# Zur nichtholonomen Geometrie

(Przyczynek do geometrji nieholonomicznej)

von

L. Infeld

Es werden in dieser Arbeit gewisse Beziehungen der Riemannschen Geometrie verallgemeinert, welche zur Untersuchung mechanischer, nichtholonomer Systeme angewandt werden können [1].

§ 1. **Das Koordinatensystem.** Es sei in einem $n$-dimensionalen Kontinuum ein Koordinatensystem gewählt. Das KS. ist bestimmt, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Es sollen jedem Punkte des Kontinuums in ein-eindeutiger Weise $n$ reelle Zahlen $x^1, x^2, \ldots, x^n$ zugeordnet werden, deren Gesammtheit $n$ voneinander unabhängige reelle veränderliche bildet.

2. Es ist eine Matrix

$$l = \| l_i^{(k)} \|, \qquad i, k = 1, 2, \ldots, n \tag{1}$$

von $n^2$ Funktionen der verändlichen $x^1, \ldots, x^n$ gegeben. Die Funktionen sollen stetige partielle Ableitungen besitzen. Ihre Determinante soll in jedem Punkte des Kontinuums der Ungleichung

$$| l_i^{(k)} | \neq 0 \tag{2}$$

genügen. Die Funktionen $l_i^{(k)}$ haben nur den angegeben Bedingungen zu genügen und können sonst beliebig gewählt werden. Das KS. wird erst durch

[1]) Die hier benutzte Methode ist wesentlich mit der von Ricci und Levi-Civita eingeführten Methode der Rotationskoeffizienten verwandt. (Vgl. Eisenhart, Non Rimannian Geometry. New-York 1927. S. 47—52).

Angabe der Funktionenmatrix (1) bestimmt. Wurden im einfachsten Falle die Funktionen so gewählt, daß

$$l_i^{(k)} = d_i^k = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k \\ 0 & \text{für } i \neq k, \end{cases} \tag{3}$$

dann artet die Matrix (1) in eine Einheitsmatrix aus und das KS. soll als das Gaussische bezeichnet werden.

Das hier eingeführte Koordinatensystem bildet eine Verallgemeinerung des Gaussischen KS. Im speziellen Falle, der durch die Bedingung

$$l_i^{(k)} = \frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial x^i} \tag{4}$$

charakterisiert ist, soll das KS. als holonomes bezeichnet werden.

Durch $l_{(i)}^k$ soll der Quotient aus der zu $l_i^{(k)}$ gehörigen Unterdeterminante und der Determinante (2) verstanden werden. Es gelten dann die Gl.:

$$\begin{cases} l_i^{(k)} l_{(k)}^l = d_i^l \\ l_i^{(k)} l_{(i)}^l = d_i^k. \end{cases} \tag{5}$$

(Über zwei mal auftretende Indizes ist stets zu summieren!)

**§ 2. Vektoren und Tensoren.** Die Transformation des KS. soll durch eine neue Wahl der Matrix (1) vollzogen werden. Dem Übergange vom ursprünglichen zum neuen (gestrichenen) KS., entspricht der Übergang von der Matrix (1) zur Matrix

$$\overline{l} = \| \overline{l_i^{(k)}} \|, \tag{6}$$

wobei aber sowohl $l_i^{(k)}$, wie auch $\overline{l_i^{(k)}}$ Funktionen von $x^1, \ldots, x^n$ sind und den vorher formulierten Bedingungen genügen müssen.

