Sur quelques questions de calcul des probabilités

(Z dziedziny rachunku prawdopodobieństwa)

par

M. Paul Lévy

Le présent travail contient des observations sur plusieurs questions indépendantes les unes des autres. Le seul lien qui existe entre elles est qu'elles se rapportent à des questions traitées dans mon ouvrage sur le calcul des probabilités (Paris, Gauthier Villars, 1925). Différents savants, parmi lesquels je tiens surtout à remercier MM. F. P. Cantelli, M. Fréchet, et H. Steinhaus, m'ont signalé plusieurs passages de cet ouvrage nécessitant des explications. L'objet de trois des quatre parties de ce travail est de donner sur ces questions les précisions nécessaires; seul le chapitre relatif au problème des moments ne constitue pas une rectification.

Tout ce travail a d'ailleurs été rédigé le manière à pouvoir être compris des lecteurs qui ne connaîtraient pas l'ouvrage cité.

Le titre de chacune des parties est suivi de l'indication du passage de l'ouvrage cité auquel elle se réfère.

I. Sur la limite d'une loi de probabilité variable définie par sa fonction caractéristique (p. 195 – 203).

Soit une variable aléatoire X, dépendant d'une loi de probabilité L_n, définie par sa fonction des probabilités totales $F_n(x)$; rappelons que nous désignons ainsi la probabilité de l'inégalité $X < x$, sauf pour les valeurs de x auxquelles correspond une probabilité positive. Pour ces valeurs, nous conviendrons que $F_n(x)$ désigne indifféremment la probabilité de $X < x$, ou celle de $X \leqslant x$, ou n'importe quelle valeur intermédiaire. La courbe Γ_n représentative de la fonction $F_n(x)$ est alors une courbe continue.

La loi L_n, définie par une fonction $F_n(x)$, tend vers la loi L, définie par $F(x)$, si $F_n(x)$ tend vers $F(x)$. La convergence est alors uniforme, sauf peut-être au voisinage des points de discontinuité de $F(x)$. La courbe Γ_n tend vers la courbe Γ représentant $F(x)$, et, si l'on compte la distance de ces deux courbes sur une parallèle D à la deuxième bissectrice des axes de coordonnées, cette distance tend vers zéro, et cela d'une manière uniforme par rapport au paramètre dont dépend la droite D.

Supposons maintenant que $F_n(x)$ tende vers une limite $F(x)$ dont on ne sache pas si elle définit une loi de probabilité. C'est nécessairement une fonction monotone non décroissante, mais il est possible que la variation totale

$$\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} dF(x) = F(+\infty) - F(-\infty) \tag{1}$$

soit inférieure à l'unité. Dans ce cas il y a condensation à l'infini (totale, si cette variation est nulle; partielle dans le cas contraire). Naturellement, dans ce cas, la convergence de Γ_n vers Γ cesse d'être uniforme.

Il peut arriver aussi qu'il y ait condensation totale en un point, c'est-à-dire que la loi limite ne comporte qu'une seule valeur possible, de probabilité unité.

Ces remarques sont importantes au point de vue de la recherche du type limite d'une loi de probabilité variable. Nous disons que la loi L_n est d'un type tendant vers une limite si l'on peut déterminer des suites de constantes λ_n et μ_n ($\lambda_n > 0$) de manière que $F_n(\lambda_n x + \mu_n)$ tende vers une limite $F(x)$, et cela sans qu'il y ait, ni condensation (partielle ou totale) à l'infini, ni condensation totale en un point à distance finie. Sans cette double restriction, le choix des constantes λ_n et μ_n assurant la convergence serait toujours possible, mais on ne saurait dire qu'on a mis en évidence le type de loi vers lequel converge celui de la loi L_n.

