$x_{12}^0\ y_{12}^0\ z_{12}^0$ bilden, und zwei beliebige Punkte $W_1$, $W_2$ der Doppelkurve $S_{12}^3$ dieser Fläche, so gilt folgender Satz:

Sind zwischen den Ebenenbündel $(W_0)$ und jedem von zwei kollinearen Ebenenbündeln $(W_1)$, $(W_2)$ — die eine Bisekantenkongruenz der Raumkurve $S_{12}^3$ bilden — solche quadratische Verwandtschaften festgestellt, welche die Elemente $\lambda_0$, $\mu_0$, $\nu_0$ und $\xi_\iota^0 = W_\iota x_{12}^0$, $\eta_\iota^0 = W_\iota y_{12}^0$, $\zeta_\iota^0 = W_\iota z_{12}^0$ $(\iota = 1, 2)$ zu Hauptebenen und die Elemente $\sigma_0 = W_0 s^0$, $\sigma_\iota^0 = W_\iota s^0$ zu homologen Ebenen besitzen,

so erzeugen diese drei Bündel die gegebene Fläche 5. Ordnung $\Psi^5$.

Bezieht man a) den Bündel $(W)$, oder b) die kollinearen Bündel $(W_1)$ und $(W_2)$ — auf ein ebenes Feld $(\omega')$ korrelativ, so erhält man zwei Abbildungen unserer Fläche $\Psi^5$ auf die Ebene $\omega'$.



# Über die Variationsgleichungen für affine geodätische Linien und nichtholonome, nichtkonservative dynamische Systeme

(Równania na zboczenie dla dowolnych układów dynamicznych)

von

A. Wundheiler

Im Jahre 1926 hat Levi-Civita [1]) die Jacobische Formel für die geodätische Abweichung in zwei Dimensionen auf beliebige Riemannsche Räume verallgemeinert. Vranceanu [2]) und Synge [3]) haben sie dann auf nichtholonome, immer Riemannsche Räume, übertragen. Vranceanu arbeitet mit Kongruenzen und erhält ziemlich unübersichtliche Formeln, die sich auf affine Räume nicht verallgemeinern lassen und für den an die Schoutensche Symbolik gewöhnten Leser schwer verständlich sind. Synge hat 1928 die nichtholonomen Variationsgleichungen der Geodätischen in einer viel einfacheren, tensoriellen Gestalt gegeben, die sich ebenfalls auf affine Räume nicht übertragen läßt. Die dynamischen Anwendungen sind durchaus auf den Fall eines konservativen skleronomen Systems, von gegebener Totalenergie beschränkt, wobei der klassische Satz von Jacobi, der die Bahnkurven bei solcher Einschränkung mit den Geodätischen eines Riemannschen Raumes identifiziert, benutzt wird.

In der vorliegenden Arbeit werden:

1° die Abweichungsgleichungen der geodätischen Linien eines allgemeinen

[1]) T. Levi-Civita. Sur l'écart géodésique. Math. Ann. 97 (1926).

[2]) G. Vranceanu. Studio geometrico dei sistemi anolonomi. Ann. di Mat. (4) VI (1928—29). Zusammenfassende Darstellung der Resultate des Verfassers über nichtholonome Räume.

[3]) J. L. Synge. Geodesics in non-holonomic geometry. Math. Ann. 99 (1928).

*affinen* nichtholonomen Raumes aus einem neuen Gedanken abgeleitet [1]). Die Ableitung ist sehr einfach, die gesuchten Gleichungen ergeben sich fast unmittelbar aus der Vertauschungsformel für kovariante Differentiale. Dank der Einführung eines Krümmungstensors, der bei keinem der genannten Autoren (auch nicht bei Schouten) vorkommt, erhalten die Abweichungsgleichungen im nichtholonomen Fall genau dieselbe Gestalt, wie im holonomen. Die Methode wird dann auf *skleronome* dynamische Systeme angewandt;

$2^0$ es wird ein Zusammenhang zwischen den Geodätischen eines geeignet gewählten mehrdimensionalen Raumes und den Bewegungen eines beliebigen, rheonomen, linear nichtholonomen dynamischen Systems auf *einer affinen Grundlage* hergestellt, die von dem Jacobischen Satze ganz unabhängig ist. Dadurch wird das Stabilitätsproblem für beliebige Systeme auf die geodätischen Variationsgleichungen zurückgeführt.

Die Behandlung des Problems wird im Anschluß an die Schoutensche Symbolik geführt [2]). In den §§ 1 und 2 bringen wir knapp das Notwendige an Definitionen und Sätzen über nichtholonome Räume für den Leser, dem diesbezügliche Schoutensche Arbeiten unbekannt sind. Die Darstellung ist jedoch an manchem Ort ziemlich verschieden [3]).

## § 1. Allgemeines über nichtholonome Räume.

**1. Definition einer eingespannten $A_n^m$.** $A_n$ bezeichne einen $n$-dimensionalen affinen Raum, in welchem eine *symmetrische* [4]) Parallelverschiebung vermittels ihrer Komponenten $\Gamma_{ll}^{k}$ gegeben ist, die sonst beliebige Funktionen des Ortes sind. Mit $A_i^k$ bezeichnen wir den *Einheitsaffinor* dieses Raumes, es ist also:

$$A_i^k = \begin{cases} 1 & (i = k) \\ 0 & (i \neq k). \end{cases}$$

In jedem Punkte dieser $A_n$ sei nun eine $m$-Richtung beliebig definiert. Das geschieht bekanntlich durch Angabe von $m$ linear unabhängigen Vektoren in diesem Punkte. Jede lineare Kombination dieser Vektoren ist ein Vektor, der in diese Richtung fällt. Wir ordnen nur jedem Punkte der $A_n$ noch eine $m' = (n - m)$-Richtung zu, die mit der vorher definierten $m$-Richtung keine 1-Richtung gemein hat, und nennen sie die *pseudoorthogonale* Richtung.

Nun läßt sich jeder Vektor in zwei Komponenten zerlegen, deren eine in die lokale $m$-Richtung, die andere dagegen in die pseudoorthogonale fällt. Die erste dieser Komponenten nennen wir die *Projektion dieses Vektors in die lokale $m$-Richtung*, die andere — die *Projektion in die pseudoorthogonale Richtung*. Zur Bildung dieser Projektionen läßt sich nun ein Affinor folgendermaßen definieren:

Ist $u^k$ ein Vektor der $A_n$, so ist

$$u'^k = B_l^k u^l$$

seine Projektion in die lokale $m$-Richtung. Die Komponenten des Affinors $B_l^k$ lassen sich leicht berechnen, sobald die $m$ Vektoren, welche die $m$-Richtung, und die $m'$ Vektoren, welche die pseudoorthogonale Richtung einspannen, gegeben sind [1]).

*Die Gesamtheit der lokalen $m$-Richtungen nennen wir eine $A_n^m$.* Ist noch in jedem Punkte eine pseudoorthogonale Richtung gegeben, so sprechen wir von einer *eingespannten $A_n^m$* und nennen $B_l^k$ *ihren Einheitsaffinor*. Ist dieser Einheitsaffinor $B_l^k$ bekannt, so sind damit in jedem Punkte sowohl die lokale $m$-Richtung, als auch die Einspannungs-$m'$-Richtung gegeben.

