Zur Theorie der Vektor- und Punktkonnexion

(Z podstaw teorji przeniesień wektorjalnych i punktowych)

von

V. Hlavatý und St. Gołąb

Einleitung.

Bezeichne X_n eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Die Koordinaten des laufenden Punktes werden wir kurz mit ξ^ν $(\lambda, \mu, \nu = 1, \ldots, n)$ bezeichnen. Als Basis wird in der X_n die Gruppe aller analytischen und regulären Koordinatentransformationen mit nichtverschwindender Determinante festgelegt. Wir bezeichnen ferner mit Schouten [1]) die Koordinaten desselben Punktes im neuen Koordinatensystem mit demselben Kernbuchstabe ξ und nur mit einem Index von anderer Art versehenen [2]), sodass die Transformation des Systems (ν) in das System (N) durch die folgende Relationen gegeben ist:

$$(1) \qquad \begin{cases} \xi^{\mathrm{N}} = \xi^{\mathrm{N}}(\xi^\nu) & (\Lambda, \mathrm{M}, \mathrm{N} = \dot{1}, \ldots, \dot{n}) \\ \left|\dfrac{\partial \xi^{\mathrm{N}}}{\partial \xi^\nu}\right| \neq 0. \end{cases}$$

Wie bekannt, versteht man unter einen Skalar eine Grösse, deren Wert sich bei den Koordinatentransformationen *nicht* ändert. Unter einem kontravarianten Vektor wird ein Begriff verstanden der durch n sog. Bestimmungs-

---

[1]) J. A. Schouten, Über nichtholonome Übertragungen in einer L_n. Math. Zeitschr. 30 (1929) 149—172.

[2]) Dies hat einen praktischen Grund darin, dass man in dieser Weise unterscheiden kann die Transformationsformel, die als Koordinatentransformation der Punkte betrachtet wird, von den Transformationsformel, die als die Abbildung des Raumes auf sich selbst angesehen wird, was folgendermassen

$$\eta^\nu = \eta^\nu(\xi^\nu)$$

geschrieben wird.

zahlen v^ν charakterisiert ist, wobei sich diese Bestimmungszahlen beim Übergang zu einem neuen System (N) folgendermassen transformieren:

$$v^{\mathrm{N}} = v^\nu \partial_\nu \xi^{\mathrm{N}} \text{ [3]} \qquad (\partial_\nu = \partial/\partial \xi^\nu).$$

Analog wird der kovariante Vektor w_λ durch die Transformationsformel

$$w_{\mathrm{A}} = w_\lambda \partial_{\mathrm{A}} \xi^\lambda \tag{3}$$

definiert. In der bekannten Weise werden die Affinoren höheren Grades gebildet.

Aus der allgemeinen Transformationsformel für die Affinoren

$$V^{\mathrm{N}_1,\ldots,\mathrm{N}_r}_{\mathrm{A}_1,\ldots,\mathrm{A}_s} = V^{\nu_1,\ldots,\nu_r}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_s} \prod_{j=1}^{r} \partial_{\nu_j} \xi^{\mathrm{N}_j} \prod_{k=1}^{s} \partial_{\mathrm{A}_k} \xi^{\lambda_k} \tag{4}$$

folgt, dass im allgemeinen die Bestimmungszahlen eines Affinors, für sich selbst betrachtet, *keine* Skalare sind. Man kann sich nun die Frage stellen ob es Affinoren gibt (neben den trivialen, deren sämtliche Bestimmungszahlen gleich Null sind, was offenbar in allen Koordinatensystemen erhalten bleibt), deren alle Bestimmungszahlen Skalare sind. Auf diese Frage wurde die Antwort durch eine Arbeit von T. Y. Thomas [4]) gegeben. Es hat sich nämlich gezeigt, dass Affinoren von dieser Eigenschaft existieren und dass sie Komitanten des sogenannten Einheitsaffinors A^ν_λ [5]):

$$A^\nu_\lambda = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \nu = \lambda \\ 0 & \text{wenn } \nu \neq \lambda \end{cases} \tag{5}$$

sind. Aus den Gleichungen (5) ist es zu ersehen, dass es zwischen A^ν_λ und dem wohlbekannten Kroneckerschen Symbol δ^ν_λ algebraisch keinen Unterschied gibt, da in *jedem* Koordinatensystem (ν) die Gleichung

$$A^\nu_\lambda = \delta^\nu_\lambda \tag{6}$$

gilt. Eine solche Gleichung, die in jedem Koordinatensystem ihre Gültigkeit behält, werden wir im folgenden stets eine *kovariante* Gleichung nennen. Es

[3]) In üblicher Weise wird das Summenzeichen weggelassen, wenn das Summieren über einen kontra- und gleichzeitig einen kovarianten Index erstreckt wird.

[4]) T. Y. Thomas, Tensors whose components are absolute constants, Annals of Mathematics 27 (1926) 548—550.