Supposons maintenant la loi L_n définie par sa fonction caractéristique $\varphi_n(t)$; (rappelons que nous désignons ainsi la valeur probable de e^{itX}). Soit de même $\varphi(t)$ la fonction caractéristique de la loi L. Nous avons montré dans l'ouvrage cité (p. 195—200) que la condition nécessaire et suffisante pour que la loi L_n tende vers la loi L est que $\varphi_n(t)$ tende vers $\varphi(t)$, et cela uniformément dans tout intervalle fini. Mais il est important en outre de savoir ce que l'on peut conclure si l'on sait seulement que $\varphi_n(t)$ tend vers une fonction limite $\varphi(t)$, et cela uniformément dans tout intervalle fini, mais sans que l'on sache si $\varphi(t)$ est la fonction caractéristique d'une loi L. Les indications données sur ce sujet (loc. cit., p. 202—203) étaient tout à fait insuffisantes.

Sans reprendre le raisonnement par lequel nous avons traité le cas où l'on sait que $\varphi(t)$ est la fonction caractéristique d'une loi L, disons qu'il permet,

sans modification essentielle, de montrer que, pour m et n assez grands, la distance des courbes Γ_m et Γ_n, comptée sur une parallèle déterminée à la première bissectrice, est inférieure à un nombre positif arbitrairement petit. Il en résulte que le point où Γ_n coupe cette droite a une limite, et que par suite Γ_n tend vers une courbe limite Γ; on peut même observer que la convergence de Γ_n vers Γ est uniforme pour tout arc fini de Γ. Mais il reste à se demander si Γ correspond à une loi de probabilité véritable, évitant la condensation totale ou partielle à l'infini; s'il en est ainsi, la loi limite L ainsi définie aura bien pour fonction caractéristique la limite de $\varphi_n(t)$, c'est-à-dire $\varphi(t)$.

Remarquons d'abord, en vue de l'application à la détermination du type limite, que la condensation totale en un point se reconnaît à ce que $\varphi(t)$ est de la forme $e^{it\xi}$, ξ étant l'abscisse de ce point. Il ne peut donc y avoir de difficulté à reconnaître si l'on a évité ou non cette circonstance.

Quant à la condensation totale ou partielle à l'infini, nous allons montrer qu'elle est exclue par l'hypothèse que $\varphi_n(t)$ converge vers $\varphi(t)$, et cela uniformément dans un intervalle comprenant la valeur $t=0$. C'est là le résultat nouveau que nous voulions indiquer, et qui complète ceux que nous avions établis antérieurement sur ce sujet.

Remarquons d'abord, pour démontrer ce résultat, que la convergence uniforme des fonctions continues $\varphi_n(t)$ vers $\varphi(t)$ implique la continuité de $\varphi(t)$, dans l'intervalle considéré. De plus, comme $\varphi_n(0)=1$, on a $\varphi(0)=1$. Supposons alors $\alpha<1$ et montrons que cette hypothèse est en contradiction avec celles déjà faites.

Choisissons à cet effet $\varepsilon < \frac{1-\alpha}{3}$, puis T positif assez petit pour que

$$\left|\frac{1}{T}\int_0^T \varphi(t)\,dt\right| > 1-\varepsilon > \alpha + 2\varepsilon, \tag{2}$$

puis $X > \frac{2}{\varepsilon T}$, et n assez grand pour que

$$\int_{-X}^{+X} dF(x) = \alpha_n < \alpha + \varepsilon;$$

cela est possible, d'après la définition (1) de α. On a

$$\int_0^T \varphi_n(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^T e^{itx}\,dt\right) d\,F_n(x).$$

L'intégrale en t, au second membre, a son module borné supérieurement à la fois par T et par $\frac{2}{|x|}$; en utilisant la première de ces bornes si $|x| < X$ et la seconde si $|x| \geqslant X$, il vient

$$\left|\frac{1}{T}\int_0^T \varphi_n(t)\,dt\right| \leqslant \alpha_n + \frac{2(1-\alpha_n)}{TX} \leqslant \alpha + 2\varepsilon.$$

Cette égalité, à cause de la convergence uniforme de $\varphi_n(t)$ vers $\varphi(t)$, doit rester vraie à la limite, ce qui est en contradiction avec la formule (2). Le résultat énoncé est ainsi établi.