$\pi^1, \pi^2 \ldots, \pi^n$ sind die kontravarianten Komponenten eines Vektors im ursprünglichen KS., $\overline{\pi}^1, \overline{\pi}^2 \ldots, \overline{\pi}^n$ die im gestrichenen, wenn folgende Transformationsgleichungen bestehen:

$$\overline{\pi^k}\, \overline{l_{(k)}^l} = \pi^k l_{(k)}^l, \tag{7a}$$

oder für kovariante Komponenten:

$$\overline{\pi_k}\, \overline{l_i^{(k)}} = \pi_k l_i^{(k)}. \tag{7b}$$

Analog für Tensoren:

$$\begin{cases} \overline{\lambda_{ik}}\, \overline{l_s^{(i)}}\, \overline{l_t^{(k)}} = \lambda_{ik} l_s^{(i)} l_t^{(k)} \\ \overline{\lambda^{ik}}\, \overline{l_{(i)}^s}\, \overline{l_{(k)}^t} = \lambda^{ik} l_{(i)}^s l_{(k)}^t. \end{cases} \tag{8}$$

Man sieht gleich, dass die Transformationsgleichungen, welche die Tensorkomponenten in den Gaussischen Systemen verbinden, als Spezialfall der hier





formulierten Transformationsgl. erhalten werden können. Setzt man nämlich

$$\| l_i^{(k)} \| = \| d_i^k \| \tag{9}$$

und für die Matrix im gestrichenen System

$$\| \overline{l_i^{(k)}} \| = \left\| \frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial x^i} \right\|, \tag{10}$$

dann ist in der Tat:

$$\begin{cases} \overline{\pi^i} = \dfrac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial x^k} \pi^k \\ \pi_i = \dfrac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial x^i} \overline{\pi_k}. \end{cases} \tag{11}$$

Die Gl. (11) können auch als Transformationsgleichungen, welche das Gaussische KS. mit den Koordinaten $\overline{x^i} = \varphi^{(i)}$ mit dem holonomen System $\| l_i^{(k)} \| = \left\| \dfrac{\partial x^{(k)}}{\partial x^i} \right\|$ verbinden, betrachtet werden.

Im folgenden werden zur Bezeichnung von Vektor- und Tensorkomponenten griechische Buchstaben benutzt. Im speziellen Falle, wenn $\| l_i^{(k)} \| = \| d_i^k \|$, d. h. im Gaussischen KS. werden die Komponenten von Vektoren und Tensoren durch lateinische Buchstaben bezeichnet. So ist z. B.:

$$d\xi^i = l_k^{(i)} dx^k; \quad dx^k = d\xi^i l_{(i)}^k \tag{12}$$

$$\overline{d\xi^k}\, \overline{l_{(k)}^l} = d\xi^k l_{(k)}^l. \tag{13}$$

**§ 2. Die Komponenten des affinen Zusammenhanges.** Der affine Zusammenhang des Kontinuums ist im gewählten KS. durch $n^3$ Funktionen der veränderlichen $x^1, \ldots, x^n$ bestimmt. (Im Gaussischen KS. sollen die Komponenten der Parallelverschiebung mit $C_{ik}^l$, sonst mit $\Gamma_{ik}^l$ bezeichnet werden).

Wird ein Vektor $\Xi^i$ längst $d\xi^i$ parallel verschoben, so gilt für die Änderung seiner Komponenten

$$d\Xi^i = -\Gamma_{rs}^i \Xi^r d\xi^s. \tag{14}$$

Die Transformationsgl. für $\Gamma_{rs}^i$ erhält man, indem man in (14) die aus den Transformationsgl. (7) folgenden Werte für $\Xi^i$ und $d\xi^i$ einsetzt und (12) berücksichtigt. Die Rechnung ergibt dann:

$$\overline{\Gamma_{ab}^c}\, \overline{l_{(c)}^p}\, \overline{l_r^{(a)}}\, \overline{l_s^{(b)}} - \frac{\partial \overline{l_{(a)}^p}}{\partial x^s} \overline{l_r^{(a)}} = \Gamma_{ab}^c l_{(c)}^p l_r^{(a)} l_s^{(b)} - \frac{\partial l_{(a)}^p}{\partial x^s} l_r^{(a)}, \tag{15}$$

oder in einer Form, die weniger übersichtlich, aber für die Anwendungen bequemer ist:

$$\overline{\Gamma}^p_{rs} = \Gamma^c_{ab}\, l^m_{(c)}\, \overline{l^{(p)}_m}\, l^{(a)}_n\, \overline{l^n_{(r)}}\, l^{(b)}_o\, \overline{l^o_{(s)}} + \left(\frac{\partial \overline{l^m_{(a)}}}{\partial x^o}\, \overline{l^{(a)}_n} - \frac{\partial l^m_{(a)}}{\partial x^o}\, l^{(a)}_n\right) \overline{l^{(p)}_m}\, \overline{l^n_{(r)}}\, \overline{l^o_{(s)}}. \tag{16}$$