[5]) sogenannten nach Schoutens Vorschlag (vergleiche: J. A. Schouten, Der Ricci-Kalkül, Berlin, Springer 1924, S. 27, 28). Den Einheitsaffinor kann man am einfachsten definieren durch die Gleichung

$$A^\nu_\lambda = \overset{\mu}{e}_\lambda \underset{\mu}{e^\nu},$$

wo $\overset{\mu}{e}_\lambda$, $\underset{\mu}{e^\nu}$ die sog. kovarianten bzw. kontravarianten Massvektoren sind (vgl. Ricci-Kalkül, S. 13 und 15).

gibt aber auch Gleichungen die keinen kovarianten Charakter haben [6]). Solche Gleichungen könnte man mit Schouten durch das Zeichen $\overset{*}{=}$ andeuten [7]). Nach der Einführung einer kovarianten Differentiation in unserem Raume X_n hebt sich die Frage hervor, welche Gleichungen dieser Differentiation fähig sind. Man kann vom vornherein hoffen, dass bei genügend allgemeinen Voraussetzungen über die Natur und die Eigenschaften der Konnexion [8]) die nicht kovarianten Gleichungen, ja, auch manche kovarianten Gleichungen *nicht* differenziert werden können [9]). Im nächsten Paragraph wird gezeigt, bei welchen Voraussetzungen man zu der Klasse solcher linearen Vektorkonnexionen gelangt, dass alle kovariante Gleichungen der kovarianten Differentiation fähig sind. Die Betrachtungen dieses Paragraphen bilden zugleich eine Vorbereitung zu dem letzten Paragraphen. Bei den Vektorgrössen werden nämlich vorwiegend definitorisch nur solche Konnexionen eingeführt, die der oben genannten Bedingung genügen. Erst in der Punktrechnung sieht die Sache anders aus und führt uns zu neuen Schlüssen.

§ 1.

Es sei jetzt in der X_n eine Vektorkonnexion gegeben. Aus dem Postulat der Linearität folgen für die kovariante Ableitung der kontra- bzw. kovarianten Vektoren die Gleichungen:

$$\begin{cases} \text{a)} \quad \dot{\nabla}_\mu v^\nu = \partial_\mu v^\nu + \dot{\Gamma}^\nu_{\lambda\mu} v^\lambda \text{ [10]} \\ \text{b)} \quad \underset{\cdot}{\nabla}_\mu w_\lambda = \partial_\mu w_\lambda + \underset{\cdot}{\Gamma}^\nu_{\lambda\mu} w_\nu \end{cases} \tag{7}$$

wo die Koeffizienten $\dot{\Gamma}^\nu_{\lambda\mu}$ und $\underset{\cdot}{\Gamma}^\nu_{\lambda\mu}$ (die sogenannten Parameter der Konnexion)

[6]) z. B. die Gleichung $A^\nu_\lambda = \underset{\lambda}{e^\nu}$ oder $\Gamma^\nu_{\lambda\mu} = 0$, wenn $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$ die Parameter einer linearen Konnexion sind.

[7]) L. c. [1]) S. 154. Bei Schouten ist sonst dieses Zeichen in erweitertem Sinne gebraucht. Siehe Bem. [2]).

[8]) Statt „Konnexion" wird auch das Wort „Zusammenhang" oder „Übertragung" gebraucht.

[9]) Benutzt man die Schreibweise von Schouten und führt man konsequent die Operation der Abdrosselung der Indizes (l. c. [1]) S. 152), sowie das Übergehen bei den Affinoren nur mit gewissen Indizes zu anderen Systemen ein, so stellt sich die Gleichung (6) nach Schouten als nicht kovariant heraus und folglich als einer kovarianten Differentiation nicht fähig. Die Beispiele aber in der Punktanalysis, zu welchen einer von uns geführt wurde, haben gezeigt, dass die Ursache der erwähnten Erscheinung tiefer liegt: dass man nämlich auch die Grundlagen der Festlegung der Konnexion berücksichtigen muss, und dass sich diese Schwierigkeit durch blosse Verwendung der Abdrosselung nicht beseitigen lässt.

[10]) Wir bezeichnen die Parameter $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$ mit Punkten und wollen auch mit den zugefügten Punkten bei dem symbolischen Operator ∇ andeuten, welche Parameter bei der kovarianten Ableitung zu verwenden sind. Im Gegensatz zu den späteren Erwägungen beziehen sich also die Punkte bei den Symbolen ∇ keineswegs auf die zu differenzierenden Grössen, wie es auch später z. B. die Gleichung (17) zeigt.

von vornherein ganz beliebige (und auch voneinander unabhängige) Funktionen der Variabeln ξ^ν sind. Aus der Forderung, dass die kovariante Ableitung wieder ein Affinor sein soll, folgen die nachstehenden bekannten Transformationsformeln der Parameter $\dot{\Gamma}^\nu_{\lambda\mu}$ und $\underset{\cdot}{\Gamma}^\nu_{\lambda\mu}$, wenn wir von dem System (ν) zu einem neuen (N) übergehen:

$$(8)\qquad \begin{cases} \text{a)}\quad \dot{\Gamma}^{\mathrm{N}}_{\Lambda\mathrm{M}} = \dot{\Gamma}^\nu_{\lambda\mu}\,\partial_\nu\,\xi^{\mathrm{N}}\,\partial_\Lambda\,\xi^\lambda\,\partial_{\mathrm{M}}\,\xi^\mu + \partial_\lambda\,\xi^{\mathrm{N}}\,\partial_{\mathrm{M}}\,\partial_\Lambda\,\xi^\lambda \\ \text{b)}\quad \underset{\cdot}{\Gamma}^{\mathrm{N}}_{\Lambda\mathrm{M}} = \underset{\cdot}{\Gamma}^\nu_{\lambda\mu}\,\partial_\nu\,\xi^{\mathrm{N}}\,\partial_\Lambda\,\xi^\lambda\,\partial_{\mathrm{M}}\,\xi^\mu - \partial_\lambda\,\xi^{\mathrm{N}}\,\partial_{\mathrm{M}}\,\partial_\Lambda\,\xi^\lambda. \end{cases}$$

