

Gałąź krzywej jasności w głównym minimum daje się zupełnie dobrze przedstawić jako krzywa zaćmieniowa typu U. Gdy procentowa strata światła $n \geq 0.1$, wówczas O—C nie przekraczają $0^d.0012$.

Natomiast gałąź krzywej w minimum pobocznym nie daje się przedstawić jako krzywa czysto zaćmieniowa. Charakterystyka $\chi(k, \alpha_s, \frac{1}{2}) = C/D$ Russella, obliczona z różnych punktów krzywej, wykazuje stały wzrost ku środkowi zaćmienia, zaś jej średnia wartość, rozważona wraz z charakterystyką D , nie odpowiada żadnej rzeczywistej krzywej zaćmieniowej, dostarczając urojonych wartości na fazę początku zaćmienia. Ażeby otrzymać wartości rzeczywiste, musimy przyjąć inną wartość D (średnia C/D zgadza się w przybliżeniu z główną gałęzią krzywej i głębokościami minimów), przypuszczając w ten sposób błąd $+0^d.010$ w fazie, odpowiadającej $n = \frac{1}{2}$.

Założenie kulistości gwiazd nie prowadzi do lepszych wyników. Jednakże widocznym jest, że orbita musi być uważana za eliptyczną, ponieważ zaś zaćmienie poboczne trwa około 0.4 okresu, więc zwykle wzory Russella nie są w tym przypadku ściśle. Obliczenie dokładnej krzywej teoretycznej wymaga znajomości $g = e \sin \omega$, i , r_1 .

Pomijając kształt krzywej w minimum pobocznym, można było znaleźć graniczne wartości elementów w hyp. U tylko na podstawie krzywej w minimum głównym i głębokości obu minimów. Wyniki zestawione są w Tab. IV, gdzie przyjęto oznaczenia Russella¹⁾, odnosząc je jednak bądź do głównej gałęzi lub gwiazdy pokrywanej w głównym minimum (znaczek p), bądź do gałęzi pobocznej lub gwiazdy pokrywanej w minimum pobocznym (znaczek s). Wielkości g oraz r_1 , obliczone na podstawie tych danych są zbyt wielkie, tak, że obserwacje nie dają się przedstawić przez teorię w sposób zadowalający, nawet w założeniu kulistości gwiazd.

Zauważmy jednak, że znaczny mimośród pozostaje w zgodzie z niejednakowym czasem trwania obu zaćmień. Główne zaćmienie trwa około $4^h.2$ i kończy się w fazie 0.205.

Hypoteza D w założeniu gwiazd eliptycznych jest niemożliwa, w założeniu gwiazd kulistych prowadzi do zbyt wielkich g .

Z powyższego wynika, że czysto zaćmieniowe wyjaśnienie zmienności AK Herculis jest niemożliwe. Krzywa jasności tej gwiazdy wykazuje ponadto pewne nieregularności, które zostały wyrównane przed rozpoczęciem obliczeń metodą Russella (asymetria początku i końca głównego zaćmienia, widoczna z wykresu). Wreszcie wybitna w tym przypadku nierówność czasów trwania dwóch zaćmień nie spotyka się w ciasnych układach typu β Lyr. Ze względu na te okoliczności wydaje się możliwe, że AK Herculis jest również fizycznie zmienna. Badania spektroskopowe tej gwiazdy byłyby pożądane.

¹⁾ Ap. J. 35, 329; 36, 57, 404.

Powierzchnia krzywolinjowa 5-go rzędu z podwójną krzywą skośną rzędu 3-go (Fläche 5. Ordnung mit einer doppelten kubischen Raumkurve)

przez

A. Plamitzera

Ogólną powierzchnię krzywolinjową 5-go rzędu z podwójną krzywą skośną 3-go rzędu, nie posiadającą żadnych dalszych punktów wielokrotnych, pierwsi badali A. Clebsch¹⁾ i R. Sturm²⁾. W swej rozprawie doktorskiej podaje W. Jaekel³⁾ następującą konstrukcję rzutową: powierzchnia ta jest miejscem geometrycznym punktów przecięcia się homologicznych powierzchni dwóch pęków rzutowych, z których pierwszy jest pękiem kwadryk, drugi zaś pękiem powierzchni rzędu 3-go, — przyczem krzywe podstawowe 4-go, wzgl. 9-go rzędu tych pęków posiadają wspólną krzywą skośną rzędu 3-go.

