Streszczenie.

Rozprawa niniejsza wyniknęła z zagadnienia na temat oznaczenia tych równań kowarjantnych (niezmienniczych) w rachunku absolutnym, które wolno obustronnie kowarjantnie różniczkować. Na mocy pewnego rezultatu T. Y. Thomasa udaje się autorom przez prosty warunek, wyrażający się równaniem (14), scharakteryzować te geometrje, w których możliwość różniczkowania kowarjantnych równań istnieje bez zastrzeżeń. Poza pewnemi teoretycznemi rozważaniami J. A. Schoutena, w geometrjach dotychczas spotykanych warunek (14) spełniony był automatycznie.

W drugiej części pracy, będącej głównym tematem, rozważają autorowie analogiczne zagadnienie dla „rachunku punktowego". (Rachunek punktowy stworzony został dla celów geometrji różniczkowej rzutowej przez E. Cartana i J. A. Schoutena). Tu okazuje się równanie (29), odpowiadające równaniu (14), jako jeszcze nie wystarczające dla możliwości różniczkowania równań kowarjantnych. Powód tego leży w tem, że w rachunku punktowym występuje pewna operacja kowarjantna, która nie ma odpowiednika w rachunku tensorjalnym, i którą autorowie nazywają „usuwaniem wskaźnika". Konsekwencją tego faktu jest, że twierdzenie Thomasa w rachunku punktowym inaczej musi być sformułowane, i co za tem idzie, że bezwzględna możliwość różniczkowania kowarjantnych równań w rachunku punktowym prowadzi do dalej idących konsekwencyj niż w rachunku tensorjalnym, a mianowicie do równań (32). Jest rzeczą interesującą, że w dotychczasowych zastosowaniach rachunku punktowego do uogólnionej geometrji rzutowej postulat (32) nie był spełniony.

Le varie derivazioni covarianti nel calcolo assoluto considerate come casi particolari di una medesima operazione

(Różne upochodniania spółzmiennicze w rachunku bezwzględnym, uważane jako przypadki szczególne jednego i tego samego działania)

(Comunicazione al Congresso dei matematici polacchi — Wilno 23—26 Settembre 1931)

di

G. Vitali

1. Siano

(1) $$u_1, u_2, \ldots, u_n$$

n variabili continue, sia ν un intero $> O$, e sia inoltre

(2) $$\varphi_\alpha(u_1, u_2, \ldots, u_n; t) = \varphi_\alpha(t) = \varphi_\alpha$$

un sistema di O_ν parametri [1]) corrispondenti agli stati di un indice α variante nella classe ν [2]), funzioni oltre che della solita variabile t in un aggregato misurabile g [3]), anche delle (1) e fra loro linearmente indipendenti.

Ponendo

(3) $$a_{\alpha,\beta} = \int_g \varphi_\alpha \varphi_\beta \, dt,$$

il determinante

$$a = a_{\alpha,\beta}$$

risulta diverso da zero.

Noi indicheremo con $a^{\alpha,\beta}$ il reciproco di $a_{\alpha,\beta}$.

[1]) G. Vitali, Geometria nello spazio hilbertiano (Editore N. Zanichelli, Bologna 1929) p. 87, def. e p. 172. Questo libro sarà indicato in seguito con GH.

[2]) GH. p. 155.

[3]) Naturalmente a quadrato sommabile in questo aggregato g.

2. Supponiamo poi che per le sostituzioni invertibili, sulle (1), il sistema (2) varii come un covariante semplice di indice α [1]).

Allora il sistema $a^{\alpha,\beta}$ è un controvariante a due apici.

3. Sia H_α (α variante nella classe ν) un covariante a un indice α variante nella classe ν.

La funzione

$$\psi = \Sigma_{\alpha,\beta}\, a^{\alpha,\beta} H_\alpha \varphi_\beta,$$

dove la Σ è estesa al variare di α e β nella classe ν, è un invariante [2]).

Indico con ψ_γ la $\dfrac{\partial \psi}{\partial u_\gamma}$ [3]), γ essendo un indice variante nel campo Ω [4]).