Die Parameter $\dot{\Gamma}^\nu_{\lambda\mu}$ und $\underset{\cdot}{\Gamma}^\nu_{\lambda\mu}$ sind evident keine Affinoren; aus den Gleichungen (8) folgt aber, daß $\dot{\Gamma}^\nu_{\lambda\mu} + \underset{\cdot}{\Gamma}^\nu_{\lambda\mu}$ einen Affinor dritten Grades bildet, den wir mit $C^\nu_{\lambda\mu}$ bezeichnen wollen:

$$(9)\qquad C^\nu_{\lambda\mu} = \dot{\Gamma}^\nu_{\lambda\mu} + \underset{\cdot}{\Gamma}^\nu_{\lambda\mu}\ ^{11)}.$$

Durch die Formeln (7) ist die kovariante Ableitung der Affinoren ersten Grades erledigt. Was die kovariante Ableitung der Skalare betrifft, machen wir es folgendermassen:

Entweder stellen wir die Forderung auf, dass die kovariante Ableitung $\nabla_\mu s$ eines Skalars s ein kovarianter Vektor sein soll, und, da immer $\partial_\mu s$ ein solcher ist, setzen wir am einfachsten die Gleichung:

$$(10)\qquad \nabla_\mu s = \partial_\mu s$$

als Axiom voraus.

Oder aber kann man die Gleichung (10) herleiten aus der Forderung der Permanenz der gewöhnlichen Regel für das Differenzieren der Skalarprodukte [12]. In die konsequente weitere Feststellung der kovarianten Differentiation von Affinoren höheren Grades wollen wir hier näher nicht eingehen. Wir wollen nur die Formel für die kovariante Ableitung der gemischten Affinoren zweiten Grades anführen:

$$(11)\qquad \dot{\nabla}_\mu u^\nu_\lambda = \partial_\mu u^\nu_\lambda + \dot{\Gamma}^\nu_{\varrho\mu} u^\varrho_\lambda + \underset{\cdot}{\Gamma}^\varrho_{\lambda\mu} u^\nu_\varrho.$$

Es kommt vorläufig nicht darauf an, auf Grund welcher Voraussetzungen man zu der Formel (11) gelangen kann.

Kehren wir jetzt zu der Gleichung (6) zurück. Die kovariante Ableitung der linken Seite sieht auf Grund der Formel (11) folgendermassen aus:

$$(12)\qquad \dot{\nabla}^\mu A^\nu_\lambda = C^\nu_{\lambda\mu},$$

während die kovariante Ableitung der rechten Seite einfach auf Grund der

[11]) J. A. Schouten, Der Ricci-Kalkül, S. 66. Vergleiche J. A. Schouten und V. Hlavatý, Zur Theorie der allgemeinen linearen Übertragung, Math. Zeitschr. 30 (1929) 414—432.

[12]) J. A. Schouten-V. Hlavatý, l. c. [11]) S. 422.

Definition (10) gleich Null ist:

$$(13)\qquad \nabla_\mu \delta^\nu_\lambda = 0.$$

Zwei Möglichkeiten bieten sich also dar:

Entweder ist:

$$(A)\qquad \dot{\nabla}_\mu A^\nu_\lambda = \nabla_\mu \delta^\nu_\lambda,$$

woraus infolge (12) und (13) unmittelbar folgt

$$(14)\qquad C^\nu_{\lambda\mu} = 0.$$

Man kann in diesem Falle kurz schreiben:

$$(15)\qquad \dot{\Gamma}^\nu_{\lambda\mu} = -\underset{\cdot}{\Gamma}^\nu_{\lambda\mu} = \Gamma^\nu_{\lambda\mu}$$

und folglich genügt es für die kovariante Ableitung von allerlei Affinoren bloss das einzige Symbol ∇ zu verwenden.

Oder aber haben wir:

$$(B)\qquad \dot{\nabla}_\mu A^\nu_\lambda \neq \nabla_\mu \delta^\nu_\lambda.$$

In diesem Falle ist also die Gleichung (6) der kovarianten Derivation *nicht* fähig und für solche Gleichungen könnte man z. B. das folgende Symbol $\doteq$ einführen. Für eine solche Geometrie müssen wir natürlich die verschiedenen Symbole $\nabla, \dot{\nabla}, \underset{\cdot}{\nabla}, \dot{\underset{\cdot}{\nabla}}, \ldots$ beibehalten. Es soll bemerkt werden, dass im Falle (B) die übliche Regel der Derivation der Produkte in ihrer Allgemeinheit *nicht* erhalten bleiben kann.