Ustanowimy przekształcenia kwadratowe pomiędzy płaszczyznami wiązki (W) oraz płaszczyznami każdej z dwóch kolineacyjnych wiązek (W_1) i (W_2). Homologiczne płaszczyzny wiązki (W) i wiązki np. (W_2) niechaj wyznaczają kongruencję K_{32} rzędu 2-go, a homologiczne płaszczyzny wiązek (W_1) i (W_2) kongruencję K_{12} dwusiecznych krzywej skośnej 3-go rzędu S^3_{12} . W rozprawie niniejszej wykazuje, iż ogólna powierzchnia $\mathcal{W}^5$ rzędu 5-go z podwójną krzywą

¹⁾ A. Clebsch, Ueber die Abbildung algebraischer Flächen, insbesondere der vierten u. fünften Ordnung, Mathem. Annalen Bd. I. S. 253—316, Leipzig 1869.

²⁾ Rudolf Sturm, Ueber die Flächen mit einer endlichen Zahl von (einfachen) Geraden, vorzugsweise die der vierten u. fünften Ordnung, Mathem. Annalen Bd. IV. S. 249—283, Leipzig 1871. — Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften Bd. IV. S. 311—315, Leipzig u. Berlin 1909.

³⁾ Waldemar Jaekel, Über Flächen 5. Ordnung mit einer doppelten kubischen Raumkurve, S. 29—35, Dissertation von Breslau 1904.

S_{12}^3 może być utworem trzech wiązek (W), (W_1) i (W_2), albo też utworem odpowiedniości [1, 1]-znacznej, zachodzącej pomiędzy: a) prostymi kongruencji K_{02} i płaszczyznami wiązki (W_1), wzgl. b) prostymi kongruencji K_{12} i płaszczyznami wiązki (W).

Konstruuje 11 prostych, 55 stożkowych i przekroje płaskie powierzchni $\mathcal{W}^5$, wyznaczam na niej krzywe skośne wyższych rzędów, oraz badam wzajemne zachowanie się tych krzywych. Dowodzę, iż wierzchołkami kolineacyjnych wiązek (W_1) i (W_2) mogą być każde dwa dowolne punkty krzywej S_{12}^3 , wierzchołek zaś wiązki (W) jest punktem pojedynczym osobliwym powierzchni $\mathcal{W}^5$, a każda z trzech płaszczyzn głównych wiązki (W) przecina powierzchnię $\mathcal{W}^5$ w stożkowej i ogólnej krzywej 3-go rzędu. W ust. 17-ym wykazuje, iż powierzchnia $\mathcal{W}^5$ posiada 165 takich pojedynczych punktów osobliwych, a każdy z nich może być uważany za wierzchołek wiązki (W). W ostatnim ustępie ustalę dwa odwzorowania płaskie powierzchni krzywolinijowej $\mathcal{W}^5$.

1. Pomiedzy dwiema wiązkami środkowymi (W_1) i (W_2), których wierzchołkami (środkami) W_1 i W_2 są dwa dowolne i różne od siebie punkty, ustanowimy ogólną kolineację

$$(1) \quad (W_1) \times (W_2).$$

Pomiedzy płaszczyznami wiązek (W) i (W_1), których środkami są dowolne i różne od siebie punkty W i W_1 , ustanowimy ogólne przekształcenie kwadratowe (kremonjańskie 2-go stopnia)

$$(2) \quad (W) \pi^2 (W_1),$$

w którym płaszczyzny λ , μ i ν wiązki (W), oraz płaszczyzny ξ_1 , η_1 i ζ_1 wiązki (W_1) są płaszczyznami głównymi, a proste $x = \mu\nu$, $y = \nu\lambda$ i $z = \lambda\mu$ wiązki (W), oraz proste $l_1 = \eta_1\xi_1$, $m_1 = \xi_1\zeta_1$ i $n_1 = \xi_1\eta_1$ wiązki (W_1) są prostymi głównymi.

Z zależności geometrycznych (1) i (2) wynika bezpośrednio przekształcenie kwadratowe

$$(3) \quad (W) \pi^2 (W_2)$$

pomiedzy płaszczyznami wiązek (W) i (W_2), przychem płaszczyzny ξ_2 , η_2 i ζ_2 , oraz proste $l_2 = \eta_2\xi_2$, $m_2 = \xi_2\zeta_2$ i $n_2 = \xi_2\eta_2$ wiązki (W_2) — podporządkowane odpow. płaszczyznom ξ_1 , η_1 i ζ_1 , wzgl. prostym l_1 , m_1 i n_1 wiązki (W_1) za pośrednictwem kolineacji (1) — są elementami głównymi wiązki (W_1).