Aus diesen Gl. folgt:

$$\left\{\begin{aligned} &(\overline{\Gamma}^c_{ab} - \overline{\Gamma}^c_{ba})\, \overline{l^p_{(c)}}\, \overline{l^{(a)}_r}\, \overline{l^{(b)}_s} - \left(\frac{\partial \overline{l^p_{(a)}}}{\partial x^s}\, \overline{l^{(a)}_r} - \frac{\partial \overline{l^p_{(a)}}}{\partial x^r}\, \overline{l^{(a)}_s}\right) \\ &= (\Gamma^c_{ab} - \Gamma^c_{ba})\, l^p_{(c)}\, l^{(a)}_r\, l^{(b)}_s - \left(\frac{\partial l^p_{(a)}}{\partial x^s}\, l^{(a)}_r - \frac{\partial l^p_{(a)}}{\partial x^r}\, l^{(a)}_s\right). \end{aligned}\right. \tag{17}$$

Man ersieht aus diesen Gl., dass

$$\Gamma^p_{rs} - \Gamma^p_{sr} \tag{18}$$

kein Tensor ist. Nur im speziellen Falle, wenn die Transformationsgl. holonome KSysteme miteinander verbinden, verhält sich (18) wie ein Tensor. Dagegen bilden

$$\Gamma^c_{ab} - \frac{\partial l^n_{(a)}}{\partial x^m}\, l^m_{(b)}\, l^{(c)}_n \tag{19}$$

und

$$2\,\Omega^c_{ab} = \Gamma^c_{ab} - \Gamma^c_{ab} - \left(\frac{\partial l^n_{(a)}}{\partial x^m}\, l^m_{(b)} - \frac{\partial l^n_{(b)}}{\partial x^m}\, l^m_{(a)}\right) l^{(c)}_n \tag{20}$$

Tensorkomponenten. $2\,\Omega^c_{ab}$ ist in den Indizes $a$, $b$, schiefsymetrisch und geht im Falle holonomer Systeme in (18) über. Ist das gestrichene KSystem ein Gaussisches, dann vereinfachen sich die Gl. (16):

$$\Gamma^p_{rs} = C^c_{ab}\, l^{(p)}_c\, l^a_{(r)}\, l^b_{(s)} + \frac{\partial l^m_{(r)}}{\partial x^o}\, l^o_{(s)}\, l^{(p)}_m \tag{21}$$

und nehmen für das holonome KSystem die bekannte Form an.

Es können, wenn die Komponenten $\Gamma^i_{ik}$ gegeben sind, durch Differentiation neue Tensoren erhalten werden. So ist z. B.:

$$\Xi^i_{.|s} = \frac{\partial \Xi^i}{\partial x^a}\, l^a_{(s)} + \Gamma^i_{rs}\, \Xi^r \tag{22}$$

$$\lambda_{ij|k} \equiv \frac{\partial \lambda_{ij}}{\partial x^a}\, l^a_{(k)} - \lambda_{is}\, \Gamma^s_{jk} - \lambda_{sj}\, \Gamma^s_{ik}. \tag{23}$$

Es sei im Punkte $P$ ein Vektor $\Xi^i$, der längs eines (unendlich kleinen) geschlossenen Weges parallel zu sich selbst verschoben wird. Man berechnet ähnlich wie in der Riemannschen Geometrie, dass die Differenz $(\Delta \Xi^i)_P$ zwischen den Komponenten des nach $P$ zurückgekehrten und von $P$ ausgenenden Vektors gleich ist:

$$(\Delta \Xi^i)_P = -\tfrac{1}{2}\, P^i_{jkl}\, \Xi^j\, d\sigma^{kl}. \tag{24}$$