In der Geometrie (A) dagegen ist es uns erlaubt in allen Gleichungen A^ν_λ durch δ^ν_λ oder umgekehrt zu ersetzen ohne den kovarianten Charakter der Gleichung zu zerstören und infolgedessen können wir auf Grund des Thomasschen Resultates [13]) zusammenfassend folgenden Satz aussprechen:

Hauptsatz: *In der Geometrie (A) sind alle kovariante Gleichungen der kovarianten Differentiation fähig.*

Bemerkungen. Die Gleichung (14), die zu der Geometrie (A) führt, kann auch auf Grund anderer Bedingungen ermittelt werden, die wir hier kurz darstellen wollen, obwohl diese Bedingungen für unsere Zwecke von minderer Bedeutung sind:

α) Ist eine lineare Vektorkonnexion mittels der Formeln (7) gegeben, so wird gleichzeitig eine (dreiparametrige) Schar von linearen Konnexionen erzeugt und zwar (für die kontravarianten Vektoren) mit den Parametern:

$$(16)\qquad \dot{\Omega}^\nu_{\lambda\mu} = \alpha\,\dot{\Gamma}^\nu_{\lambda\mu} + \beta\,\dot{\Gamma}^\nu_{\mu\lambda} + \gamma\,\underset{\cdot}{\Gamma}^\nu_{\lambda\mu} + (\alpha+\beta-\gamma-1)\,\underset{\cdot}{\Gamma}^\nu_{\mu\lambda}$$

(und eine analoge für die kovarianten Vektoren).

[13]) l. c. [4]).

Setzen wir im besonderen: $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = -1$, so erhalten wir eine neue Konnexion, die wir „konjugiert" zu (7) nennen können. Führen wir für die kovarianten Ableitungen der konjugierten Konnexion die Symbole $\underset{\cdot}{\Delta}$ und $\dot{\Delta}$, so haben wir:

$$(17)\qquad \begin{cases} \text{a)}\quad \underset{\cdot}{\Delta}_\mu v^\nu = \partial_\mu v^\nu - \underset{\cdot}{\Gamma}{}^\nu_{\lambda\mu} v^\lambda \\ \text{b)}\quad \dot{\Delta}_\mu w_\lambda = \partial_\mu w_\lambda - \dot{\Gamma}{}^\nu_{\lambda\mu} w_\nu. \end{cases}$$

Für die Δ-Ableitung des Einheitsaffinors bekommen wir:

$$(18)\qquad \underset{\cdot}{\Delta}_\mu A^\nu_\lambda = - C^\nu_{\lambda\mu}.$$

Stellen wir also die Forderung auf, dass

$$(19)\qquad \dot{\nabla}_\mu A^\nu_\lambda = \underset{\cdot}{\Delta}_\mu A^\nu_\lambda$$

sein soll, so folgt daraus die Gleichung (14) und folglich stimmt die ursprüngliche Konnexion mit ihrer konjugierten überein.

β) Die Gleichung (14) folgt aus der Forderung, dass die Gesetze der üblichen Differentiation durchweg gelten. Genauer gesagt, Schouten und Hlavatý haben gezeigt, dass die Voraussetzung (welche in unserer Schreibweise folgendermassen aussieht):

$$(20)\qquad \nabla_\mu (v^\lambda w_\lambda) = (\dot{\nabla}_\mu v^\lambda) w_\lambda + v^\lambda \nabla_\mu w_\lambda$$

schon genügt, um die Gleichung (14) abzuleiten [14]).

γ) Auch auf dem rein geometrischen Wege gelangt man durch entsprechende Forderung zu der Gleichung (14). Setzen wir nämlich voraus, dass nur die Konnexion für die kontravarianten Vektoren mittels der Formel (7 a) definiert ist. Zum gegebenen System von n unabhängigen kontravarianten Vektorfeldern $\overset{i}{e}{}^\nu$ bilden wir das sogenannte reziproke System von kovarianten Vektorfeldern $\overset{k}{e}_\lambda$. Setzen wir weiter voraus, dass stets die pseudoparallele Verschiebung der Vektoren des Systems $\overset{i}{e}{}^\nu$ zugleich die pseudoparallele Verschiebung der Vektoren des reziproken Systems $\overset{k}{e}_\lambda$ erzeugt, so gelangen wir in dieser Weise zu einer Konnexion der kovarianten Vektoren, die eben eindeutig durch die Gleichung (14) bestimmt ist [15]).

§ 2.

Wir übergehen jetzt zu der Punktrechnung. Obwohl der geometrisch natürlichste Weg um zu den Punktgrössen zu gelangen, von dem Cartan-

[14]) l. c. [11]) S. 422.

[15]) J. A. Schouten-V. Hlavatý, l. c. [11]) Einleitung.

Schouten'schen Standpunkte ausgeht [16]), führen wir hier einfachheits- und kürzehalber den Gedankengang von T. Y. Thomas an [17]).