Dane wiązki przetnijmy odpow. płaszczyznami ω , ω_1 i ω_2 (wzgl. jedną płaszczyzną ω), nie przechodzącymi przez wierzchołki W , W_1 i W_2 . Otrzy-

mamy wówczas trzy układy płaskie (ω), (ω_1) i (ω_2), pomiedzy którymi — na mocy relacji (1), (2) i (3) — zachodzą a) ogólna kolineacja

$$(1a) \quad (\omega) \times (\omega_2)$$

oraz b) ogólne przekształcenia kwadratowe

$$(2a) \quad (\omega) \pi^2 (\omega_1)$$

i

$$(3a) \quad (\omega) \pi^2 (\omega_2)$$

pomiedzy prostymi $a = \omega\alpha$, $a_1 = \omega_1\alpha_1$, $a_2 = \omega_2\alpha_2$; $b = \omega\beta$, $b_1 = \omega_1\beta_1$, $b_2 = \omega_2\beta_2$;... tych układów. Proste $l = \omega\lambda$, $m = \omega\mu$, $n = \omega\nu$ układu (ω), proste $x_1 = \omega_1\xi_1$, $y_1 = \omega_1\eta_1$, $z_1 = \omega_1\zeta_1$ układu (ω_1) i proste $x_2 = \omega_2\xi_2$, $y_2 = \omega_2\eta_2$ i $z_2 = \omega_2\zeta_2$ układu (ω_2) są prostymi głównymi, a punkty $X = \omega x$, $Y = \omega y$, $Z = \omega z$, $L_1 = \omega_1 l_1$, $M_1 = \omega_1 m_1$, $N_1 = \omega_1 n_1$, $L_2 = \omega_2 l_2$, $M_2 = \omega_2 m_2$ i $N_2 = \omega_2 n_2$ są punktami głównymi tych przekształceń kwadratowych.

2. Pomiedzy płaszczyznami trzech wiązek (W), (W_1) i (W_2), których środkami są trzy dowolne i różne punkty W , W_1 i W_2 , niechaj zachodzą zależności geometryczne

$$(4) \quad (W_1) \times (W_2) \quad (W) \pi^2 (W_1) \quad (W) \pi^2 (W_2),$$

wymienione pod (1), (2) i (3) w ust. 1-ym.

Ogół prostych $a_{12} = a_1\alpha_2$, $b_{12} = \beta_1\beta_2$,..., przecięcia się homologicznych płaszczyzn α_1 i α_2 , β_1 i β_2 ,... kolineacyjnych wiązek (W_1) i (W_2), tworzy¹⁾ kongruencję K_{12} rzędu 1-go i klasy 3-jej. Proste tej kongruencji są „dwusiecznymi“ krzywej skośnej S_{12}^3 rzędu 3-go, która jest miejscem geometrycznym punktów przecięcia się homologicznych prostych owych wiązek (W_1) i (W_2). Każdy punkt krzywej S_{12}^3 , która przechodzi przez wierzchołki W_1 i W_2 , jest punktem osobliwym 2-go stopnia dla kongruencji K_{12} .

Omawiana kongruencja może być klasy 2-jej lub 1-jej zależnie od tego, czy kolineacyjne wiązki (W_1) i (W_2) posiadają płaszczyznę zjednoczoną, wzgl. prostą zjednoczoną W_1W_2 .

Ogół prostych $a_{01} = \alpha\alpha_1$, $b_{01} = \beta\beta_1$,..., przecięcia się homologicznych płaszczyzn α i α_1 , β i β_1 ,... danych wiązek (W) i (W_1) utworzy²⁾ kongruencję K_{01} rzędu 2-go i klasy 4-jej. Kongruencja ta posiada: a) dwa punkty osobliwe 3-go stopnia W i W_1 ; b) sześć punktów osobliwych 2-go stopnia D_i ($i = 1, 2, \dots, 6$), z których dwa leżą na prostej $\lambda\xi_1$, dwa na pro-

¹⁾ por. Th. Reye, Die Geometrie der Lage (IV. Aufl.) Bd. II. S. 169, Stuttgart 1907.

²⁾ por. R. Sturm, Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften, Leipzig u. Berlin 1909, Bd. IV. Nr. 791 u. 802.

stej $\mu\eta_1$, dwa zaś na prostej $\nu\zeta_1$, a każdy punkt D_i jest przecięciem się dwóch homologicznych prostych wiązek $(W)\pi^2(W_1)$; c) sześć punktów osobliwych 1-go stopnia $L_1 = \lambda l_1$, $M_1 = \mu m_1$, $N_1 = \nu n_1$, $X_1 = x\xi_1$, $Y_1 = y\eta_1$ i $Z_1 = z\zeta_1$; d) sześć płaszczyzn osobliwych 1-go stopnia λ , μ , ν , ξ_1 , η_1 i ζ_1 ; e) prostą podwójną WW_1 .