Sind gewisse Integrabilitätsbedingungen [2]) erfüllt, so lassen sich die $m$-Elemente zu einer $(n-m)$ parametrigen Schar von in $A_n$ eingebetteten $A_m$ zusammenfassen. Tritt das nicht ein, liegt also der allgemeine Fall vor, so nennen wir die Gesamtheit der $m$-Elemente einen *nichtholonomen, in $A_n$ eingebetteten, $m$-dimensionalen Raum $A_n^m$.*

Fällt ein Vektor in die lokale $m$-Richtung, so sagen wir, daß er zur $A_n^m$ gehört. Eine Kurve, deren Tangentenvektor in jedem Punkte zur $A_n^m$ gehört, nennen wir eine Kurve der $A_n^m$.

Die Gesamtheit der pseudoorthogonalen $m'$-Richtungen definiert ihrerseits eine $A_n^{m'}$, zu der wir die ursprüngliche lokale $m$-Richtung als Einspannungs-

---

[1]) A. Wundheiler. Une simple démonstration de la formule de l'écart géodésique. Rend. dei Lincei, XII (1930) p. 644.

[2]) J. A. Schouten. Der Ricci-Kalkül. Berlin 1924. — Über nichtholonome Übertragungen in einer $L_n$. Math. Zeit. 30 (1929) (mit „Schouten" zitiert).

Die letzte Arbeit dieses Autors: J. A. Schouten und E. R. van Kampen, Zur Einbettungs- und Krümmungstheorie nichtholonomer Gebilde. Math. Ann. 103 (1930) konnte für unsere Zwecke unberücksichtigt bleiben.

[3]) Vgl. z. B. Formeln (4), (8.1), (15), die Ableitung von (13).

[4]) Diese Einschränkung ist ganz unwesentlich. Da aber die Gleichung der geodätischen Linie

$$\frac{d^2 x^k}{ds^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} = 0$$

nur vom symmetrischen Teil der $\Gamma_{ij}^k$, also von

$$\tfrac{1}{2}(\Gamma_{ij}^k + \Gamma_{ji}^k)$$

abhängt, so ist für unsere Zwecke die Betrachtung der unsymmetrischen Übertragung überflüssig.





[1]) Schouten, p. 156, (31). [2]) Schouten, p. 157, (35).

richtung betrachten können, d. h. die $A_n^{m'}$ kann ihrerseits durch die $A_n^m$ eingespannt werden. Diese Einspannung bestimmt den Einheitsaffinor der $A_n^{m'}$, den wir mit $C_l^k$ bezeichnen werden. Bezeichnet $u^k$ einen Vektor der $A_n^m$, $v^k$ einen Vektor der $A_n^{m'}$, so gilt offenbar:

$$B_l^k u^l = u^k, \quad C_l^k u^l = 0,$$
$$B_l^k v^l = 0, \quad C_l^k v^l = v^k.$$

Also ist:

$$A_l^k = B_l^k + C_l^k.$$

**2. Projektion in bezug auf einen gegebenen Index.** Ganz ebenso, wie die kontravarianten, können auch die kovarianten Vektoren vermittels des Affinors $B_i^k$ in die $A_n^m$ projiziert werden:

$$B_i^k u_k = u'_i.$$

Entsprechende Formeln gelten für die Projektionen in die $A_n^{m'}$:

$$C_l^k u^l = u''^k, \quad C_i^k u_k = u''_i.$$

Aber auch höhere Affinoren können in die $A_n^m$ projiziert werden, und zwar *in bezug auf beliebige Indizes.* Z. B. ist

$$T'^k_i = B^k_{k'} T^{k'}_i$$

die Projektion des Affinors $T_i^k$ in die $A_n^m$ in bezug auf den Index $k$. Ebenso ist z. B.

$$T''^k_i = B^{i'}_i T^k_{i'}$$

seine Projektion in die $A_n^m$ mit dem Index $i$. Wir können auch den Affinor $T^{hk}_{ij}$ in bezug auf die Indizes $h, i$ in die $A_n^m$, in bezug auf den Index $j$ in die $A_n^{m'}$ projizieren:

$$T''^{hk}_{ij} = B^h_{h'} B^{i'}_i C^{j'}_j T^{h'k}_{i'j'}.$$

Ist eine solche Projektion gleich dem Affinor selbst, also z. B.:

$$B^k_h T^h_i = T^k_i,$$

so sagen wir, dass dieser Affinor mit diesem Index in der $A_n^m$ liegt, oder einfach, dass *dieser Index in der $A_n^m$ liegt.* Die Projektion dieses Affinors in den Einspannungsraum in bezug auf diesen Index ist dann offenbar Null, also:

$$C^k_h T^h_i = 0.$$

Insbesondere liegen die Einheitsaffinoren mit den beiden Indizes in den Räumen, zu denen sie gehören, also:

$$B^k_h B^h_l = B^k_l, \quad C^k_h C^h_l = C^k_l, \quad C^h_l B^k_h = C^k_h B^h_l = 0.$$





Wir verwenden (nach Schouten)[1]) die Buchstaben $a, \ldots, g$, ausschliesslich für Indizes, die in der $A_n^m$ liegen, die Buchstaben $p, \ldots. w$ für solche, die in der $A_n^{m'}$ liegen. Die Indizes $h, \ldots, l$ können ohne jede Einschränkung benutzt werden.

**3. Die in der $A_n^m$ induzierte Parallelverschiebung.** Das kovariante Differential eines beliebigen Vektors der $A_n^m$

(1) $$\delta u^k = du^k + \Gamma^k_{lj} u^l dx^j$$

kann in seine zwei Projektionen, in jeden unserer Räume, zerlegt werden:

$$\delta u^k = \delta' u^k + \delta'' u^k,$$

wo

(2) $$\delta' u^k = B^k_l \delta u^l$$

und

(3) $$\delta'' u^k = C^k_l \delta u^l.$$

Für Affinoren höherer Stufe setzen wir, z. B.

$$\delta' T^k_l = B^k_{k'} B^{l'}_l \delta T^{k'}_{l'}$$

usw. Wir berechnen nun die Komponenten der induzierten Übertragung. $u^k$ sei ein beliebiger Vektor der $A_n^m$. Wir haben dann:

$$\begin{aligned} \delta' u^k &= B^k_l \delta u^l = B^k_h (du^h + \Gamma^h_{lj} u^l dx^j) \\ &= d(B^k_h u^h) - u^l d B^k_l + B^k_h \Gamma^h_{lj} u^l dx^j \\ &= du^k + (B^k_h \Gamma^h_{lj} - \partial_j B^k_l) u^l dx^j. \qquad \left(\partial_j = \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \end{aligned}$$

Setzen wir nun:

(4) $$\Gamma'^k_{lj} = B^k_h \Gamma^h_{lj} - \partial_j B^k_l,$$ [2])

so kommt:

(5) $$\delta' u^k = du^k + \Gamma'^k_{lj} u^l dx^j.$$

Setzen wir:

(6) $$\overline{\Gamma}'^k_{lj} = B^h_l \Gamma^k_{hj} + \partial_j B^k_l,$$

so finden wir analog:

(7) $$\delta' u_l = du_l - \overline{\Gamma}'^k_{lj} u_k dx^j.$$

[1]) Schouten-Kampen, p. 760.