Zu unserer Mannigfaltigkeit X_n adjungieren wir eine neue Variabel ξ^0 und in der so erweiterten $(n+1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit $\overset{*}{X}_{n+1}$ legen wir folgende Gruppe der Transformationen fest:

$$(21)\qquad \begin{cases} \xi^{\mathrm{N}} = \xi^{\mathrm{N}}(\xi^\nu) \qquad [18]) \\ \xi^{\odot} = \xi^0 - \dfrac{\mathfrak{n}}{c} \log \Delta \end{cases}$$

wo $\Delta = |\partial_\nu \xi^{\mathrm{N}}|$, $\mathfrak{n} = \dfrac{1}{n+1}$ und c eine beliebige von Null verschiedene Konstante ist. Statt der Gleichungen (21) können wir auch folgendes festlegen: Die adjungierte Variabel ξ^0 sei mittels der Gleichung:

$$(22)\qquad \xi^0 = \log \mathfrak{M}^{-\frac{\mathfrak{n}}{c}}$$

definiert, wo $\mathfrak{M}$ eine Dichte vom Gewicht (-1) ist. Für eine solche Dichte können wir z. B. die Determinante $|\underset{\lambda}{e}{}^\nu|$ nehmen.

Unter den kontra- bzw. kovarianten Punkten werden Grössen verstanden, die sich folgendermassen transformieren:

$$(23)\qquad \begin{cases} \text{a)}\quad v^{\mathrm{F}} = v^\gamma \partial_\gamma \xi^{\mathrm{F}} \\ \quad\ \text{bzw.} \\ \text{b)}\quad w_{\mathrm{A}} = w_\alpha \partial_{\mathrm{A}} \xi^\alpha \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} \alpha, \beta, \gamma = 0, 1, \ldots, n \\ \mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma = \odot, 1, \ldots, n \end{pmatrix}.$$

Da nach (22) ξ^0 nur bis auf eine additive Funktion bekannt ist, werden nur solche Punktgrössen betrachtet, die von ξ^0 *nicht* abhängen. Somit haben wir

$$(24)\qquad \partial_0 = 0.$$

Die Definition der Punktgrössen höheren Grades unterscheidet sich von der üblichen Definition der Vektorgrössen nur dadurch, dass sie die Gleichungen (23) statt (2) und (3) als Ausgangspunkt nimmt.

In der Punktrechnung gibt es nun neben den üblichen Operationen der Addition, Multiplikation, Überschiebung, Faltung noch eine kovariante Opera-

[16]) J. A. Schouten und St. Gołąb, Über projektive Übertragungen und Ableitungen, Mathem. Zeitschr. 32 (1930) 192—214.

[17]) T. Y. Thomas, A projektive theory of affinely connected manifolds, Mathem. Zeitschr. 25 (1926) 723—733.

[18]) Die Thomassche Theorie, die dem Falle $c = -\dfrac{1}{n+1}$ entspricht, wurde, um gleichzeitig auch den Veblenschen Standpunkt zu umfassen, von J. A. Schouten und St. Gołąb verallgemeinert durch Einführung der Konstanten c.

tion, die in der Vektorrechnung *kein* Analogon hat und welche zu neuen Punktgrössen führt, die um einen kovarianten Index ärmer sind. Dies liegt daran, dass für die Punktgrössen nicht die allgemeinste, sondern eine beschränkte Transformationsgruppe als Basis festgelegt ist.

Nehmen wir eine Punktgrösse P in Betracht, die mit den kontravarianten Indizes versehen sein kann, die aber mindestens einen kovarianten Index besitzt:

$$P^{\gamma_1\ldots\gamma_q}_{\alpha_1\ldots\alpha_p} \qquad (q \geqslant 0, p \geqslant 1). \tag{25}$$

Fassen wir einen bestimmten kovarianten Index — sagen wir α_r — ins Auge und setzen definitorisch

$$Q^{\gamma_1\ldots\gamma_q}_{\alpha_1\ldots\alpha_{r-1}\ \alpha_{r+1}\ldots\alpha_p} = P^{\gamma_1\ldots\gamma_q}_{\alpha_1\ldots\alpha_{r-1}\ 0\ \alpha_{r+1}\ldots\alpha_p}\ ^{19)}. \tag{26}$$

Aus (21) folgt nun unmittelbar, dass Q eine *Punktgrösse* ist und dass also (26) eine *kovariante* Gleichung darstellt. Wir werden sagen, dass Q aus P durch *Abschaffung* des Indexes α_r entstanden ist [20]). Insbesondere bekommt man aus dem kovarianten Punkt w_α durch Abschaffung des Indexes einen Skalar s:

$$s = w_0, \tag{27}$$

welche Tatsache in der ganzen Punktanalysis eine wichtige Bedeutung hat [21]). Ebenso entsteht aus dem Einheitsaffinor A^γ_α [22]) durch Abschaffung ein kontravarianter Punkt:

$$e^\gamma = A^\gamma_0. \tag{28}$$

Nun kann man sich dieselbe Frage stellen, die von T. Y. Thomas in der Affinorrechnung gestellt und gelöst wurde, nämlich nach den Punktgrössen, deren sämtliche Bestimmungszahlen Skalare sind. Hier sieht die Sache etwas anders aus und nämlich:

In der Punktrechnung erscheinen die gesuchten Punktgrössen als Komitanten nicht nur des Einheitsaffinors A^γ_α, aber auch zugleich des „Einheitspunktes" e^γ, der aus A^γ_α durch Abschaffung des Indexes entsteht.