Podobnie ogół prostych $a_{03} = \alpha\alpha_1$, $b_{03} = \beta\beta_1, \dots$, przecięcia się homologicznych płaszczyzn α i α_1 , β i $\beta_1, \dots$ danych wiązek $(W)\pi^2(W_2)$ utworzy kongruencję K_{02} rzędu 2-go i klasy 4-ej. Kongruencja ta posiada dwa punkty osobliwe 3-go stopnia W i W_2 , sześć punktów osobliwych 2-go stopnia D_i , sześć punktów osobliwych 1-go stopnia $L_2 = \lambda l_2$, $M_2 = \mu m_2$, $N_2 = \nu n_2$, $X_2 = x\xi_2$, $Y_2 = y\eta_2$ i $Z_2 = z\zeta_2$, sześć płaszczyzn osobliwych 1-go stopnia λ , μ , ν , ξ_2 , η_2 i ζ_2 , oraz prostą podwójną WW_2 .

Omawiane kongruencje K_{01} i K_{02} nazywamy¹⁾ kongruencjami kremojanskimi.

W szczególnym przypadku kongruencja np. K_{01} może być klasy 3-jej lub 2-jej, zależnie od tego, czy wiązki $(W)\pi^2(W_1)$ posiadają jedną, wzgl. dwie płaszczyzny zjednoczone, przechodzące przez prostą WW_1 .

Skoro weźmiemy pod uwagę trójkę homologicznych płaszczyzn α , α_1 i α_2 danych wiązek (W) , (W_1) i (W_2) , które spełniają relację (4), to wówczas przez punkt $A = \alpha\alpha_1\alpha_2$ przechodzą: prosta $a_{01} = \alpha\alpha_1$, należąca do kongruencji K_{01} , prosta $a_{02} = \alpha\alpha_2$ kongruencji K_{02} i prosta $a_{12} = \alpha_1\alpha_2$ kongruencji K_{12} .

Przez wierzchołek W wiązek (W) przechodzi²⁾ jedna i tylko jedna prosta $b_{12} = \beta_1\beta_2$, należąca do kongruencji K_{12} rzędu 1-go. Ponieważ homologicznym płaszczyznom β_1 i β_2 kolineacyjnych wiązek (W_1) i (W_2) podporządkowana jest w myśl relacji (4) płaszczyzna β w wiązce (W) , przeto przez W przechodzi jedna i tylko jedna trójka homologicznych płaszczyzn β , β_1 , β_2 uważanych wiązek.

Przez wierzchołek W_1 wiązek (W_1) przechodzą tylko dwie proste $c_{02} = \gamma\gamma_2$ i $a_{02} = \delta\delta_2$, należące do kongruencji 2-go rzędu K_{02} . Ponieważ elementom γ i δ wiązek (W) , wzgl. γ_2 i δ_2 wiązek (W_1) , podporządkowane są płaszczyzny γ_1 i δ_1 w wiązce (W_1) , przeto przez W_1 przechodzą dwie i tylko dwie trójki płaszczyzn γ , γ_1 , γ_2 i δ , δ_1 , δ_2 . — Te same uwagi stosują się do wierzchołka W_2 wiązek (W_2) . A zatem:

Wierzchołki badanych wiązek (W) , (W_1) i (W_2) posiadają tę własność, że przez wierzchołek W przechodzi jedna i tylko jedna trójka, a przez każdy z wierzchołków W_1 i W_2 przechodzą dwie i tylko dwie trójki homologicznych płaszczyzn tych wiązek.

Wiadomo nam, że w punktach $C, D, \dots$ krzywej skośnej 3-go rzędu S_{12}^3 przecinają się odpow. homologiczne proste c_1 i c_2 , d_1 i $d_2, \dots$ kolineacyjnych wiązek (W_1) i (W_2) . Proste np. c_1 i c_2 uważamy za osie rzutowych pęków płaszczyzn

$$c_1(\alpha_1, \beta_1, \dots) \wedge c_2(\alpha_2, \beta_2, \dots)$$

których elementami są homologiczne płaszczyzny kolineacyjnych wiązek (W_1) i (W_2) . Podporządkowane im płaszczyzny $\alpha, \beta, \dots$ w wiązce (W) utworzą — jak to z relacji (4) na mocy teorii przekształceń kwadratowych wynika — stożek 2-go stopnia Γ^2 o wierzchołku W . Ponieważ przez uważany punkt $C = c_1c_2$ krzywej S_{12}^3 przechodzą dwie płaszczyzny styczne ε i φ do stożka Γ^2 , a podporządkowane im płaszczyzny ε_1 i φ_1 (wzgl. ε_2 i φ_2) należą do pęku (c_1) , wzgl. (c_2) , przeto: przez punkt C przechodzą dwie i tylko dwie trójki płaszczyzn ε , ε_1 , ε_2 i φ , φ_1 , φ_2 . Wykazaliśmy tedy, że:

Przez każdy punkt krzywej skośnej 3-go rzędu S_{12}^3 , — która jest miejscem geometrycznym punktów przecięcia się homologicznych prostych kolineacyjnych wiązek (W_1) i (W_2) — przechodzą dwie i tylko dwie trójki homologicznych płaszczyzn badanych wiązek (W) , (W_1) i (W_2) .

3. Skoro przez m i m' oznaczymy odpow. rzędy, a przez n i n' klasy dwóch danych kongruencji, to w myśl tw. Halphen'a¹⁾ posiadają owe kongruencje $(mm' + nn')$ wspólnych prostych. W rozważanym przypadku (ust. 2) kongruencje K_{12} i K_{01} , oraz K_{12} i K_{02} posiadają po 14 wspólnych prostych, a kongruencje K_{01} i K_{02} mają 20 wspólnych prostych.

Zbadajmy teraz liczbę takich prostych, które należą równocześnie do trzech kongruencji K_{12} , K_{01} i K_{02} . W tym celu przez punkty osobliwe 1-go stopnia (ust. 2) $L_1 = \lambda l_1$ i $L_2 = \lambda l_2$ kongruencji K_{01} i K_{02} poprowadźmy płaszczyzny: $\alpha_1 = l_1L_2$ i $\beta_2 = l_2L_1$. Wiadomo nam z teorii przekształceń kwadratowych, że płaszczyźnie głównej λ wiązek (W) podporządkowane są (ust. 1) w wiązkach (W_1) i (W_2) odpow. dwa pęki płaszczyzn (l_1) i (l_2) , których osiami są proste główne l_1 i l_2 tych wiązek. Wnosimy stąd, że płaszczyzny α_1 i β_2 przecinają element λ w prostej L_1L_2 , która jest prostą $\lambda\alpha_1 = a_{01}$ kongruencji K_{01} i równocześnie prostą $\lambda\beta_2 = b_{02}$ kongruencji K_{02} . Ponieważ jednak płaszczyzny $\alpha_1 = l_1L_2$ i $\beta_2 = l_2L_1$ w ogólności nie są elementami homologicznymi kolineacyjnych wiązek (W_1) i (W_2) , przeto proste $a_{12} = \alpha_1\alpha_2$ i $b_{12} = \beta_1\beta_2$ kongruencji K_{12} są różne od prostej L_1L_2 . Innymi słowy: prosta $L_1L_2 = a_{01} = b_{02}$, będąca wspólnym elementem kongruencji K_{01} i K_{02} , wcale nie należy do kongruencji K_{12} . W podobny sposób wykażemy, że proste M_1M_2 i N_1N_2 , przechodzące przez punkty osobliwe 1-go stopnia M_1 i M_2 , wzgl. N_1 i N_2 , są

¹⁾ por. R. Sturm, Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften, Leipzig u. Berlin 1909, Bd. IV. Nr. 791 u. 802.

²⁾ W rozważanym przypadku ogólnym punkt W nie leży na krzywej S_{12}^3 .

¹⁾ Comptes rendus, T. 74, str. 41.

wspólnymi prostymi kongruencji K_{01} i K_{02} , ale nie należą wcale do kongruencji K_{12} . Skonstruowane w powyższy sposób proste $L_1 L_2$, $M_1 M_2$ i $N_1 N_2$ leżą odpow. na płaszczyznach głównych λ , μ i ν wiązki (W) .

Przez wierzchołek W , który jest (ust. 2) punktem osobliwym 3-go stopnia dla każdej z kongruencji K_{01} i K_{02} , przechodzące proste tych kongruencji utworzą dwa stożki 3-go rzędu Γ^3 i Δ^3 . Stożki te przenikają się w 9-ciu prostych, z których każda np. $c_{01} = d_{02}$ jest elementem $c_{01} = \gamma\gamma_1$ kongruencji K_{01} i równocześnie elementem $d_{02} = \delta\delta_2$ kongruencji K_{02} . Prosta $c_{01} = d_{02}$ jest różna od prostych $c_{12} = \gamma_1\gamma_2$, $d_{12} = \delta_1\delta_2$, i nie może należeć do kongruencji K_{12} . Przez wierzchołek W wiązki (W) przechodzi zatem dziewięć takich prostych $c_{01} = d_{02}, \dots$, które są wspólnymi elementami kongruencji K_{01} i K_{02} , ale nie należą do kongruencji K_{12} .