Hier ist $d\sigma^{kl}$ das von der Kurve längs deren der Vektor parallel verschoben





wurde aufgespannte Flächenelement und $P^i_{jkl}$ ist der Krümmungstensor:

$$P^i_{jkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x^n}\, l^n_{(k)} - \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^n}\, l^n_{(l)} + \Gamma^h_{jl}\, \Gamma^i_{hk} - \Gamma^h_{jk}\, \Gamma^i_{hl}. \tag{25}$$

Die Tensoren $\Xi^i_{.|jk}$ und $\Xi^i_{|kj}$ ergeben die Differenz:

$$\Xi^i_{|jk} - \Xi^i_{|kj} = -\Xi^h\, P^i_{hjk} - 2\,\Xi^i_{|h}\, \Omega^h_{jk} \tag{26}$$

und ähnlich

$$\Xi_{i|jk} - \Xi_{i|kj} = \Xi_h\, P^h_{ijk} - 2\,\Xi_{i|h}\, \Omega^h_{jk}, \tag{27}$$

wie man sich durch Ausrechnung überzeugt.

Gl. (22)—(27) nehmen im Falle holonomer KSysteme die wohlbekannte Form an.

**§ 4. Die Riemannsche Geometrie.** Es seien im gewählten KS. die Komponenten $\gamma_{ik}$ des metrischen Fundamentaltensors gegeben. Sie ermöglichen das Herauf-und Herunterziehen der Indizes und die Berechnung des skalaren Produktes zweier Vektoren. Es gelten dann die Beziehungen:

$$\left\{\begin{aligned} \gamma_{ik}\, l^{(i)}_s\, l^{(k)}_t &= \overline{\gamma_{ik}}\, \overline{l^{(i)}_s}\, \overline{l^{(k)}_t} = g_{st} \\ \gamma^{ik}\, l^s_{(i)}\, l^t_{(k)} &= \overline{\gamma^{ik}}\, \overline{l^s_{(i)}}\, \overline{l^t_{(k)}} = g^{st} \end{aligned}\right. \tag{28}$$

$$\gamma_{ik}\, \gamma^{is} = \delta^s_k \left\}\begin{aligned} &= 0 \quad \text{für} \quad k \neq s \\ &= 1 \quad \text{für} \quad k = s \end{aligned}\right. \tag{29}$$

$$\pi_j = \pi^i\, \gamma_{ij}; \qquad \pi^j = \pi_i\, \gamma^{ij} \tag{30}$$

$$\left\{\begin{aligned} d\xi^i\, d\eta_i &= \gamma_{ik}\, d\xi^i\, d\eta^k = \gamma^{ik}\, d\xi_i\, d\eta_k \\ ds^2 &= \gamma_{ik}\, d\xi^i\, d\xi^k = \gamma^{ik}\, d\xi_i\, d\xi_k \\ &(ds^2 \geqslant 0). \end{aligned}\right. \tag{31}$$

Man kann immer durch eine Koordinatentransformation (also durch eine entsprechende Wahl der Matrix (1)) erreichen, dass $\gamma_{ik}$ für alle Punkte des Kontinuums die Werte:

$$\gamma_{ik} = \gamma^{ik} = \delta^k_i \tag{32}$$

annimt.