II. Le problème des moments de Stieltjes (p. 160 à 163 et 258 à 273).

On appelle moment (ou coefficient caractéristique) d'ordre p, et nous désignerons par $E_p = m_p^p$, la valeur probable de x^p $(p = 0, 1, 2, \ldots)$. Si la fonction $F(x)$ définissant la loi de probabilité est continue et admet une dérivée $f(x)$, les moments sont définis en partant de $f(x)$ par la formule

$$E_p = \int_{-\infty}^{+\infty} x^p f(x)\,dx.$$

Ce sont les moments de la fonction $f(x)$. Il faut d'ailleurs distinguer du cas général le cas du calcul des probabilités, où $f(x) \geqslant 0$ et $E_0 = 1$; nous ferons d'ailleurs abstraction dans la suite de cette dernière condition, (ce qui revient à multiplier $f(x)$ par une constante positive arbitraire).

Dans ce cas, il peut arriver qu'une fonction soit déterminée par ses moments. Nous avons montré dans l'ouvrage cité[1]) qu'il en est ainsi si les moments sont tous finis et si $m_p = O(p)$; on peut aussi arriver au même résultat en remplaçant l'hypothèse sur la croissance des m_p par celle d'une décroissance rapide de $f(x)$ pour les grandes valeurs de $f(x)$.

Par contre, dans le cas général, une fonction n'est pas déterminée par ses moments. Il existe des fonctions non identiquement nulles dont tous les moments sont nuls. Tel est le cas, découvert par Stieltjes et rappelé par M. Borel[2]), de la fonction

(3) $$g(x) = e^{-\sqrt[4]{|x|}} \sin \sqrt[4]{|x|}.$$

[1]) p. 160—163. Indiquons que p. 161, l. 3, au lieu de „tendant ainsi vers $f(x)$" il faut lire „tendant en moyenne vers $f(x)$"; p. 163, l. 8, il faut lire „si le rapport $\frac{m_p}{p}$ reste fini pour p infini".

[2]) Traité du Calcul des Probabilités et de ses applications, t. I, fasc. I, p. 121.

Il n'y a pas, comme on pourrait d'abord le croire, de contradiction entre ces deux résultats. Si $g(x)$ est une fonction à moments nuls, $f(x) + \lambda g(x)$ a les mêmes moments que $f(x)$; cela n'empêche pas que $f(x)$ puisse être une une fonction toujours positive ou nulle déterminée par ses moments; il faut seulement conclure, dans ce cas, que, parmi les fonctions $f(x) + \lambda g(x)$, c'est la seule qui conserve un signe constant. On s'explique aisément que ce soit le cas si toutes les fonctions à moments nuls ont, comme la fonction (3), une infinité de changements de signes, tandis qu'une fonction $f(x)$ déterminée par ses moments tend rapidement vers zéro, et est de la forme $o(|g(x)|)$, sinon pour tout x très grand, du moins pour une infinité de valeurs de x convenablement choisies.

Tout cela est classique. Si je reviens ici sur cette question, c'est pour indiquer de nouveaux exemples de fonctions dont tous les moments sont nuls. Ils se déduisent aisément des formules (113), (120) et (121) de l'ouvrage cité (p. 262, 275, 276); je renvoie à cet ouvrage pour la démonstration de ces formules, que je prendrai ici pour point de départ.

La formule (113), en changeant les notations, s'écrit

$$\int_0^\infty e^{-t^\beta} \cos\left(t^\beta \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\beta - ct\right) dt = 0, \qquad (0 < \beta < 1,\ c \geqslant 0)$$

ou, en posant $t^2 = x$, $\beta = 2\alpha$,

(4) $$\int_0^\infty e^{-x^\alpha} \cos\left(x^\alpha \operatorname{tg}\pi\alpha - c\sqrt{x}\right) \frac{dx}{\sqrt{x}} = 0, \quad (0 < \alpha < \tfrac{1}{2},\ c \geqslant 0)$$

Il suffit de dériver cette formule par rapport à c pour constater que les fonctions, nulles pour x négatif et égales pour x positif à l'une des expressions,

(5) $$\begin{cases} g_{2p}(x) = x^{p-\frac{1}{2}} e^{-x^\alpha} \cos\left(x^\alpha \operatorname{tg}\pi\alpha - c\sqrt{x}\right), \\ g_{2p+1}(x) = x^p e^{-x^\alpha} \sin\left(x^\alpha \operatorname{tg}\pi\alpha - c\sqrt{x}\right), \end{cases}$$

$(p = 0, 1, 2, \ldots)$, sont des fonctions à moments nuls. De chacune de ces fonctions, on peut naturellement en déduire une infinité d'autres en remplaçant $g(x)$ par $x^{\frac{1}{q}-1} g(x^{\frac{1}{q}})$, $(q = 2, 3, \ldots)$; on peut aussi remarquer que la fonction paire, égale pour x positif à $x\,g(x^2)$, est aussi une fonction à moments nuls; il en est de même de la fonction impaire égale pour x positif à $g(x^2)$.