ψ_γ è un covariante funzione di t ed

$$\int_g \varphi_\alpha \psi_\gamma\, dt$$

è un covariante a due indici α e γ, il primo variante nella classe ν ed il secondo nell' intero campo Ω, covariante che si potrà indicare con $H_{\alpha,\gamma}$, o meglio con $\Delta_\gamma H_\alpha$ e che si può chiamare il derivato covariante di H_α secondo il sistema (2).

4. Se V_n è una varietà ad n dimensioni, e se

$$f(u_1, u_n, \ldots, \dot{u}_n;\, t)$$

è una sua determinante [5]), se inoltre noi assumiamo per le (2) le $f_\alpha = \dfrac{\partial f}{\partial u_\alpha}$, la $\Delta_\gamma H_\alpha$ diventa la derivata da me introdotta in un recente lavoro [6]) e se $\varrho_\gamma = 1$ [7]) questa diventa quella considerata in GH. p. *184* e seg. e contiene come caso particolare la derivazione covariante di Ricci-Curbastro.

5. I parametri (2) individuano uno spazio lineare ad O_ν dimensioni passante per l'origine e variante in generale col variare delle (1).

Se questo spazio è indipendente dalle (1), allora si può fissare in esso un sistema di O_ν parametri $\underset{\alpha}{Z}$ normali e a due a due ortogonali indipendenti dalle (1). Sarà allora

$$\varphi_\alpha = \Sigma_\beta \underset{\beta}{X_\alpha} \underset{\beta}{Z},$$

[1]) GH. p. 166.
[2]) GH. p. 154. def.
[3]) GH. p. 155. 1.
[4]) GH. p. 154. 3.
[5]) GH. p. 85. 3.
[6]) G. Vitali, Nuovi contributi alla nozione di derivazione covariante, (Rend. del Sem. Mat. di Padova. Anno I n. 1, 2.
[7]) GH. p. 155. 5.

le X essendo delle convenienti funzioni delle (1), costituenti gli elementi di un determinante diverso da zero.

Indichiamo con $\underset{\beta}{X^\alpha}$ il reciproco in questo determinante dell' elemento $\underset{\beta}{X_\alpha}$. Si può dimostrare che

$$\underset{j}{X_\alpha} = \Sigma_\beta a_{\alpha,\beta} \underset{j}{X^\beta},$$

$$\psi = \Sigma_\beta \underset{\beta}{Z} \cdot \underset{\beta}{U},$$

dove

$$\underset{\beta}{U} = \Sigma_\alpha H_\alpha \underset{\beta}{X^\alpha}.$$

Di qui si ha

$$\psi_\gamma = \Sigma_\beta \underset{\beta}{Z} \underset{\beta}{U_\gamma},$$

dove

$$\underset{\beta}{U_\gamma} = \frac{\partial \underset{\beta}{U}}{\partial u_\gamma}.$$

Si ricava che

$$\Delta_\gamma H_\alpha = \Sigma_j \underset{j}{U_\gamma} \underset{j}{X_\alpha}.$$

Se $\varrho_\gamma = 1$,

$$\underset{\beta}{U_\gamma} = \Sigma_\alpha \frac{\partial H_\alpha}{\partial u_\gamma} \underset{\beta}{X^\alpha} + \Sigma_\alpha H_\alpha \frac{\partial \underset{\beta}{X^\alpha}}{\partial u_\gamma}$$

ed allora

$$\Delta_\gamma H_\alpha = \frac{\partial H_\alpha}{\partial u_\gamma} + \Sigma_\eta K^\eta_{\alpha,\gamma} H_\eta,$$

dove

$$K^\eta_{\alpha,\gamma} = \Sigma_j \frac{\partial \underset{j}{X^\eta}}{\partial u_\gamma} \underset{j}{X_\alpha}.$$

6. Supponiamo che esista una determinante f per cui si abbia

$$\int_g \varphi_\alpha \varphi_\beta\, dt = \int_g f_\alpha f_\beta\, dt,$$

(se $\nu = 1$ questo è sempre possibile).