Kongruencje K_{01} i K_{02} , oprócz dotychczas wymienionych prostych wspólnych, posiadają na mocy tw. Halphen a jeszcze $20 - (3 + 9) = 8$ dalszych wspólnych prostych; żadna z nich nie może leżeć na płaszczyznach głównych λ , μ i ν , ani przechodzić przez wierzchołek W wiązki (W) . Przypuśćmy, że jedna z tych ośmiu prostych jest elementem $s_{01} = \sigma\sigma_1$ kongruencji K_{01} i równocześnie prostą $t_{02} = \tau\tau_2$ kongruencji K_{02} , przyczem płaszczyzny σ_1 i τ_2 nie są elementami homologicznymi kolineacyjnych wiązek (W_1) i (W_2) . Z przyjętych warunków $s_{01} = t_{02}$, $s_{01}W = \sigma$ i $t_{02}W = \tau$ wynika, że płaszczyźnie $\sigma = \tau$ wiązki (W) podporządkowane są dwie różne płaszczyzny σ_1 i τ_1 w wiązce (W_1) , oraz dwie różne płaszczyzny σ_2 i τ_2 w wiązce (W_2) . Ponieważ dochodzimy do sprzeczności z podstawowymi zależnościami geometrycznymi, ujętymi w relacji (4) ust. 2-go, przeto nasze założenie o płaszczyznach σ_1 i τ_2 jest fałszywe. Przyjąć tedy musimy koniecznie, że σ_1 i τ_2 są homologicznymi płaszczyznami kolineacyjnych wiązek (W_1) i (W_2) . Innymi słowy płaszczyzna $\tau_2 = \sigma_2$, a temsamem $\tau = \sigma$, oraz prosta $t_{02} = \tau\tau_2 = \sigma\sigma_2 = s_{02}$, a ponieważ $s_{01} = t_{02}$, przeto uważana prosta $s_{01} = s_{02}$. Wykazaliśmy tedy, że każda z owych ośmiu wspólnych prostych $s_{01} = s_{02}$ kongruencji K_{01} i K_{02} jest krawędzią $s_{01} = \sigma\sigma_1$ przecięcia się płaszczyzn σ i σ_1 oraz krawędzią $s_{02} = \sigma\sigma_2$ przecięcia się płaszczyzn σ i σ_2 . Owa prosta $s_{01} = s_{02}$ jest zatem krawędzią przecięcia się homologicznych płaszczyzn σ_1 i σ_2 wiązek (W_1) i (W_2) i należy jako prosta $\sigma_1\sigma_2 = s_{12}$ do kongruencji K_{12} . Trójka homologicznych płaszczyzn σ , σ_1 i σ_2 badanych wiązek (W) , (W_1) i (W_2) przecina się tedy w prostej $s_{012} = \sigma\sigma_1\sigma_2$, która należy równocześnie do trzech kongruencji K_{01} , K_{02} i K_{12} . Dowiedliśmy zatem, że owe trzy kongruencje posiadają ośm wspólnych prostych $s_{012} = \sigma\sigma_1\sigma_2$, gdzie $\iota = 1, 2, \dots, 8$.

Do tego samego wyniku dojdziemy, skoro badać będziemy wspólne proste kongruencji K_{01} i K_{12} , wzgl. K_{02} i K_{12} . W pierwszym przypadku wierzchołek W_1 wiązki (W_1) jest (ust. 2) punktem osobliwym 3-go stopnia dla kongruencji K_{01} i punktem osobliwym 2-go stopnia dla kongruencji K_{12} . Proste tych kon-