Pour $c = 0$, $\alpha = \frac{1}{4}$, la fonction $g_1(x)$ se réduit à la fonction (3) citée par M. Borel. Pour $c = 0$, et α quelconque entre 0 et $\frac{1}{2}$, la démonstration élémentaire indiquée par M. Borel, qui s'appuie sur le théorème des résidus, se généralise aisément; pour $c > 0$, je ne connais pas de démonstration indépendante des considérations qui m'ont conduit à la formule (113) de l'ouvrage cité.

La formule (120) est une généralisation de la formule (113), dans laquelle on introduit une fonction positive périodique $P(u)$, de période 1, à cela près arbitraire. $P\left(\frac{\alpha \log x}{\log 2}\right)$ et alors une fonction qui ne change pas quand x^α double. En raisonnant sur la formule (120) en question comme nous venons de le faire sur la formule (113), on arrive à ce résultat que les fonctions

$$
(6) \qquad \left\{
\begin{array}{l}
x^{p-\frac{1}{2}} e^{-x^\alpha P\left(\frac{\alpha \log x}{\log 2}\right)} \cos\left[x^\alpha \operatorname{tg} \pi \alpha P\left(\frac{\alpha \log x}{\log 2}\right) - c\sqrt{x}\right], \\
x^p \, e^{-x^\alpha P\left(\frac{\alpha \log x}{\log 2}\right)} \sin\left[x^\alpha \operatorname{tg} \pi \alpha P\left(\frac{\alpha \log x}{\log 2}\right) - c\sqrt{x}\right],
\end{array}
\right.
$$

$$
\left(0 < \alpha < \tfrac{1}{2}, \quad c \geqslant 0, \quad p = 0, 1, 2, \ldots\right),
$$

sont des fonctions à moments nuls.

Enfin le troisième résultat que je voulais indiquer dans cet ordre d'idées, qui se rattache à la formule (121) de l'ouvrage cité, se déduit du précédent en supposant $P(u)$ infini, sauf si la partie fractionnaire de u est comprise dans un petit intervalle $(u_0, u_0 + du_0)$; dans ce petit intervalle $P(u)$ prendrait une valeur positive λ. Posant alors

$$
2^{u_0} = k^\alpha, \qquad x_n = k\, 2^{\frac{n}{\alpha}},
$$

$$
m_n = x^{p+\frac{1}{2}} e^{-\lambda x_n^\alpha} \cos\left(\lambda x_n^\alpha \operatorname{tg} \pi \alpha - c\sqrt{x_n}\right),
$$

$$
m'_n = x^{p+1} e^{-\lambda x_n^\alpha} \sin\left(\lambda x_n^\alpha \operatorname{tg} \pi \alpha - c\sqrt{x_n}\right),
$$

on a, α, c, et p vérifiant toujours les conditions indiquées à propos des formules (6),

$$
(7) \qquad \sum_{-\infty}^{+\infty} m_n x_n^{p'} = \sum_{-\infty}^{+\infty} m'_n x_n^{p'} = 0, \qquad (p' = 0, 1. 2, \ldots),
$$

c'est-à-dire qu'en plaçant en chacun des points d'abscisses x_n une masse égale à m_n (ou à m'_n), on a une répartition de masses discontinues et dont tous les moments sont nuls. C'est là le fait élémentaire, qui par intégration permet de retrouver la propriété des fonctions (6), dont on s'explique ainsi qu'elle soit indépendante de la fonction $P(u)$.