Setzen wir jetzt voraus, dass in unserer Mannigfaltigkeit $\overset{*}{X}_{n+1}$ eine lineare Konnexion gegeben ist, die also den Anlass zu der kovarianten Ableitung gibt. In der vorliegenden Arbeit setzen wir aber vom Anfang an:

$$C^\gamma_{\alpha\beta} = \dot{\Pi}^\gamma_{\alpha\beta} + \Pi^\gamma_{\dot{\alpha}\beta} = 0 \qquad (\text{also } \dot{\Pi}^\gamma_{\alpha\beta} = -\Pi^\gamma_{\dot{\alpha}\beta} = \Pi^\gamma_{\alpha\dot{\beta}})\ ^{23)}. \tag{29}$$

[19]) Es soll bemerkt werden, dass die Gleichung (26) keine „Abdrosselungsgleichung" ist.

[20]) Est ist klar (da $\partial_\nu \xi^\Theta \neq 0$ ist), dass diese Operation nur auf die kovarianten Indizes angewandt werden kann.

[21]) Vgl. J. A. Schouten-St. Gołąb, l. c. [16]).

[22]) Der Einheitsaffinor A^γ_α war in der unter [16]) zitierten Arbeit durchweg mit E^γ_α bezeichnet.

[23]) Dieser Bedingung genügt z. B. die projektive Ableitung von T. Y. Thomas, l. c. [17]).

Somit sind wir nicht gezwungen dem Operator ∇ irgendeinen Punkt hinzufügen, weil wir nur mit einem einzigen System von Parameter $\Pi^\gamma_{\alpha\beta}$ arbeiten. Aus Gründen, welche sich aber später rechtfertigen werden, wollen wir jedem Symbole ∇ so viele Sterne unten (bzw. oben) zufügen, wie viele kovarianten (kontrav.) Indizes die zu differenzierende projektive Grösse hat. Somit bedeutet z. B. $\underset{*}{\overset{*}{\nabla}}_\alpha A^\beta_\gamma$, dass wir eine gemischte Grösse differenzieren, während (was laut (28) *immer* erlaubt ist) $\overset{*}{\nabla}_\alpha A^\beta_0$ bedeutet, dass hier bei der Differentiation A^α_0 als kontravarianter Punkt anzusehen ist. Dementsprechend schreiben wir für die kovariante Ableitung eines Skalars s bloss $\nabla_\alpha s$.

Auf Grund der Gleichung (29) haben wir natürlich:

$$\underset{*}{\overset{*}{\nabla}}_\beta A^\gamma_\alpha = \nabla_\beta A^\gamma_\alpha = 0. \tag{30}$$

Es ist uns folglich erlaubt in den kovarianten Gleichungen den Einheitsaffinor A^γ_α durch das Kroneckersche Symbol δ^γ_α zu ersetzen und umgekehrt.

Dagegen haben wir:

$$\overset{*}{\nabla}_\beta A^\gamma_0 = \partial_\beta A^\gamma_0 + \Pi^\gamma_{\alpha\beta} A^\alpha_0 = \Pi^\gamma_{0\beta}. \tag{31}$$

Somit können zwei verschiedene Fälle eintreten:
Entweder

$$\underset{*}{\overset{*}{\nabla}}_\beta A^\gamma_0 = \overset{*}{\nabla}_\beta A^\gamma_0 \tag{A}$$

oder

$$\underset{*}{\overset{*}{\nabla}}_\beta A^\gamma_0 \neq \overset{*}{\nabla}_\beta A^\gamma_0 = \overset{*}{\nabla}_\beta e^\gamma. \tag{B}$$

Im Falle (A) haben wir infolge (30) und (31) notwendigerweise:

$$\Pi^\gamma_{0\beta} = 0. \tag{32}$$

In dieser Geometrie (A) sind alle kovariante Gleichungen der kovarianten Differentiation fähig und man braucht nur das einzige Symbol ∇ einzuführen für die Ableitung allerartiger Punktgrössen.

Es wäre jetzt vom Interesse diesen Fall näher zu untersuchen bei Hinzufügung der Forderung, dass die Parameter $\Pi^\gamma_{\alpha\beta}$ in projektiv invarianter Weise festgestellt werden sollen. Auf die Konsequenzen der Gleichung (32) wird hier näher nicht eingegangen. Zu dieser Tatsache werden wir in einer späteren Note zurückkommen [24]).

Die Gleichung (32) hat natürlich, wie es aus ihrer Herleitung entspringt,

[24]) Die bisjetzt betrachteten projektiven Konnexionen genügen *nicht* der Gleichung (32).

den kovarianten Charakter. Dies kann auch unmittelbar nachgeprüft werden, wenn man aus der Transformationsformel der Parameter $\Pi^{\gamma}_{\alpha\beta}$:

$$\Pi^{\mathrm{F}}_{\mathrm{AB}} = \Pi^{\gamma}_{\alpha\beta}\,\partial_{\gamma}\xi^{\mathrm{F}}\,\partial_{\mathrm{A}}\xi^{\alpha}\,\partial_{\mathrm{B}}\xi^{\beta} + \partial_{\gamma}\xi^{\mathrm{F}}\,\partial_{\mathrm{B}}\partial_{\mathrm{A}}\xi^{\gamma} \tag{33}$$

ausgeht, nachher $A = \odot$ einsetzt und die Gleichungen (21) berücksichtigt.