gruencji, przechodzące przez W_1 , tworzą dwa stożki: Γ^3 rzędu 3-go i Δ^3 rzędu 2-go, które przenikają się w 6-ciu prostych $a_{01} = b_{12}, \dots$. Prosta $a_{01} = \alpha\alpha_1 = b_{12} = \beta_1\beta_2$ jest różna od prostych $a_{02} = \alpha\alpha_2$ i $b_{02} = \beta\beta_2$, a tem samem nie może należeć do kongruencji K_{02} . Kongruencje K_{01} i K_{12} , oprócz powyższych sześciu wspólnych prostych $a_{01} = b_{12}, \dots$, posiadają na mocy tw. Halphen a jeszcze $14 - 6 = 8$ dalszych wspólnych prostych. Ponieważ żadna z tych ośmiu prostych nie może przechodzić przez wierzchołek W_1 wiązki (W_1) , przeto każda z nich np. $s_{01} = t_{12}$ jest elementem $s_{01} = \sigma\sigma_1$ kongruencji K_{01} i elementem $t_{12} = \tau_1\tau_2$ kongruencji K_{12} . Ponieważ $\sigma_1 = W_1s_{01}$ i $\tau_1 = W_1t_{12} = W_1s_{01} = \sigma_1$, przeto w omówiony poprzednio sposób wykazemy, iż owa prosta jest elementem $s_{01} = \sigma\sigma_1 = s_{12} = \sigma_1\sigma_2$, a tem samem jako prosta $s_{02} = \sigma\sigma_2$ należy do kongruencji K_{02} . Otrzymaliśmy tedy ponownie ośm prostych $s_{012} = \sigma\sigma_1\sigma_2$, które należą równocześnie do kongruencji K_{01} , K_{02} i K_{12} . Każda z tych prostych, jako element kongruencji K_{12} , jest oczywiście (ust. 2) dwusieczną krzywej skośnej 3-go rzędu S_{12}^3 . A zatem:

Kongruencje K_{01} , K_{02} i K_{12} , występujące w rozważaniach ustępu 2-go, posiadają ośm wspólnych prostych $s_{012} = \sigma\sigma_1\sigma_2$, $\iota = 1, 2, \dots, 8$.

Powyższy związek wypisać też możemy w formie następującego twierdzenia:

Skoro pomiędzy płaszczyznami wiązki (W) oraz płaszczyznami każdej z dwóch kolineacyjnych wiązek (W_1) i (W_2) — których wierzchołkami są trzy dowolne i różne od siebie punkty W , W_1 i W_2 — ustanowimy przekształcenia kwadratowe, to istnieje ośm takich trójek homologicznych płaszczyzn σ , σ_1 i σ_2 ($\iota = 1, 2, \dots, 8$) tych wiązek, że każda trójka przecina się w jednej prostej $s_{012} = \sigma\sigma_1\sigma_2$.

4. Skoro dla trzech danych wiązek (W) (W_1 i W_2), które spełniają relację (4) ust. 2 go, weźmiemy pod uwagę poszczególne trójki homologicznych płaszczyzn: α , α_1 , α_2 ; β , β_1 , β_2 ; $\dots$, to ogół punktów $A = \alpha\alpha_1\alpha_2$, $B = \beta\beta_1\beta_2, \dots$, przecięcia się owych poszczególnych trójek płaszczyzn, utworzy pewną powierzchnię krzywoliniową $\mathcal{W}$.

Z rozważań ust. 3-go wynika bezpośrednio, że ośm prostych $s_{012} = \sigma\sigma_1\sigma_2$, $\iota = 1, 2, \dots, 8$, leży na owej powierzchni $\mathcal{W}$. Z łatwością dowiedziemy, że na $\mathcal{W}$ leżą jeszcze trzy dalsze proste. Wiadomo nam z teorii przekształceń kwadratowych, że (ust. 1) płaszczyznom głównym np. ξ_1 i ξ_2 wiązek (W_1) i (W_2) podporządkowany jest w wiązce (W) pęk płaszczyzn $x(\gamma, \delta, \dots)$, którego osią jest prosta główna $x = \nu\mu$. Ponieważ na prostej $x_{12} = \xi_1\xi_2$ leżące punkty $C = \gamma\gamma_{12}$, $D = \delta\delta_{12}, \dots$ należą do powierzchni $\mathcal{W}$, przeto prosta x_{12} leży na tej powierzchni. Z tych samych względów również proste $y_{12} = \eta_1\eta_2$ i $z_{12} = \zeta_1\zeta_2$ należą do powierzchni $\mathcal{W}$. Badana powierzch-

nia posiada tedy 11 prostych, a każda z nich, jako krawędź homologicznych płaszczyzn kolineacyjnych wiązek (W_1) i (W_2), jest (ust. 2) dwusieczną krzywej skośnej S_{12}^3 .

Celem wyznaczenia rzędu badanej powierzchni $\mathcal{W}$, skonstruujemy punkty przecięcia się dowolnej prostej p_0 z tą powierzchnią. Skoro prosta p_0 nie przechodzi przez wierzchołki W , W_1 i W_2 danych trzech wiązek, to na p_0 leży¹⁾ pięć takich punktów, z których każdy jest przecięciem trzech homologicznych płaszczyzn danych wiązek (W), (W_1) i (W_2). Ponieważ owe punkty prostej p_0 należą do powierzchni $\mathcal{W}$, przeto badana powierzchnia krzywoliniowa jest rzędu 5-go.