[2]) Die Behandlung der $\Gamma'^k_{lj}$ der induzierten Übertragung ist bei Schouten von der unseren verschieden, da er nichtholonome Koordinaten in der $A_n$ benutzt. Wir haben auf die Umschreibung der Formeln für nichtholonome Koordinaten verzichtet, um unwesentlichen Komplikationen bei der Ableitung der Vertauschungsformel (27) aus dem Wege zu gehen. Der mit den Schoutenschen Arbeiten vertraute Leser findet leicht die Abänderung, die an dem Affinor (15) vorzunehmen ist, wenn man in der $A_n$ nichtholonome Koordinaten hat.

## § 2. Krümmungsaffinoren und die Vertauschungsformel für die $A_n^m$.

**1. Einige Fundamentalformeln.** Es gilt zuerst:

$$\delta A_i^k = \delta B_i^k + \delta C_i^k = 0,$$

also:

$$\delta B_i^k = -\delta C_i^k.$$

Es gilt weiter:

(8) $$\delta' B_i^k = -\delta' C_i^k = 0.$$

In der Tat:

(8.1) $$\delta' B_i^k = B_{k'}^k B_i^{l'} \delta B_{l'}^{k'} = -B_{k'}^k B_i^{l'} \delta C_{l'}^{k'} = B_{k'}^k C_{l'}^{k'} \delta B_l^{l'} = 0.$$

$\delta B_i^k$ gibt gewissermassen die Richtungsänderung der $A_n^m$ beim Übergang zu einem benachbarten Punkte. Die „innere" Richtungsänderung der $A_n^m$ ist also nach (8) Null, die $A_n^m$ ist also in bezug auf sich selbst autoparallel.

**2. Die erzwungene Krümmung.** Wir setzen, wie immer:

$$\delta B_i^k = \nabla_j B_i^k \delta x^j.$$

Wird nun dieser Affinor mit den beiden Indizes $k$ und $i$ in die $A_n^m$ projiziert, so erhält man nach (8) Null. Projiziert man ihn dagegen nur mit einem der Indizes, so erhält man die beiden Affinoren:

(9) $$H'{}_{jk}^{\cdot\cdot l} = B_j^{j'} B_k^{k'} \nabla_{j'} B_{k'}^l, \qquad L'{}_{j\cdot k}^{\cdot l} = B_j^{j'} B_{l'}^l \nabla_{j'} B_k^{l'},$$

die wir als Mass für die relative Richtungsänderung der $A_n^m$ benutzen können. Man merke, dass diese beiden Affinoren mit den beiden ersten Indizes in der $A_n^m$, mit dem letzten aber, wegen (8), in der $A_n^{m'}$ liegen. Man darf also schreiben: $H'{}_{ba}^{\cdot\cdot r}$, $L'{}_{b\cdot r}^{\cdot a}$.

Parallel führen wir die sich auf $A_n^{m'}$ beziehenden Größen ein:

(10) $$H''{}_{ji}^{\cdot\cdot k} = C_j^{j'} C_i^{i'} \nabla_{j'} C_{i'}^k, \qquad L''{}_{j\cdot i}^{\cdot k} = C_j^{j'} C_{k'}^k \nabla_{j'} C_i^{k'}.$$

Alle diese Affinoren nennen wir nach Schouten *die Affinoren der erzwungenen Krümmung.*

**3. Holonomitätsbedingung.** Für Vektoren der $A_n^m$ gilt die folgende Gleichung, die z. B. für $H'{}_{ji}{}^k$ den Namen der Krümmungsaffinors rechtfertigt:

(11) $$\delta u^k = \delta' u^k + H'{}_{ji}{}^k u^i dx^j.$$

In der Tat ist

$$\delta u^k = \delta (B_i^k u^i) = B_i^k \delta u^i + \delta B_i^k \cdot u^i = \delta' u^k + \nabla_{j'} B_{k'}^k \cdot B_i^{k'} u^i \cdot B_j^{j'} dx^j.$$

Ähnlich gilt:

(12) $$\delta u_i = \delta' u_i + L'{}_{j\cdot i}^{\cdot k} u_k dx^j.$$

Die Gleichung (11) erlaubt uns zu sagen, wann die $A_n^m$ holonom ist. Nach Definition, ist das der Fall, wenn sich die $m$-Richtungselemente zu $m$-dimensionalen Räumen zusammenfassen laßen, derer es dann eine $m'$-parametrige Schar geben wird. Dazu ist es notwendig und hinreichend, daß jede Kurve, die in der $A_n^m$ liegt, also deren Richtung immer in der lokalen $m$-Richtung enthalten ist, ganz in eine $A_m$ fällt. Verschieben wir also einen Vektor der $A_n^m$ parallel, längs eines in $A_n^m$ liegenden Weges, so muß er immer derselben $A_m$ angehören. Insbesondere muß im holonomen Falle ein in der $A_n^m$ konstruiertes infitesimales Parallelogramm ganz in eine $A_m$ fallen, also *muß es geschlossen sein.*





Wir setzen nun $MM' = \delta x^k$, $MN' = \bar{\delta} x^k$, $M'N'' \parallel MN'$, $N'N''' \parallel MM'$ in bezug auf die $A_n^m$. $N''$ und $N'''$ müßen nun zusammenfallen im Falle der Holonomität, es muß also $\delta\bar{\delta} x^k - \bar{\delta}\delta x^k = 0$ sein. Wir haben einerseits:

$$\bar{\delta}' \delta x^k = 0, \qquad \delta' \bar{\delta} x^k = 0,$$

und anderseits, nach (11):

$$\delta \bar{\delta} x^k = \delta' \bar{\delta} x^k + H'{}_{ji}{}^k \bar{\delta} x^i \delta x^j, \qquad \bar{\delta}\delta x^k = \bar{\delta}' \delta x^k + H'{}_{ji}{}^k \delta x^i \bar{\delta} x^j.$$

Daraus folgt:

$$(\delta\bar{\delta} - \bar{\delta}\delta) x^k = (H'{}_{ji}{}^k - H'{}_{ij}{}^k) \bar{\delta} x^i \delta x^j.$$

Soll das für beliebige $\delta x^k$ und $\bar{\delta} x^k$ gelten, so muß:

$$H'{}_{ji}{}^k = H'{}_{ij}{}^k$$

sein. Das ist die gesuchte Holonomitätsbedingung. Sie ist auch hinreichend[1]).

**4. Vertauschungsformel für die $A_n^m$.** Die wohlbekannte Vertauschungsformel:

$$(\bar{\delta}\delta - \delta\bar{\delta}) u^k = R_{jil}{}^k dx^j \bar{d} x^l u^i$$

übertragen wir auf die $A_n^m$. In bezug auf die gewählten Bezeichnungen setzen wir fest, daß der erste Index des Krümmungsaffinors sich auf die erste Differentiation bezieht, der zweite Index auf die zweite Differentiation, der dritte wird mit dem Vektorindex verknüpft.