In der Riemannschen Geometrie werden die Komponenten der Parallelverschiebung im Gaussischen KS. den Christoffelschen Symbolen gleichgeseszt:

$$S^p_{rs} = \left\{ {p \atop rs} \right\} = \tfrac{1}{2}\, g^{tp} \left(\frac{\partial g_{rt}}{\partial x^s} + \frac{\partial g_{st}}{\partial x^r} - \frac{\partial g_{rs}}{\partial x^t}\right). \tag{33}$$

Man erhält die Komponenten der Parallelverschiebung $\Sigma^p_{rs}$ in der Riemannschen Geometrie in einen beliebigen KS. aus der Gl. (21), indem man $g_{ik}$

als Funktion von $\gamma_{ik}$ und $l_i^{(k)}$ ausdrückt. Die Rechnung ergibt:

$$(34)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}(\Sigma_{rs}^p + \Sigma_{sr}^p) = \frac{1}{2}\gamma^{tp}\left(\frac{\partial \gamma_{rt}}{\partial x^i} l_{(s)}^i + \frac{\partial \gamma_{st}}{\partial x^i} l_{(r)}^i - \frac{\partial \gamma_{rs}}{\partial x^i} l_{(t)}^i\right) \\ \qquad + \frac{1}{2}\gamma_{rm}\gamma^{np}\frac{\partial l_i^{(m)}}{\partial x^k}(l_{(s)}^k l_{(n)}^t - l_{(n)}^k l_{(s)}^t) \\ \qquad + \frac{1}{2}\gamma_{sm}\gamma^{np}\frac{\partial l_i^{(m)}}{\partial x^k}(l_{(r)}^k l_{(n)}^t - l_{(n)}^k l_{(r)}^t) \end{cases}$$

$$(35)\quad \frac{1}{2}(\Sigma_{rs}^p - \Sigma_{sr}^p) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial l_{(r)}^i}{\partial x^k} l_{(s)}^k - \frac{\partial l_{(s)}^i}{\partial x^k} l_{(r)}^k\right) l_i^{(p)}$$

Der Ausdruck (34) vereinfacht sich bedeutend, wenn das KS. so gewählt wurde, dass $\gamma_{ik} = \delta_i^k$ ist. Gl. (35) folgt auch ohne Rechnung aus der Tatsache, dass $\Omega_{ab}^c = 0$, da $S_{ab}^c$ in den Indizes $a$, $b$ symmetrisch ist.

Es soll jetzt die Gl. der geodätischen Linie in einer gegenüber beliebigen Transformationen invarianten Form formuliert werden. Im Gaussischen KS. lauten diese Gl.

$$(36\,\text{a})\quad \frac{dp^i}{ds} + S_{rs}^i p^r p^s = 0$$

$$(36\,\text{b})\quad p^i = \frac{dx^i}{ds},$$

daher in einem beliebigen *KS.*, wie auch aus der Anwendung des Variationsprinzips unmittelbar folgt:

$$(37\,\text{a})\quad \frac{d\pi^i}{ds} + \Sigma_{rs}^i \pi^r \pi^s = 0$$

$$(37\,\text{b})\quad \pi^i = l_k^{(i)}\frac{dx^k}{ds};\ p^k = l_{(i)}^k \pi^i.$$

Setzt man in (37 a) den vorher berechneten Wert für $\Sigma_{rs}^i$ ein, so erhält man:

$$(38)\quad \begin{cases} \frac{d\pi^i}{ds} + \left\{\frac{1}{2}\gamma^{ti}\left(\frac{\partial \gamma_{rt}}{\partial x^o} l_{(s)}^o + \frac{\partial \gamma_{st}}{\partial x^o} l_{(r)}^o - \frac{\partial \gamma_{rs}}{\partial x^o} l_{(t)}^o\right)\right. \\ \qquad \left. + \gamma_{rm}\gamma^{ni}\frac{\partial l_i^{(m)}}{\partial x^k}(l_{(s)}^k l_{(n)}^t - l_{(n)}^k l_{(s)}^t)\right\}\pi^r \pi^s = 0. \end{cases}$$

Diese Gl. nimt im Falle $\gamma_{ik} = \delta_i^k$ die folgende einfache Form an:

$$(39)\quad \frac{d\pi^i}{ds} + \frac{\partial l_i^{(r)}}{\partial x^k}(l_{(s)}^k l_{(t)}^t - l_{(t)}^k l_{(s)}^t)\pi^r \pi^s = 0.$$





**§ 5. Nichtholonome Bindungen.** Es sollen $\nu$ und $\mathfrak{n}$ zwei ganze positive Zahlen bedeuten, deren Summe gleich der Dimensionszahl des Kontinuums ist:

$$(40)\quad \mathfrak{n} + \nu = n.$$

Wir wollen für die Indizes folgende Bezeichnung wählen:

Die Indizes werden mit lateinischen Buchstaben bezeichnet, wenn der Index alle Werte von 1 bis $n$ durchlaufen soll.

