufwies, war das Wetter in Warschau sehr ungünstig und der Glanz des Planeten für das benutzte Instrument zu schwach; später, nachdem das Wetter sich etwas verbessert hatte und die allgemeine Helligkeit von *Eros* bedeutend zunahm, stand der Planet schon tief im Süden in der Nähe des Horizontes und die Amplitude seines Glanzes war nur gering. Deshalb war ich im Stande ausser getrennten, zerstreuten Messungen, nur zwei Minima am 9 u. 10 Februar 1931 mit Beobachtungen zu belegen.

Während der Messungen wurde *Eros* an benachbarte Vergleichsterne der Liste von A. Koppf (A. N. 5375 u. 5403), deren photovisuelle Helligkeiten in Yerkes Observatory (A. N. 5728) ausgemessen worden sind, angeschlossen. Alle Beobachtungen wurden vom Einfluss der differentiellen Extinktion befreit.

In der unten angegebenen Tafel bezeichnet n die Zahl der Einstellungen des Keiles an *Eros*.