$\delta$ und $\bar{\delta}$ bezeichnen, wie immer, zwei in der $A_n$ (nicht $A_n^m$!) vertauschbare Verschiebungen. Wir erinnern, daß diese Voraussetzung mit $d\bar{d}x^k = \bar{d}dx^k$ gleichbedeutend ist. In der gewohnten Weise berechnen wir:

$$\begin{aligned}
\bar{\delta}'\delta' u^c &= \bar{d}(\delta' u^c) + \Gamma'{}_{bl}^{c} \delta' u^b \bar{d} x^l \\
&= \bar{d}(du^c + \Gamma'{}_{aj}^{c} u^a dx^j) + \Gamma'{}_{bl}^{c}(du^b + \Gamma'{}_{aj}^{b} u^a dx^j)\bar{d}x^l \\
&= \underline{\underline{\bar{d}du^c}} + \partial_l \Gamma'{}_{aj}^{c} u^a dx^j \bar{d}x^l + \underline{\Gamma'{}_{aj}^{c} \partial_l u^a dx^j \bar{d}x^l} \\
&\quad + \underline{\underline{\Gamma'{}_{aj}^{c} u^a \bar{d}dx^j}} + \underline{\Gamma'{}_{bl}^{c} \partial_j u^b dx^j \bar{d}x^l} + \Gamma'{}_{bl}^{c} \Gamma'{}_{aj}^{b} u^a dx^j \bar{d}x^l.
\end{aligned}$$

[1]) Schouten, p. 161, (61).

Die zweimal unterstrichenen Glieder sind in $d$ und $\overline{d}$ symmetrisch. Dasselbe gilt von der Summe der einmal unterstrichenen Glieder. Bilden wir also die Differenz $(\overline{\delta}'\delta' - \delta'\overline{\delta}')\,u^c$, so heben sich die genannten Glieder fort und es kommt:

$$(14) \qquad (\overline{\delta}'\delta' - \delta'\overline{\delta}')\,u^c = R'_{jia}{}^{c}\, dx^j\, \overline{d}x^l\, u^a,$$

wenn wir:

$$R'_{jia}{}^{c} = \partial_l \Gamma'^{\,c}_{aj} - \partial_j \Gamma'^{\,c}_{al} + \Gamma'^{\,b}_{aj}\Gamma'^{\,c}_{bl} - \Gamma'^{\,b}_{al}\Gamma'^{\,c}_{bj}$$

setzen.

Dieser Affinor, wie es aus der Bezeichnungsweise der Indizes erhellt, liegt mit den beiden ersten in der $A_n$, mit den beiden letzten Indizes dagegen in der $A_n^m$. Er hat, sozusagen, eine vermittelnde Stellung zwischen der $A_n$ und der $A_n^m$, und diesem Umstande verdanken wir die Einfachheit der erhaltenen Vertauschungsformel. Wir bemerken, daß er weder in der genannten Arbeiten von Vranceanu, noch bei Schouten vorkommt. Der letzte Autor verzichtet überhaupt auf eine Vertauschungsformel für die $A_n^m$ [1]). Wir überzeugen uns, daß sie für das Problem der geodätischen Abweichung große Vorteile bietet.

## § 3. Abweichungsgleichungen in einer $A_n^m$.

**1. Zwei beliebige Kurven in $A_n^m$.** $C$ und $C'$ seien zwei Kurven der $A_n^m$, d. h. ihre Richtungen fallen in jedem Punkte in die lokale $m$-Richtung. Wir beziehen sie eindeutig Punkt für Punkt aufeinander und setzen nun voraus, daß die Kurven *benachbart* sind, d. h., daß einander entsprechende Punkte unendlich nahe sind. Ist $M$ ein beliebiger Punkt der Kurve $C$, so bezeichnen wir den entsprechenden Punkt auf $C'$ mit $M'$ und setzen:

$$MM' = \overline{\delta} x^k.$$

Mit $\overline{\delta}$ bezeichnen wir allgemein das der Verschiebung $\overline{\delta}x^k$ entsprechende kovariante Differential; wir werden es die *„kovariante Variation“* nennen.

Ist die $A_n^m$ holonom, so fällt $C$, wie auch $C'$, in eine $A_m$. $\overline{\delta}x^k$ wird aber im allgemeinen nicht mehr in der $A_n^m$ liegen [2]), da doch die $A_m$ von $C$ und $C'$ verschieden sein werden. Liegt aber $\overline{\delta}x^k$ für ein spezielles $M$ in $A_n^m$, so wird er schon längs der ganzen $C$ in $A_n^m$ liegen, denn dann fallen $C$ und $C'$ in dieselbe $A_m$. *In dem nichtholonomen Falle ist das nicht wahr.* In der Tat, aus der Bedingung des In-$A_n^m$-liegens:

$$C_i^k\, \delta x^i = 0$$

---

[1]) Schouten, p. 162, Zeile 13 von unten.

[2]) Die Entdeckung dieser fast banalen Tatsache hat ihre Geschichte. Vgl. Vranceanu. Sur l'écart géodésique dans les espaces non-holonomes. Ann. Scient. Univ. Jassy, XV (1928) p. 7 und p. 309. E. Cartan. Sur l'écart géodésique et quelques notions connexes. Rend. dei Lincei. V (1927) p. 609.





folgt sofort ($\delta$ bedeutet das kovariante Differential, das einer mit $\overline{\delta}x^k$ vertauschbaren Verschiebung längs $C$ entspricht):

$$(16) \qquad C_i^k\, \overline{\delta}\,\delta x^i + \overline{\delta}\, C_i^k\, \delta x^i = 0.$$

Wir setzen $\overline{\delta}x^k = \xi^k$ und zerlegen $\xi^k$ in zwei Komponenten: $\xi'^k$ in $A_n^m$ und $\xi''^k$ in $A_n^{m'}$:

$$\xi'^k = B_i^k\, \xi^i, \qquad \xi''^k = C_i^k\, \xi^i.$$

Beachten wir, daß $\delta$ und $\overline{\delta}$ vertauschbar sind und benutzen wir (16), so kommt:

$$(17) \qquad \begin{aligned} \delta\xi''^k = \delta(C_i^k\,\xi^i) &= C_i^k\,\delta\,\overline{\delta}x^i + \delta\, C_i^k\,\xi^i = -\overline{\delta}\, C_i^k\,\delta x^i + \delta\, C_i^k\,\xi^i \\ &= -\nabla_j C_i^k\,\xi^j\,\delta x^i + \nabla_j C_i^k\,\xi^i\,\delta x^j. \end{aligned}$$

Wir können aber $\nabla_j C_i^k$ durch die Krümmungsaffinoren darstellen:

$$(18) \qquad \begin{aligned} \nabla_j C_i^k &= (B_{k'}^k + C_{k'}^k)(B_j^{j'} + C_j^{j'})\nabla_{j'} C_i^{k'} \\ &= -(H'_{ji}{}^{k} + L'_{j\cdot i}{}^{k}) + (H''_{ji}{}^{k} + L''_{j\cdot i}{}^{k}). \end{aligned}$$

Setzen wir also noch $u^k = \dfrac{\delta x^k}{ds}$, wo $u^k$ den Tangentenvektor von $C$ bedeutet, so kommt:

$$(19) \qquad \frac{\delta\xi''^k}{ds} = [(H'_{ij}{}^{k} - H'_{ji}{}^{k})\,\xi'^i - (L'_{j\cdot i}{}^{k} + L''_{i\cdot j}{}^{k})\,\xi''^i]\,u^j.$$

Wir haben (18) in (17) eingetragen, dann $\xi^k = \xi'^k + \xi''^k$ gesetzt und endlich die Klammern ausmultipliziert, wobei die Lage der Indizes bei den Krümmungsaffinoren beachtet wurde. Es verschwinden Produkte, wie:

$$(20) \qquad H'_{ij}{}^{k}\,\xi''^i, \quad H''_{ij}{}^{k}\,\delta x^j, \quad L'_{j\cdot i}{}^{k}\,\xi'^i, \quad L''_{j\cdot i}{}^{k}\,\delta x^j \quad \text{u. s. w.,}$$

wo ein Index aus $A_n^m$ mit einem aus $A_n^{m'}$ verkettet wird.