Die Indizes werden mit griechischen Buchstaben bezeichnet, wenn der Index alle Werte von 1 bis $\nu$ durchlaufen soll.

Die Indizes werden mit gottischen Buchstaben bezeichnet, wenn der Index alle Werte von $\nu + 1$ bis $n$ durchlaufen soll.

Es sollen im Gaussischen KS. die von einander unabhängigen $\mathfrak{n}$ Bedingungen gegeben sein, denen die Vektoren $dx^i$ zu genügen haben:

$$(41)\quad K_i^{(\alpha)} dx^i = 0,$$

wo $K_i^{(\alpha)}$ differentierbare Funktionen von $x^1, \ldots, x^n$ sind. In diesem Gaussischen KS. kann man in jedem Punkte des Kontinuums $n$ zueinander ortogonale und voneinander unabhängige Einheitsvektoren bestimmen, (deren kovariante Komponenten wir mit $l_i^{(s)}$ bezeichnen) so, dass die Bedingungen (41) durch die Bedingungen

$$(42)\quad l_i^{(\alpha)} dx^i = 0$$

ersetzt werden können. Die $l_i^{(s)}$ erfüllen also die Gl.:

$$(43)\quad l_i^{(k)} l_j^{(s)} g^{ij} = \delta_k^s.$$

Die Komponenten $l_i^{(s)}$ bilden eine Funktionenmatrix mit nicht verschwindender Determinante und bestimmen daher ein KS., welches den folgenden Ausführungen zugrunde gelegt werden soll. Die durch (5) definierten Elemente der Matrix $\| l_{(t)}^s \|$ erhält man in diesem speziellen Falle, wie aus (43) folgt, aus der Gleichung

$$(44)\quad l_{(t)}^k = l_s^{(t)} g^{sk}.$$

Es ist die Matrix der kontravarianten Komponenten derselben Vektoren. Daraus folgt:

$$(45)\quad \begin{cases} g_{ik} = l_i^{(s)} l_k^{(s)} \\ g^{ik} = l_{(s)}^i l_{(s)}^k \end{cases}.$$

In dem zugrunde gelegten KS. ist (wie man aus den Transformationsgl. ersieht)

$$(46)\quad \gamma_{ik} = \gamma^{ik} = \delta_i^k$$

und die Bedingungsgleichungen (42) lauten:

$$d\xi_\alpha = d\xi^\alpha = 0.$$

Die Komponenten $\Sigma^i_{rs}$ nehmen hier die einfachere Form an:

$$(48)\quad \begin{cases} \Sigma^i_{rs} = \frac{1}{2}\frac{\partial l^{(r)}_i}{\partial x^k}(l^k_{(s)}\, l^i_{(i)} - l^k_{(i)}\, l^i_{(s)}) + \frac{1}{2}\frac{\partial l^{(s)}_i}{\partial x^k}(l^k_{(r)}\, l^i_{(i)} - l^k_{(i)}\, l^i_{(r)}) \\ \quad + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial l^m_{(r)}}{\partial x^k}\, l^k_{(s)} - \frac{\partial l^m_{(s)}}{\partial x^k}\, l^k_{(r)}\right) l^{(i)}_m . \end{cases}$$

Der affine Zusammenhang dieser Mannigfaltigkeit soll durch Angabe der Komponenten der Parallelverschiebung in dem zugrunde gelegten KS. bestimmt werden. Dies soll auf folgende Weise geschehen:

$$(49)\quad \begin{cases} 1.\ \ \Gamma^a_{bc} = \Sigma^a_{bc} \\ 2.\ \ \Gamma^a_{bc} = 0 . \end{cases}$$