Zu diesem Falle wollen wir noch eine Bemerkung hinzufügen: Gelte die Gleichung (32) und ist aus gegebenen Daten eines Problems auch ξ^0 bekannt [25]), so würde

$$d\,\xi^{\beta}\,\overset{*}{\nabla}_{\beta}\,e^{\gamma} = 0, \tag{34}$$

sodass man von e^{γ} nicht zum benachbarten Punkt kommen könnte.

Jetzt wenden wir uns zu dem Falle (B). In dieser Geometrie gibt es kovariante Gleichungen, z. B. die Gleichung (28), die — wie es (B) selbst zum Ausdruck bringt — der kovarianten Differentiation nicht fähig sind. Ein weiteres Beispiel liefert uns die Gleichung (27). — Wir haben nämlich

$$\nabla_{\beta}\,s = \partial_{\beta}\,s = \nabla_{\beta}\,w_0, \tag{35}$$

während:

$$\underset{*}{\nabla}_{\beta}\,w_0 = \partial_{\beta}\,w_0 - \Pi^{\gamma}_{0\beta}\,w_{\gamma} = \partial_{\beta}\,s - \Pi^{\gamma}_{0\beta}\,w_{\gamma}, \tag{36}$$

also im allgemeinen:

$$\underset{*}{\nabla}_{\beta}\,w_0 \neq \nabla_{\beta}\,w_0. \tag{37}$$

Bemerken wir weiter, dass infolge (28) die Gleichung

$$w_{\gamma}\,A^{\gamma}_{0} = w_{\gamma}\,e^{\gamma} = w_0 \tag{38}$$

den kovarianten Charakter hat. Dagegen ist zwar

$$\underset{*}{\overset{*}{\nabla}}_{\beta}\,w_{\gamma}\,e^{\gamma} = \nabla_{\beta}\,w_0 \quad (= \partial_{\beta}\,w_0), \tag{39}$$

jedoch ist

$$\underset{**}{\overset{*}{\nabla}}_{\beta}\,w_{\gamma}\,A^{\gamma}_{0} \neq \underset{*}{\overset{*}{\nabla}}_{\beta}\,w_{\gamma}\,e^{\gamma} = \nabla_{\beta}\,w_0\,. \tag{40}$$

Somit gilt der folgende

Satz. *In der Geometrie (B) dürfen nicht alle kovariante Gleichungen beiderseits differenziert werden.*

Insbesondere betrifft dies die Thomassche projektive Geometrie.

Man muss also ausdrücklich bestimmen, welche kovariante Gleichungen

[25]) Dieser Fall kommt z. B. bei einer Kurvenkongruenz vor. Vgl. V. Hlavatý, Projektive Invarianten einer Kurvenkongruenz und einer Kurve, Mathem. Zeitschr. **34** (1931) 58—73.

beiderseits differenziert werden können. Diese Tatsache beruht auf der *kovarianten* Gleichung (28), durch welche sich auch die Operation der Abschaffung des Indexes (26) erklären lässt. Es ist nämlich

$$P^{\gamma_1\cdots\gamma_q}_{\alpha_1\ldots\alpha_{r-1}\;0\;\alpha_{r+1}\ldots\alpha_p} = A^{\beta}_{\cdot}\,P^{\gamma_1\cdots\gamma_q}_{\alpha_1\ldots\alpha_{r-1}\;\beta\alpha_{r+1}\ldots\alpha_p} \quad \text{während} \quad Q^{\gamma_1\cdots\gamma_q}_{\alpha_1\ldots\alpha_{r-1}\;\alpha_{r+1}\ldots\alpha_p} = e^{\beta}\,P^{\gamma_1\cdots\gamma_q}_{\alpha_1\ldots\alpha_{r-1}\;\beta\alpha_{r+1}\ldots\alpha_q} \tag{26a}$$

ist. Solange man auf dem *formalen* Standpunkte steht, dass bei einer Grösse jeder rechts stehende Index (also auch 0) immer ein kovarianter (bzw. ein kontravarianter) Index ist, so tritt diese Schwierigkeit nicht auf, und man erkennt aus dem „Skelett“ [26]) des Ausdruckes, was für ein ∇-Operator anzuwenden ist. Steht man aber strikt auf dem Klein'schen Klassifizierungsprinzips (wobei Indizes nur formale Bedeutung haben und nichts mehr als eine geschickte Schreibweise ermöglichen) so kann man die oben genannte Schwierigkeit nicht vermeiden.