Nun fragen wir nach der Bedingung, damit aus $\xi_0''^k = 0$ für ein gewisses $s = s_0$ das Verschwinden von $\xi''^k$ für jedes $s$ folge. Dazu ist offenbar notwendig und hinreichend, daß in den Gleichungen (19) $\xi'^k$ nicht vorkäme, d. h. aber

$$H'_{ji}{}^{k} - H'_{ij}{}^{k} = 0,$$

also die Holonomitätsbedingung (13). Ist also die $A_n^m$ nicht holonom, so kann aus $\xi_0''^k = 0$ nur ausnahmsweise $\xi''^k = 0$ folgen.

(19) stellt nur $n - m$ *unabhängige Gleichungen für die Abweichung* $\xi^k$ dar, die für *beliebiges* Paar $C$ und $C'$ gelten. Wir geben noch einige Abweichungsgleichungen, die in manchen Untersuchungen nützlich sein können.

(16) können wir in der Gestalt

$$\frac{\delta''\xi^k}{ds} = -\overline{\delta}\, C_i^k \frac{\delta x^i}{ds} = -\nabla_j C_i^k\, u^i\, \overline{\delta} x^j$$

umschreiben. Also nach (18):

$$\boxed{\frac{\delta''\xi^k}{ds} = (H'_{ji}{}^k - L''_{j.i}{}^k)\,\xi^j u^i} \quad [1]). \tag{21}$$

Weiter haben wir:

$$\delta''\delta'\xi^k = C_h^k\,\delta(B_i^h\,\delta\xi^i) = C_h^k \nabla_j B_i^h\,\delta\xi^i\,\delta x^j,$$
$$\delta'\delta''\xi^k = B_h^k\,\delta(C_i^h\,\delta\xi^i) = B_h^k \nabla_j C_i^h\,\delta\xi^i\,\delta x^j.$$

Also:

$$\boxed{\delta''\delta'\xi^k = H'_{ji}{}^k\,\delta'\xi^i\,\delta x^j} \tag{22}$$

und

$$\boxed{\delta'\delta''\xi^k = -L'_{j.i}{}^k\,\delta''\xi^i\,\delta x^j}\,. \tag{23}$$

**2. Geodätische Linien der $A_n^m$.** Eine Kurve der $A_n^m$, die ihre Richtung in bezug auf die $A_n^m$ nicht ändert, also in bezug auf die $A_n^m$ autoparallel ist, nennen wir eine *geodätische Linie der $A_n^m$*. $t$ bezeichne einen Parameter auf einer Kurve $C$, dann ist $u^k = \frac{\delta x^k}{dt}$ ihr Tangentenvektor. Ändert sich seine Richtung nicht, so muß

$$\frac{\delta' u^k}{dt} = \alpha u^k$$

sein. Bei geeigneter Wahl eines Parameters $s = f(t)$ geht diese Gleichung in

$$\frac{\delta' u^k}{ds} = 0 \tag{24}$$

über. Wie ist eine Geodätische der $A_n^m$ in bezug auf die Übertragung in der $A_n$ zu beschreiben? Aus (11) erhalten wir sofort:

$$\frac{\delta u^k}{ds} = \frac{\delta' u^k}{ds} + H_{ji}{}^k u^i u^j,$$

also:

$$\frac{\delta u^k}{ds} = H_{ji}{}^k u^i u^j.$$

Eine Geodätische der $A_n^m$ ist also eine Kurve, deren Krümmung, bei geeigneter Wahl des Parameters $s$, in der $A_n^{m'}$ liegt. Diesen Parameter nennen wir den „affinen" Parameter.

**3. Geodätische Abweichung.** $C$ und $C'$ seien nun zwei unendlich benachbarte geodätische Linien der $A_n^m$. Dabei sollen sich auch ihre Richtungen unendlich wenig unterscheiden, wenn wir sie in geeigneter Weise eineindeutig aufeinander beziehen. Entspricht dabei dem Punkte $M$ von $C$ der Punkt $M'$ von $C'$ so nennen wir den Vektor $MM'$, den wir, wie im § 3 Ziff. 1, mit $\bar\delta x^k = \xi^k$ bezeichnen, die *geodätische Abweichung*. Das kovariante Differential, das der Verschiebung $\bar\delta x^k$ entspricht, nennen wir, wie schon gesagt, die *kovariante Variation.*

Neben dieser kovarianten Variation führen wir noch das Differential längs $C$ bzw. $C'$ ein, das der Verschiebung $\delta x^k$ entspricht. Die Verschiebungen $\delta$ und $\bar\delta$ sollen vertauschbar sein, d. h.: führt $\delta$ längs $C$ von $M$ zu $N$, so führt $\delta$ längs $C'$ von $M'$ zu $N'$. Entspricht $M$ auf $C$ der Parameterwert $s$, $M'$ auf $C'$ der Parameterwert $s'$, so haben wir also:

$$ds' = ds + \bar\delta\,ds = (1+\mu)\,ds,$$

wo wir

$$\mu = \frac{\bar\delta\,ds}{ds} \tag{25}$$

gesetzt haben. $\mu$ ist unendlich klein.

Wir haben zuerst:

$$\bar\delta u^k = \bar\delta\,\frac{\delta x^k}{ds} = \frac{ds\,\bar\delta\,\delta x^k - \delta x^k\,\bar\delta\,ds}{ds^2} = \frac{\delta\xi^k}{ds} - \mu u^k,$$

da doch $\bar\delta\,\delta x^k = \delta\,\bar\delta x^k = \delta\xi^k$ ist. Wir projizieren in die $A_n^m$:

$$\bar\delta' u^k = \frac{\delta'\xi^k}{ds} - \mu u^k \tag{26}$$

wegen $B_l^k u^l = u^k$.

**4. Die Formel von Levi-Civita.** In der Vertauschungsformel (14)

$$(\delta'\bar\delta' - \bar\delta'\delta')\,u^c = R'_{jla}{}^c\,u^a\,\bar\delta x^j\,\delta x^l$$

setzen wir für $u^c$ den Tangentenvektor $\frac{\delta x^c}{ds}$ unserer Geodätischen ein, wobei (24) zu berücksichtigen ist. Man erhält, wegen (26):

$$\delta'\left(\frac{\delta'\xi^c}{ds} - \mu u^c\right) = R'_{jla}{}^c\,u^a\,\xi^j\,\delta x^l$$

[1]) Das sind im wesentlichen die Glch. (6.42) von Synge (Geodesics usw.) und (43') von Vranceanu (Studio geometrico usw.).

oder:

$$(27)\qquad \boxed{\frac{\delta'^2 \xi^c}{ds^2} - \frac{d\mu}{ds} u^c = R'_{jia}{}^c\, \xi^j u^i u^a}\ {}^{1)}.$$

Das ist die Formel von Levi-Civita für die nichtholonomen Räume.