Allora la $\Delta_\gamma H_\alpha$ è un operazione sul sistema H_α che dipende dalla varietà V_n che ha per determinante f, e dal sistema di O_ν parametri (normali e a due a due ortogonali)

$$\underset{j}{F} = \Sigma_\alpha \underset{j}{X^\alpha} f_\alpha \qquad (j \text{ variante nella classe } \nu).$$

In tal caso e per $\varrho_\gamma = 1$ questa operazione coincide colla derivata costruita

quasi contemporaneamente da me e da Weitzenböck [1]) che ha dato origine allo studio di vari *parallelismi* nelle varietà e che più recentemente è stata ritrovata da E. Einstein [2]) per porla a base della sua *Einheitliche Feldtheorie.*

7. Per brevità io ho accennato soltanto alle derivazione covarianti dei soli sistemi covarianti H_α ad un indice, ma cose analoghe si hanno per tutti i sistemi assoluti [3]).

Il vantaggio di abbracciare con una sola definizione tutte le derivazioni finora considerate nel calcolo assoluto, sia nel classico campo considerato da Ricci-Curbastro e da Levi-Civita, sia nel più ampio campo del così detto *Calcolo Assoluto Generalizzato*, non è soltanto quello di apportare una maggiore unità nella esposizione di nozioni che ormai hanno conquistato nella scienza un posto notevole.

La definizione di *derivazione covariante* da me presentata comprende oltre le derivate classiche, una innumerevole serie di operazioni analoghe; e, non è escluso, che alcune di queste possano un giorno apparire degne di attenzione, al pari delle loro consorelle primogenite.

[1]) G. Vitali, Una derivazione covariante formata coll' ausilio di n sistemi covarianti del 1° ordine (Atti della Soc. Lig. di Sc. e. Lett. 1924. p. 248—253). — R. Weitzenböck, Invariantentheorie (P. Noordhoff 1923 p. 329).

[2]) A. Einstein, Riemann-Geometrie mit Aufrechterhaltung des Begriffes des Fernparallelismus, (Preussische Akademie der Wissenschaften. Berlin 1929).

[3]) Sulle derivazioni covarianti. Conferenze di G. Vitali raccolte dalla Sig-na A. Foschi. (Rend. del. Sem. Mat. di Padova Anno III, 1932).

Ein Existenzsatz aus der Theorie der diophantischen Approximationen

(Twierdzenie o istnieniu z teorji przybliżeń diofantycznych)

von

V. Jarník

Es sei s eine ganze positive Zahl. Ein System von s reellen [1]) Zahlen $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ möge ein eigentliches System heissen, wenn keine Relation

$$k_0 + \sum_{i=1}^{s} k_i \theta_i = 0$$

mit ganzen, nicht sämtlich verschwindenden Zahlen $k_0, k_1, \ldots, k_s$ gilt; sonst heisse das System uneigentlich [2]). Wenn $f(x)$ eine für hinreichend grosse x definierte und positive Funktion ist, so wollen wir sagen, dass das System $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ die Approximation $f(x)$ zulässt, wenn es zu jeder positiven Zahl A ein System von $s+1$ ganzen Zahlen $p_1, p_2, \ldots p_s, q$ gibt, so dass

$$q > A, \quad \left|\theta_i - \frac{p_i}{q}\right| < f(q) \qquad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

Bekanntlich lässt jedes System $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ die Approximation $x^{-\frac{s+1}{s}}$ zu. Wir werden nun in dieser Note folgenden Satz beweisen:

Satz 1. Es sei $s \geqq 1$, s ganz, $\alpha \geqq \frac{s+1}{s}$; dann gibt es mindestens ein eigentliches System $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$, welches die Appro-

[1]) Alle vorkommenden Zahlen sind reell.

[2]) Für $s = 1$ bedeutet „θ_1 ist ein eigentliches System" ebensoviel wie „θ_1 ist irrational".