III. Formules directes pour la composition des probabilités (p. 186—189).

La formule fondamentale de cette théorie est la formule

$$
(8) \qquad H(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(z - x)\, d\, F(x),
$$

dans laquelle $F(x)$, $G(y)$, et $H(z)$ désignent respectivement les fonctions des probabilités totales relatives à deux variables indépendantes x et et y et à leur somme z. La manière dont cette formule est justifiée dans l'ouvrage cité n'étant pas correcte, ainsi que M. Fréchet me l'a fait remarquer, je reviens ici sur cette question.

Par définition même de l'indépendance de deux lois de probabilité, si α et β sont les probabilités que x et y soient respectivement dans deux petits intervalles dx et dy, $\alpha\beta$ est la probabilité que le point de coordonnées cartésiennes x, y soit dans un petit rectangle $dx\, dy$. Par intégration, on en déduit la probabilité relative au demi-plan $x + y < z$, probabilité qui n'est autre que $H(z)$. Il ne semble pas utile d'insister sur les détails de ce raisonnement. Remarquons seulement que l'on établit ainsi la formule (8), sauf pour les points de discontinuité de $H(z)$, c'est-à-dire sauf si z est de la forme $\xi + \eta$, ξ et η désignant respectivement les points de discontinuité de $F(x)$ et $G(y)$. Cette restriction est nécessaire, l'intégrale de Stieltjes (8) n'ayant un sens précis que si les fonctions $F(x)$ et $G(z - x)$ ne sont pas simultanément discontinues, et d'ailleurs n'est pas gênante, la loi dont dépend z étant bien définie si l'on connaît $H(z)$ en tout point où cette fonction est continue.

La justification de la formule (8) donnée dans l'ouvrage cité soulevait une difficulté qu'il est nécessaire de résoudre pour l'étude des probabilités non indépendantes. Si l'on choisit d'abord x, son choix dépendant de la loi définie par $F(x)$, puis que l'on effectue une expérience, dont les conditions dépendent du choix de x, qui donne à un évènement E une probabilité $\lambda(x)$, on sait que la probabilité a priori de E est

$$
(9) \qquad \alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda(x)\, d\, F(x),
$$

du moins si, ce que nous supposerons, la fonction $\lambda(x)$ est continue. La valeur pratique de cette formule ne saurait être contestée. Mais il s'agit de préciser sa relation avec les axiomes fondamentaux du calcul des probabilités. Les observations de M. Fréchet m'ont amené à reconnaître que la question était moins simple que je ne l'avais cru d'abord.

Je ne reviendrai pas sur le cas simple et bien connu où, la loi dont dépend x étant discontinue, l'intégrale (9) se réduit à une somme ordinaire ou à une série, de la forme

$$
\alpha = \Sigma\, \lambda(x_i)\, \alpha_i,
$$

α_i désignant la probabilité de la valeur x_i. Le cas général ne peut pas se traiter de la même manière, parce que, l'évènement E étant réalisable d'une infinité non dénombrable de manières, on ne peut pas obtenir sa probabilité en ajoutant celles de chacune de ces manières. La donnée de $\lambda(x)$ n'est dès lors pas suffisante par elle-même; il faut prendre comme élément, non la valeur isolée de x, mais un petit intervalle dx, et se donner d'une manière ou de l'autre la probabilité de E lorsqu'on sait que x est dans un petit intervalle donné.

On est alors amené à raisonner comme on le fait pour expliquer la représentation des aires par des intégrales définies. Pour l'étude des aires, on prend comme point de départ la remarque que l'aire du trapèze curviligne correspondant à l'intégrale

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

est comprise entre $(b-a)m$ et $(b-a)M$, si la fonction $f(x)$ est comprise entre m et M. Cette remarque intuitive, facile à vérifier dans le cas des aires antérieurement définies, sert à passer de ces cas élémentaires au cas général. Au point de vue axiomatique, c'est un axiome nouveau, le mot axiome étant pris dans le sens „complément à une définition qui autrement serait insuffisante".