Für den Spezialfall des Riemannschen Raumes, also wenn die $A_n^m$ eine $V_n$ ist, können wir die von Levi-Civita für $\mu$ gegebene Formel mit Hilfe der kovarianten Variation sofort erhalten [2]). Dann ist bekanntlich der affine Parameter $s$ die Bogenlänge, also:

$$\bar\delta\, ds^2 = \bar\delta (g_{ik}\, dx^i\, dx^k),$$

oder

$$ds\, \bar\delta\, ds = g_{ik}\, \delta x^i\, \bar\delta\, \delta x^k,$$

oder, nach Division durch $ds^2$:

$$(28)\qquad \mu = \frac{\bar\delta\, ds}{ds} = g_{ik}\, u^i \frac{\delta \xi^k}{ds}.$$

**5. Dynamische Abweichungsgleichungen für skleronome Systeme.** Wie bekannt [3]), lassen sich die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen eines skleronomen Systems von der lebendigen Kraft $2T = g_{ik}\dot x^i \dot x^k$, an dem die verallgemeinerten Kräfte $Q_i$ angreifen, also die Gleichungen:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot x^i} - \frac{\partial T}{\partial x^i} = Q_i,$$

in der Gestalt:

$$\frac{\delta v^k}{dt} = \frac{\delta}{dt}\frac{\delta x^k}{dt} = Q^k = g^{ki} Q_i$$

schreiben, wo $\delta$ das kovariante Differential in dem Riemannschen Raume mit der Fundamentalform $ds^2 = g_{ik}\, dx^i\, dx^k$ bedeutet. $x^k$ sind dabei die unabhängigen Parameter des Systems.

Kommen noch welche sklero- und nichtholonome Bindungen hinzu, so können wir sie durch eine Zwangskraft ersetzen. Die Bindungen definieren ein $m$-Richtungsfeld, in welches der Geschwindigkeitsvektor fallen muß. Wir

[1]) Vgl. in bezug auf die Einfachheit Formeln (6.32) und (6.52) von Synge und (44) von Vranceanu. Bei dem letzteren sind noch die Definitionsgleichungen für die auftretenden Symbole zu berücksichtigen.

[2]) Levi-Civita, p. 314, (35').

[3]) S. z. B. E. Cartan. Leçons sur la géometrie des espaces de Riemann. Paris 1928 p. 42.





bezeichnen den Einheitsaffinor der derart definierten und orthogonal eingespanten $V_n^m$ mit $B_l^k$. Die genannte Zwangskraft, die doch auf den virtuellen Verschiebungen senkrecht stehen muß, weil sie keine Arbeit leistet, muß in die orthogonale Einspannungsrichtung fallen. Bezeichnen wir sie mit $R^k$, so ist also $B_l^k R^l = 0$. Die Bewegungsgleichungen

$$\frac{\delta v^k}{dt} = Q^k + R^k$$

projizieren wir nun in die $V_n^m$ und erhalten:

$$(29)\qquad \frac{\delta' v^k}{dt} = Q'^k\ {}^{1)}.$$

Nun beziehen wir eineindeutig zwei benachbarte Bahnkurven des Systems aufeinander, wobei wir die Bezeichnungen von Ziff. 3 beibehalten, nur schreiben wir $t$ statt $s$. Wenden wir wieder die Vertauschungsformel an, diesmal auf den Vektor $v^k = \frac{\delta x^k}{dt}$, so kommt

$$\delta' \left(\frac{\delta' \xi^c}{dt} - \mu v^c\right) - \bar\delta' (Q'^c\, dt) = R'_{jia}{}^c\, \xi^j\, \delta x^i\, v^a,$$

da nach den Bewegungsgleichungen (29) $\delta' v^k = Q'^k\, dt$ ist. Führen wir die Differentiationen aus, ersetzen wir wieder $\delta' v^k$ durch $Q'^k\, dt$ und dividieren wir durch $dt$, so kommt:

$$(30)\qquad \boxed{\frac{\delta'^2 \xi^c}{dt^2} - \frac{d\mu}{dt} v^c = R'_{jia}{}^c\, \xi^j v^i v^a + 2\mu\, Q'^c + \bar\delta' Q'^c}\,.$$

Sind die Kurven $C$ und $C'$ „isochron“ aufeinander bezogen, also $\bar\delta\, dt = 0$, $\mu = 0$, so erhält (30) die einfache Gestalt:

$$(30.1)\qquad \boxed{\frac{\delta'^2 \xi^c}{dt^2} = R'_{jia}{}^c\, \xi^j v^i v^a + \bar\delta' Q'^c}\,.$$

*Bemerkung.* Sowohl (27), als (30) stellen *nur m* unabhängige Gleichungen dar, da doch die beiden Seiten dieser Gleichungen in die $A_n^m$ fallen. Die übrigen $n - m$ Gleichungen sind durch die für *jede* Kurve der $A_n^m$ gültigen Gleichungen (21) geliefert, unter denen es ähnlich nur $n - m$ unabhängige gibt.

[1]) Schouten, p. 171, (115). Vranceanu. Sopra le equazioni del moto di un sistema anolonomo. Rend. dei Lincei, IV (1926) p. 508.

Wie sind aber die $\frac{\delta^2 \xi^k}{dt^2}$ selbst zu berechnen? Zuerst haben wir:

$$\delta^2 \xi^k = \delta'^2 \xi^k + \delta'' \delta' \xi^k + \delta' \delta'' \xi^k + \delta''^2 \xi^k.$$

Die drei ersten Summanden rechts erhalten wir bzw. aus (27), (22) und (23). Was den vierten anbetrifft, so kommt nach der $\delta''$-Differentiation von (21):

$$\frac{\delta''^2 \xi^k}{ds^2} = C^k_h \nabla_l (H'_{ji}{}^h - L''_{j.i}{}^h) \cdot \xi^j u^i u^l, \tag{31}$$

denn die anderen, aus der Differentiation entspringenden Summanden verschwinden wegen (20). Addition von (27), (22), (23) und (31) ergibt die Formel:

$$\frac{\delta^2 \xi^k}{ds^2} - \mu u^k = (H'_{ji}{}^k - L'_{j.i}{}^k) \frac{\delta \xi^i}{ds} u^j + [R'_{jli}{}^k + C^k_h \nabla_l (H'_{ji}{}^h - L''_{j.i}{}^h)] \xi^j u^i u^l.$$

## § 4. Bewegungen als geodätische Linien.

### Abweichungsgleichungen für beliebige dynamische Systeme.

1. Unter einer *Bewegung* eines dynamischen Systems von $n$ Freiheitsgraden, dessen Lage durch die Parameter $x^k$ bestimmt ist, verstehen wir eine Kurve des $(n+1)$-dimensionalen Raumes $(x^k, t)$, welche durch die Gleichungen $x^k = x^k(t)$ definiert ist, die den Differentialgleichungen der Bewegung genügen. Diese Kurve bestimmt also nicht nur die Bahn, sondern auch ihre Durchlaufungsart.

Das Problem der Zurückführung der Untersuchung eines dynamischen Systems auf die Untersuchung der Geodätischen eines geeignet gewählten mehrdimensionalen Raumes wurde schon mehrfach in Angriff genommen. Wir erinnern zuerst an das klassische Theorem von Jacobi, nach dem die *Bahnkurven eines skleronomen, konservativen Systems von bestimmter Gesamtenergie* durch die Geodätischen des Riemannschen Raumes mit

$$ds^2 = 2(h - V)\, T\, dt^2$$

gegeben sind, wo $h$ die Gesamtenergie, $V$ das Potential bedeutet. Dieser Raum ist offenbar durch das System selbst noch nicht bestimmt[1]. Soll der entsprechende Raum dem System eindeutig zugeordnet sein, so muß er $n+1$ Dimensionen haben: die Gesamtheit der Bewegungen ist nämlich (im allgemeinen) $2n$-dimensional, wogegen die der Geodätischen eines $n$-dimensionalen Raumes nur $(2n-2)$-dimensional ist. Einen solchen Riemannschen Raum hat Eisenhart[2]) angegeben, aber nur für *konservative, sklero- und holonome* Systeme.