Die Differentialgl. der Linie, deren Tangenten zueinander parallel sind, lautet dann:

$$(50)\quad \begin{cases} \frac{d\pi^\nu}{ds} + \frac{\partial l^{(a)}_i}{\partial x^k}(l^k_{(b)}\, l^i_{(\gamma)} - l^k_{(\gamma)}\, l^i_{(b)})\, \pi^a \pi^b = 0 \\ \frac{d\pi^a}{ds} = 0 \\ \pi^a = l^{(a)} \frac{dx^i}{ds} . \end{cases}$$

Aus den Gl. (50) folgt:

1. Ist, was vorausgesetzt werden soll, für $s = s_0$, $\pi^a = \pi_a = 0$, dann ist auch für jeden Wert des Parameters $s$

$$(51)\qquad \pi^a = \pi_a = 0.$$

Die Integrale der Gl. (50) genügen also den Bedingungen (42).

2. Ist $\nu = n$, dann geht (50) in die Gl. der geodätischen Linie und das Kontinuum in ein Riemannsches über.

3. Existiert ein Gaussisches KS. indem die Bedingungen (42) die Form:

$$(52)\qquad dx_a = dx^a = 0$$

annehmen, dann gehen die Gl. (50) in die Gl. der geodätischen Linie im $\nu$ dimensionalen Raume über. (Holonome Bindungen).

4. Die gl. (50) können, da die Transformationsgl. bekannt sind in ein beliebiges KS. transformiert werden. Durch eine einfache Rechnung überzeugt man sich, dass im Gaussischen KSystem nehmen die Gl. (50) die folgende Form an:

$$(53)\qquad \frac{d^2x^i}{ds^2} + [\{{}^{i}_{rs}\} + l^i_{(a)} \frac{\partial l^{(a)}_r}{\partial x^s} - l^i_{(a)}\, l^{(a)}_m \{{}^{m}_{rs}\}] \frac{dx^r}{ds}\frac{dx^s}{ds} = 0 .$$





Diese Gl., also auch die Gl. (50) sind, wie Synge[1]) gezeigt hat Gl. der kürzesten Linie, wenn zugleich (42) erfüllt sein soll.

5. Im Grenzfalle $\mathfrak{n} = n$ ist:

$$(54)\qquad \Gamma^c_{ab} = 0.$$

Man erhält diese Geometrie, die Einstein seinen letzten Untersuchungen zugrunde gelegt hat. Im Gaussischen System ist dann:

$$(55)\qquad C^p_{rs} = -\frac{\partial l^p_{(a)}}{\partial x_s}\, l^{(a)}_r .$$

Man gewinnt auf diese Weise, wenn das KS. nicht holonom ist, eine Interpretation der Einsteinschen Welt auf dem Boden der klassischen Mechanik[2]).

In der Tat bilden die Gl. (37) Bewegungsgl. für ein mechanisches, konservatives System in den von Boltzmann eingeführten Quasikoordinaten. Gl. (50) und (53) ergeben dann die Bewegungsgl. für skleronome, holonome oder nichtholonome Bindungen. Das Linienelement $ds$ hängt mit dem Zeitelement $dt$ durch die Gleichung

$$(56)\qquad T(E - Y)\, dt^2 = ds^2 = \gamma_{ik}\, d\xi^i\, d\xi^k$$

zusammen, wo $E$ die Energie des System $Y$ seine potentielle und $T$ seine kinetische Energie bedeutet.

---

## Streszczenie.

W pracy niniejszej uogólniono niektóre związki geometrji Riemanna. Znalezione związki zastosowano do zbadania pewnych własności układów mechanicznych, nieholonomicznych.

---

[1]) L. Synge, Math. Ann. 99, 738, 1928.
[2]) L. Infeld, Phys. ZS. 32, 110, 1931.