De même, il y a lieu de considérer comme un nouvel axiome l'énoncé suivant: si un évènement E dépend d'une expérience dont les conditions dépendent d'une expérience antérieure, si dans chacun des cas possibles (ces cas étant exclusifs les uns des autres), la probabilité de E, évaluée par quelqu'un qui sait dans quel cas on se trouve, est comprise entre m et M, sa probabilité a priori (évaluée par quelqu'un qui ignore cette donnée), est aussi comprise entre m et M. Si les cas possibles sont en nombre fini ou constituent une infinité dénombrable, cet énoncé n'est qu'une conséquence des axiomes antérieurement admis; s'ils constituent une infinité non dénombrable, l'extension de cet énoncé semble devoir être considérée comme un axiome nouveau.

Pour éviter un malentendu possible, je crois devoir préciser que cet axiome n'est pas en contradiction avec le fait suivant: „Sur un méridien d'une sphère, la probabilité de l'inégalité $\theta < \alpha\pi$ (θ désignant la colatitude) est α; pour un point choisi au hasard sur la sphère (sauf si $\alpha = 0$, $\frac{1}{2}$, ou 1), elle est différente de α". Dans cet énoncé, le langage peu précis employé suggère une loi de probabilité quand on parle d'un point choisi sur un méridien, et une autre loi quand on parle d'un point choisi au hasard sur la sphère; ce sont deux problèmes différents. Mais lorsqu'il s'agit d'un seul problème, ne comportant qu'un système cohérent de mesures, il faut adopter l'axiome énoncé si l'on veut une théorie qui soit d'accord avec la notion intuitive de probabilité.

IV. Le problème de la mesure (p. 330).

Soit E un segment de droite, e un sous-ensemble quelconque de E. Le problème de la mesure consiste à attacher à chaque sous-ensemble e une fonction $m(e)$ vérifiant les conditions suivantes:

a) On a $m(E)=1$; si e ne comprend qu'un point, $m(e)=0$; dans tous les cas $m(e) \geqslant 0$.

b) si e_1 et e_2 n'ont pas de point commun, $m(e_1+e_2)=m(e_1)+m(e_2)$; ce principe d'addition doit s'appliquer de même au cas d'une infinité dénombrable d'ensembles disjoints. [On peut remarquer que de a) et b) résulte nécessairement que dans tous les cas $m(e_1+e_2) \leqslant m(e_1)+m(e_2)$].

c) Deux ensembles superposables ont même mesure.

M. Vitali a prouvé en 1905 que le problème ainsi posé n'admet pas de solution. J'avais cru, et indiqué à la p. 330 de l'ouvrage cité, qu'il devient résoluble si l'on supprime la condition c). Il résulte de travaux récents de MM. St. Banach et C. Kuratowski, et de M. St. Ulam (Fund. Math. t. XIV et XVI), qu'il n'en est rien. Il peut n'être pas inutile, pour l'étude d'autres problèmes analogues, que je précise le raisonnement que je n'avais fait qu'esquisser, et montre pourquoi il ne conduit pas au résultat que j'avais indiqué.

Ce raisonnement repose sur l'énumération de tous les ensembles e, à la manière de M. Zermelo, et sur l'attribution successive de mesures aux ensembles ainsi énumérés. Bien entendu, à chaque instant, il faut s'assurer que les mesures ainsi choisis, et toutes celles qu'on peut en déduire à l'aide des axiomes a) et b), ne comportent aucune contradiction.

Plaçons-nous à cet effet au moment où il s'agit d'attribuer une mesure à un ensemble e, et supposons qu'il n'y ait eu jusque là aucune contradiction. Nous désignerons par $e'_1, e'_2, \ldots$, les ensembles auxquels une mesure aura été attribuée avant l'instant considéré (soit directement, soit comme conséquence des axiomes a) et b)). Le choix de $m(e)$ ne peut être entièrement arbitraire; si e est continu dans e'_1 et contient au contraire e'_2 on doit avoir

$$m(e'_1) \geqslant m(e) \geqslant m(e''_2),$$

de sorte que $m(e)$ ne peut être choisi qu'entre la limite inférieure des nombres tels que $m(e'_1)$ et la limite supérieure des nombres tels que $m(e'_2)$; mais comme chaque e'_2 est contenu dans tous les e'_1, il y au moins une valeur possible pour $m(e)$.