---

[1]) Vgl. z. B. P. Appell. Traité de mécanique rationnelle, t. II. Paris, 1923 p. 453.
[2]) L. P. Eisenhart. Dynamical Trajectories and Geodesics. Ann. of Math., vol. 30 (1929) p. 603





Dabei ist leider die $(n+1)$-ste Koordinate nicht die Zeit, sondern *ein für das System nicht holonomer Parameter* (der also durch die Lage des Systems nicht bestimmt ist), nämlich eine lineare Kombination aus der Jacobischen Wirkung und der Zeit. Für rheonome (aber immer holonome und konservative Systeme) gibt er[1]) einen Riemannschen Raum von $n+2$ Dimensionen an, der das Gewünschte leistet.

In diesem Paragraphen verzichten wir zwar auf die Konstruktion eines das Problem lösenden *Riemannschen* Raumes, indem wir uns mit einem *affinen* begnügen[2]). Dafür aber wird das Problem für *beliebige*, aber nur *linear* nicht-holonome Systeme gelöst, die aber sonst rheonom und beliebigen Kräften unterworfen sein können.

**2. Holonome Systeme.** Wir betrachten ein beliebiges holonomes Systems von $n$ Freiheitsgraden, auf die Parameter $x^k$ bezogen, das durch seine kinetische Energie

$$T = \tfrac{1}{2} g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta$$

und die einwirkenden verallgemeinerten Kräfte gegeben ist. Weiter setzen wir in diesem Paragraphen fest, daß griechische Indizes die Werte $0, 1, 2, \ldots, n$, die lateinischen nur die Werte $1, 2, \ldots, n$ durchlaufen.

Unter $x^0$ verstehen wir die Zeit $t$; $\dot{x}^0$ steht also für 1, die Form für $T$ ist im allgemeinen nicht homogen. Wir explizitieren zuerst die Lagrangeschen Gleichungen, unter der Voraussetzung, daß die $g_{\alpha\beta}$ auch von $x^0 = t$ abhängen. Wir haben:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i} = g_{i\alpha} \dot{x}^\alpha, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i} = g_{ij} \ddot{x}^j + \partial_\beta g_{i\alpha} \cdot \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta, \quad \frac{\partial T}{\partial x^i} = \tfrac{1}{2} \partial_i g_{\alpha\beta} \cdot \dot{x}^\alpha x^\beta,$$

also:

$$Q_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial T}{\partial x^i} = g_{ij} \ddot{x}^j + [i, \alpha\beta] \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta; \quad [\gamma, \alpha\beta] = \tfrac{1}{2}(\partial_\alpha g_{\beta\gamma} + \partial_\beta g_{\gamma\alpha} - \partial_\gamma g_{\alpha\beta}).$$

Nennen wir $g^{ki}$ die die zu $g_{ij}$ (*nicht etwa* $g_{\alpha\beta}$!!) reziproke $n$-dimensionale Matrix, so können wir diese Gleichungen in der Form

$$\ddot{x}^k + g^{ki} [i, \alpha\beta] \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = Q^k \qquad (Q^k = g^{ki} Q_i) \tag{32}$$

umschreiben.

---

[1]) L. P. Eisenhart. l. c., p. 593.
[2]) Vgl. auch J. L. Synge. On the Geometry of Dynamics. Phil. Trans. Roy. Soc. London, vol. 226, p. 35, Zeile 17 v. o.
Daß ein solcher Riemannscher Raum für beliebige Systeme nicht existieren kann ist augenscheinlich. Wir hoffen aber an einer anderen Stelle zu beweisen, daß er auch für ein konservatives, skleronomes System im allgemeinen nicht existiert.

Wir definieren jetzt eine affine $(n+1)$-dimensionale Übertragung folgendermaßen:

$$\Gamma^k_{i\beta} = g^{kj}[j, i\beta], \qquad \Gamma^k_{00} = g^{kj}[j, 0\,0], \qquad \Gamma^0_{\alpha\beta} = 0. \tag{33}$$

Es ist leicht zu verifizieren, daß die zu dieser Übertragung gehörenden Geodätischen die Bewegungen unseres Systems sind. In der Tat, aus den Gleichungen

$$\frac{d^2x^\lambda}{ds^2} + \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = 0$$

folgt für $\lambda = 0$:

$$\frac{d^2x^0}{ds^2} + \Gamma^0_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = \frac{d^2t}{ds^2} = 0, \tag{34}$$

also $s = kt + s_0$. Wir wählen nun gerade $s = t$. Das erlaubt die übrigen Gleichungen in der Form:

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} + \Gamma^k_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{dt}\frac{dx^\beta}{dt} = 0$$

zu schreiben. Wir explizitieren weiter, indem wir die Werte (33) für $\Gamma^k_{\alpha\beta}$ einführen, und erhalten dann die Gleichungen (32).

Die geodätischen Linien der Übertragung (33) können mit den Bewegungen eines beliebigen holonomen Systems übereinstimmen.

Ändern wir die auf das System einwirkenden Kräfte, so muß auch die Übertragung geändert werden, wenn die Bewegungen, nach wie vor, geodätische Linien bleiben sollen. Kommen nämlich zu den $Q^k$ noch die Kräfte $R^k$ hinzu, so müssen nach (33) die $\Gamma^k_{00}$ um $R^k$ vermindert werden. Die Bewegungsgleichungen lauten dann:

$$\frac{d^2x^\lambda}{ds^2} + \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} - R^\lambda\left(\frac{dx^0}{ds}\right)^2 = 0,$$

wenn wir noch $R^0 = 0$ setzen. In dem Raume mit der Übertragung (33) lauten also die Bewegungsgleichungen eines holonomen Systems:

$$\frac{\delta^2x^\mu}{ds^2} = R^\mu\left(\frac{dt}{ds}\right)^2, \tag{35}$$

wenn $R^k$ die bei der Bildung der $\Gamma^k_{00}$ unberücksichtigten, auf das System außer $Q^k$ einwirkenden Kräfte bedeuten.

**3. Nichtholonome Systeme.** Unter $A_{n+1}$ verstehen wir den eben definierten affinen Raum mit der Übertragung (33) und setzen nun voraus, daß unseres System gewissen nichtholonomen Bedingungen

$$\underset{p}{e}_\alpha\,\delta x^\alpha = 0 \qquad (p, q = 1, 2, \ldots, n-m) \tag{36}$$





unterworfen ist, wobei die $\underset{p}{e}_\alpha$ von der Zeit abhängig sind. Diese Gleichungen bestimmen offenbar eine $A^{m+1}_{n+1}$. Wie soll man sie einspannen und wie ist dann der Einheitsaffinor zu finden?