Wenn die kovariante Ableitung von Punktgrössen höheren Grades in üblicher Weise mit Hilfe der Parameter $\Pi^{\gamma}_{\alpha\beta}$ definiert ist, so gelten jedenfalls folgende zwei Regeln:

I) Für jede Gleichung von der Gestalt:

$$s = v^{\alpha}\,w_{\alpha}, \tag{41}$$

gilt die Formel:

$$\nabla_{\beta}\,s = (\overset{*}{\nabla}_{\beta}\,v^{\alpha})\,w_{\alpha} + v^{\alpha}\,\underset{*}{\nabla}_{\beta}\,w_{\alpha} = \underset{*}{\overset{*}{\nabla}}_{\beta}\,v^{\alpha}\,w_{\alpha} \tag{42}$$

II) Wenn kurz durch $\bigcirc$ und $\square$ beliebige Punktgrössen bezeichnet werden, so gilt in ganzer Allgemeinheit die Formel:

$$\overset{\bigcirc\square}{\nabla}_{\beta}(\bigcirc\,\square) = (\overset{\bigcirc}{\nabla}_{\beta}\bigcirc)\,\square + \bigcirc\,\overset{\square}{\nabla}_{\beta}\,\square, \tag{43}$$

wo die auftretenden Symbole selbstverständlich sind.

Dagegen:

III) Alle kovariante Gleichungen, die durch *Abschaffung* der Indizes entstanden sind, dürfen im allgemeinen *nicht* differenziert werden.

Wir wollen es ausdrücklich betonen, dass das Postulat der Möglichkeit der kovarianten Differentiation von Gleichungen, die durch Abschaffung der Indizes entstanden sind, ebenso gerechtfertigt und invariant ist, wie z. B. das Postulat (42). Der letztere hat die Bedingung (29) zu Folge, der vorher genannte dagegen führt zu weitergehenden Konsequenzen, nämlich zu den Gleichungen (32).

[26]) Vgl. St. Gołąb, Über verallgemeinerte projektive Geometrie, Prace Matematyczno-fizyczne, Warszawa 37 (1930), S. 103.

icm©

Streszczenie.

Rozprawa niniejsza wyniknęła z zagadnienia na temat oznaczenia tych równań kowarjantnych (niezmienniczych) w rachunku absolutnym, które wolno obustronnie kowarjantnie różniczkować. Na mocy pewnego rezultatu T. Y. Thomasa udaje się autorom przez prosty warunek, wyrażający się równaniem (14), scharakteryzować te geometrje, w których możliwość różniczkowania kowarjantnych równań istnieje bez zastrzeżeń. Poza pewnemi teoretycznemi rozważaniami J. A. Schoutena, w geometrjach dotychczas spotykanych warunek (14) spełniony był automatycznie.

W drugiej części pracy, będącej głównym tematem, rozważają autorowie analogiczne zagadnienie dla „rachunku punktowego". (Rachunek punktowy stworzony został dla celów geometrji różniczkowej rzutowej przez E. Cartana i J. A. Schoutena). Tu okazuje się równanie (29), odpowiadające równaniu (14), jako jeszcze nie wystarczające dla możliwości różniczkowania równań kowarjantnych. Powód tego leży w tem, że w rachunku punktowym występuje pewna operacja kowarjantna, która nie ma odpowiednika w rachunku tensorjalnym, i którą autorowie nazywają „usuwaniem wskaźnika". Konsekwencją tego faktu jest, że twierdzenie Thomasa w rachunku punktowym inaczej musi być sformułowane, i co za tem idzie, że bezwzględna możliwość różniczkowania kowarjantnych równań w rachunku punktowym prowadzi do dalej idących konsekwencyj niż w rachunku tensorjalnym, a mianowicie do równań (32). Jest rzeczą interesującą, że w dotychczasowych zastosowaniach rachunku punktowego do uogólnionej geometrji rzutowej postulat (32) nie był spełniony.

Le varie derivazioni covarianti nel calcolo assoluto considerate come casi particolari di una medesima operazione

(Różne upochodniania spółzmiennicze w rachunku bezwzględnym, uważane jako przypadki szczególne jednego i tego samego działania)

(Comunicazione al Congresso dei matematici polacchi — Wilno 23—26 Settembre 1931)

di

G. Vitali

1. Siano

(1) $$u_1, u_2, \ldots, u_n$$

n variabili continue, sia ν un intero $> O$, e sia inoltre

(2) $$\varphi_\alpha(u_1, u_2, \ldots, u_n; t) = \varphi_\alpha(t) = \varphi_\alpha$$

un sistema di O_ν parametri [1]) corrispondenti agli stati di un indice α variante nella classe ν [2]), funzioni oltre che della solita variabile t in un aggregato misurabile g [3]), anche delle (1) e fra loro linearmente indipendenti.

Ponendo

(3) $$a_{\alpha,\beta} = \int_g \varphi_\alpha \varphi_\beta \, dt,$$

il determinante

$$a = a_{\alpha,\beta}$$

risulta diverso da zero.

Noi indicheremo con $a^{\alpha,\beta}$ il reciproco di $a_{\alpha,\beta}$.

[1]) G. Vitali, Geometria nello spazio hilbertiano (Editore N. Zanichelli, Bologna 1929) p. 87, def. e p. 172. Questo libro sarà indicato in seguito con GH.

[2]) GH. p. 155.

[3]) Naturalmente a quadrato sommabile in questo aggregato g.