Il s'agit ensuite de vérifier que les conséquences que l'on peut déduire de ce choix pour d'autres ensembles f non encore pourvus de mesures ne comportent aucune contradiction. Il y a plusieurs cas à distinguer.

1° f est contenu dans e. Dans ce cas $m(f)$ doit être compris entre 0 et $m(e)$. L'on pouvait avoir antérieurement une borne inférieure pour $m(f)$ s'il existait un e'_3 déjà mesuré contenu dans f; mais comme dans ce cas e'_3 est contenu dans e, il ne peut y avoir de contradiction entre la borne inférieure $m(e'_3)$ et la borne supérieure $m(e)$. Aucune contradiction n'est à craindre non plus du fait de l'existence d'ensembles déjà mesurés contenus dans $e-f$, ou au contraire contenant, soit f, soit $e-f$.

On traite de même le cas où f est contenu dans le complément $\bar{e}= =E-e$ de e.

2° f contient e (ou $\bar{e}$). Cela revient à dire que le complément de f est contenu dans $\bar{e}$ (ou e); ce cas se ramène au précédent.

3° f comprend une partie f' de e et une partie f'' de $\bar{e}$; on ne peut alors, du fait que l'on ait choisi $m(e)$, rien conclure d'autre sur f que ce qui peut résulter des considérations successives de f' et f''. Aucune contradiction n'est donc à craindre.

En résumé, le choix de $m(e)$, effectué arbitrairement entre les bornes inférieure et supérieure antérieurement connues, ne risque d'entraîner aucune contradiction (ce qui ne serait pas vrai si l'on conservait l'axiome c).

Et pourtant, l'on ne peut pas continuer indéfiniment et transfiniment. Un exemple le fera comprendre. Supposons que l'on ait à attribuer successivement des mesures à des ensembles $e_1, e_2, \ldots$, dont chacun contienne le suivant, tous les e_n n'ayant d'ailleurs aucun point commun; $m(e_n)$ peut alors être choisi arbitrairement entre 0 et $m(e_{n-1})$; si les choix sont tels que $m(e_n)$ tende pour n infini vers une limite positive, une contradiction apparaît à la limite, bien qu'aucune contradiction ne soit à craindre après un nombre fini de choix.

Cette remarque montre pourquoi le mode de raisonnement considéré ne permet pas de conclure, et les mémoires cités de MM. Banach et Kuratowski et de M. Ulam permettent de conclure qu'on ne saurait éviter par aucun choix des $m(e)$ de trouver à un certain moment une contradiction avant d'avoir mesuré tous les ensembles e.

Je tiens à faire remarquer, en terminant, que l'erreur que j'avais commise à la p. 330 de mon Calcul des Probabilités provenait de l'oubli de la remarque qui précède, et ne saurait conduire à douter de la légitimité de l'axiome de M. Zermelo, dont l'emploi, à mon avis, ne risque pas de conduire à une contradiction.

Sur le problème de la turbulence

(O zagadnieniu turbulencji)

par

A. Rosenblatt

Le présent travail est une étude détaillée de la perturbation du mouvement laminaire des liquides visqueux incompressibles qui a fait l'objet d'une Note envoyée au Philosophical Magazine, et d'une conférence au Jubilé de la British Association. Il s'agit du mouvement laminaire appellé „simple shearing" par les Anglais, c'est à dire dont la vitesse fondamentale u_0 est de la forme

$$u_0 = \frac{U}{H} y. \tag{1}$$

Le fluide se meut parallèlement à l'axe des x entre deux parois F_1, F_2, dont la première F_1 est en repos et la seconde a la vitesse U et dont les équations sont $y=0$ et $y=H$. La perturbation s'evanouit exponentiellement à l'infini, cas qui est bien plus facile à traiter exactement que le cas d'une perturbation périodique en x.

1. En supposant l'adhérence complète du fluide aux parois nous avons comme formule générale de la vitesse u_0 parallèle à l'axe des x

$$u_0 = \frac{Uy}{H} + 3\,A_0\,y\,(H-y). \tag{2}$$

Le gradient $\frac{\partial p_0}{\partial x}$ de la pression moyenne s'obtient de l'équation

$$\mu\,\Delta u_0 = \frac{\partial p_0}{\partial x},$$