Als Einspannungsrichtung wählen wir diese, in welche die die Bindungen (36) ersetzende Zwangskraft fällt. Bezeichnen wir sie mit $R_i$, so muß aus

$$\underset{p}{e}_i\,\delta x^i = 0$$

(bei den virtuellen Verrückungen ist $\delta x^0 = \delta t = 0$!) $R_i\,\delta x^i = 0$ folgen. Es ist also:

$$R_i = \underset{p}{R}\,\underset{p}{e}_i.$$

Daraus folgt:

$$R^k = g^{ki}R_i = \underset{p}{R}\,g^{ki}\,\underset{p}{e}_i.$$

Setzen wir noch $R^0 = 0$, so können wir schreiben:

$$R^\mu = \underset{p}{R}\,\underset{p}{e}^\mu, \tag{37}$$

wo die Vektoren $\underset{p}{e}^\mu$ durch die Gleichungen

$$\underset{p}{e}^k = g^{ki}\underset{p}{e}_i, \qquad \underset{p}{e}^0 = 0, \tag{38}$$

erklärt sind. Die Zwangskraft fällt nach der Gleichung (37) in den durch die Vektoren $\underset{p}{e}^\mu$ aufgespannten Raum, und diesen wählen wir als die pseudoorthogonale Einspannungsrichtung. Wir überlassen dem Leser den Beweis, daß der Einheitsaffinor der derart eingespannten $A^{m+1}_{n+1}$ durch die Formeln:

$$B^\mu_\lambda = A^\mu_\lambda - C^\mu_\lambda; \quad C^\mu_\lambda = h^{pq}\underset{p}{e}_\lambda\,\underset{q}{e}^\mu; \quad h^{pq}h_{qr} = \delta^p_r; \quad h_{qr} = \underset{q}{e}^\mu\,\underset{r}{e}_\mu \tag{39}$$
$$(p, q, r = 1, \ldots, n-m)$$

gegeben ist.

Die Bewegungsgleichungen des gebundenen Systems lauten nun offenbar nach (35):

$$\frac{\delta^2x^\mu}{ds^2} = R^\mu\left(\frac{dt}{ds}\right)^2.$$

Projizieren wir nun in die $A^{m+1}_{n+1}$, so kommt, da doch $R^\mu$ in die Einspannungsrichtung fällt:

$$\frac{\delta'^2x^\mu}{ds^2} = 0. \tag{40}$$

Das System beschreibt also eine geodätische Linie der $A^{m+1}_{n+1}$, w. z. b. w.

Das sind nur $m+1$ unabhängige Gleichungen, die den Parameter $s$ mit-bestimmen. Außerdem haben wir $n - m$ Bedingungsgleichungen erster Ordnung:

$$e_{\alpha}^{p} \frac{\delta x^{\alpha}}{ds} = 0. \tag{41}$$

Die Gleichungen (40) und (41) bilden die allgemeinsten Bewegungsgleichungen der linear nichtholonomen Systeme. Die Abweichungsgleichungen schreiben wir jetzt nach § 3, Ziff. 1, 3 hin.

**4. Zusammenfassung.** Wir sind zum folgenden Ergebnis gelangt:

Ist ein beliebiges, linear nichtholonomes dynamisches System durch seine kinetische Energie

$$T = \tfrac{1}{2} g_{\alpha\beta}\, \dot{x}^{\alpha} \dot{x}^{\beta}, \qquad x^0 = t, \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, \ldots, m)$$

durch die einwirkenden verallgemeinerten Kräfte $Q_{\iota}$ und durch die nichtholonomen Bedingungen

$$e_{\alpha}^{p}\, \delta x^{\alpha} = 0 \qquad (p = 1, \ldots, n - m)$$

gegeben, so erhalten wir seine Abweichungsgleichungen in der Gestalt (wenn wir die Variation isochronisch wählen):

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\delta'^2 \xi^{\mu}}{dt^2} &= R'_{\omega\lambda\nu}{}^{\mu}\, \xi^{\omega} v^{\lambda} v^{\nu} \\ \frac{\delta'' \xi^{\mu}}{dt} &= (H'_{\lambda\nu}{}^{\mu} - L''_{\lambda}{}^{\mu}{}_{\nu})\, \xi^{\lambda} v^{\nu} \end{aligned}} \; . \qquad \begin{aligned} &(v^{\lambda} = \dot{x}^{\lambda}) \\ &(\text{s. } (27), (21)) \end{aligned} \tag{42}$$

(Wir haben $s = t$ angenommen, was nach (34) offenbar erlaubt ist). Hier ist:

$$R'_{\omega\lambda\nu}{}^{\mu} = \partial_{\lambda} \Gamma'^{\mu}_{\nu\omega} - \partial_{\omega} \Gamma'^{\mu}_{\nu\lambda} + \Gamma'^{\alpha}_{\nu\omega} \Gamma'^{\mu}_{\alpha\lambda} - \Gamma'^{\alpha}_{\nu\lambda} \Gamma'^{\mu}_{\alpha\omega}, \qquad (\text{s. } (15))$$

$$\Gamma'^{\mu}_{\nu\omega} = B^{\mu}_{\alpha} \Gamma^{\alpha}_{\nu\omega} - \partial_{\omega} B^{\mu}_{\nu}. \qquad (\text{s. } (4))$$

$\Gamma^{\alpha}_{\nu\omega}$ sind durch (33), $B^{\mu}_{\alpha}$ durch (39) definiert. Die ersten hängen nur von $g_{\alpha\beta}$ und $Q_{\iota}$, die zweiten von den $g_{ik}$ und den nichtholonomen Bedingungen ab.

---

## Streszczenie.

### Równania na zboczenie dla dowolnych układów dynamicznych.

W roku 1926 podał Levi-Civita uogólnienie wzoru Jacobie'go na zboczenie geodezyjne, tj. na składowe vektora $MM'$, gdzie $M$ i $M'$ są odpowiadającemi sobie punktami na geodezyjnej danej i sąsiedniej. Uogólnienie to dotyczyło dowolnych przestrzeni riemannowskich. W pracy niniejszej stosujemy pewien pomysł, który pozwala łatwo wyprowadzić zarówno równania Levi-





Civity, jak ich uogólnienie na przestrzenie nieholonomiczne, afinalne. Otrzymujemy przytem w tym ogólniejszym przypadku wzór (27) tej samej postaci, co dla przestrzeni holonomicznych, a zatem prostszy niż analogiczne wzory, uzyskane przez Vranceanu i Synge'a.

Głównym celem pracy są zastosowania do równań dynamiki. Podajemy dwa wzory (30) i (42) na zboczenie dynamiczne, tj. na składowe wektora $MM'$, łączącego dwa odpowiadające sobie punkty na dwóch sąsiednich torach dynamicznych. Jeden jest oparty na interpretacji układu dynamicznego, jako punktu przestrzeni $n$-wymiarowej, i stosuje się wyłącznie do układów skleronomicznych, pozatem zresztą dowolnych. Drugi natomiast stosuje się do układów jakichkolwiek (z tem tylko zastrzeżeniem, że więzy nieholonomiczne są linjowe) i oparty jest na interpretacji $(n+1)$-wymiarowej układu w przestrzeni, gdzie spółrzędnemi są parametry układu i czas. Okazujemy, że do każdego układu można dobrać taką przestrzeń (*afinalną*, nie *metryczną*), której geodezyjne będą dawały prawa ruchu tego układu. To odwzorowanie $(n+1)$-wymiarowe, w przeciwieństwie do tych, które były stosowane dotychczas, jest oparte na afinalnej zasadzie, i dlatego może objąć również przypadek więzów zależnych od czasu i układu niezachowawczego. Wzory (42) zawierają najistotniejszy wynik pracy.

---