Załóżmy teraz, że prosta p_0 przechodzi przez dowolny punkt $E = e_1 e_2$ krzywej skośnej 3-go rzędu S_{12}^3 (ust. 2), w którym przecinają się homologiczne proste e_1 i e_2 kolineacyjnych wiązek (W_1) i (W_2). Wówczas z owych pięciu punktów przebiecia się prostej p_0 z powierzchnią $\mathcal{W}^5$ dwa punkty¹⁾ zjednoczą się w punkcie $E = e_1 e_2$. Ponieważ tę własność posiada każda prosta p_0 , przechodząca przez punkt E , przeto: dowolny punkt E krzywej S_{12}^3 jest punktem podwójnym badanej powierzchni $\mathcal{W}^5$.

Uwaga: W ust. 5-y wykazemy, iż wierzchołki W_1 i W_2 są też punktami podwójnymi powierzchni $\mathcal{W}^5$.

Do tych samych wyników dojdziemy, skoro przetniemy badaną powierzchnię $\mathcal{W}^5$ dowolną płaszczyzną ω , nie przechodzącą ani przez wierzchołki W , W_1 i W_2 , ani przez żadną z 11-u prostych badanej powierzchni krzywolinowej. Płaszczyzna ω przetnie dane wiązki (W), (W_1) i (W_2) w trzech układach płaskich, przyczem pomiędzy prostymi tych układów zachodzą (ust. 1) relacje

$$(5) \quad (\omega_1) \propto (\omega_2) \quad (\omega) \pi^2 (\omega_1) \quad (\omega) \pi^2 (\omega_2).$$

Utworem tych układów jest¹⁾ w ogólnym przypadku krzywa płaska K^5 rzędu 5-go, klasy 14-ej i rodzaju 3-go, a trzy punkty zjednoczone $E_1 = E_2$, $F_1 = F_2$ i $G_1 = G_2$ kolineacyjnych układów (ω_1) i (ω_2) są punktami podwójnymi tej krzywej. Ponieważ przez dowolny punkt $A = a a_1 a_2$ krzywej K^5 przechodzą trzy homologiczne proste a , a_1 i a_2 tych układów a tem samem i trzy homologiczne płaszczyzny α , α_1 i α_2 wiązek (W), (W_1) i (W_2), przeto: dowolny punkt $A = a a_1 a_2 = \alpha \alpha_1 \alpha_2$ krzywej K^5 przynależy do badanej powierzchni. Wnosimy stąd, że powierzchnia $\mathcal{W}^5$ jest rzędu 5-go, c. b. d. w.

Z uwagi na to, że przez punkt podwójny np. $E_1 = E_2$ krzywej K^5 przechodzą¹⁾ dwie trójki homologicznych prostych b , b_1 , b_2 i c , c_1 , c_2 układów (ω) , (ω_1) i (ω_2) , przeto przechodzą przez $E_1 = E_2$ również dwie trójki homologicz-

¹⁾ Antoni Plamitzer, Utwory pewnej klasy przekształceń kwadratowych pomiędzy układami płaskimi, wzgl. wiązkami (ust. 9 i ust. 5). *Prace Matemat.-fizyczne* t. XXXV, Warszawa 1927/8.

nych płaszczyzn β , β_1 , β_2 i γ , γ_1 , γ_2 danych wiązek. Punkt $E_1 = E_2$, jako punkt przecięcia się podporządkowanych sobie prostych $e_1 = \beta_1 \gamma_1$ i $e_2 = \beta_2 \gamma_2$ kolineacyjnych wiązek (W_1) i (W_2) jest (ust. 2) dowolnym punktem krzywej skośnej 3-go rzędu S_{12}^3 . Ponieważ każda płaszczyzna ω , przechodząca przez punkt $E_1 = E_2$, przecina badaną powierzchnię $\mathcal{W}^5$ w krzywej 5-go rzędu K^5 , która w owym punkcie $E_1 = E_2$ posiada punkt podwójny, — przeto dowolny punkt krzywej S_{12}^3 (różny od W_1 i W_2) jest punktem podwójnym powierzchni $\mathcal{W}^5$.

Dowiedliśmy zatem prawdziwości twierdzeń:

Skoro pomiędzy płaszczyznami wiązki (W) oraz płaszczyznami każdej z dwóch kolineacyjnych wiązek (W_1) i (W_2) — których wierzchołkami są trzy dowolne i różne od siebie punkty W , W_1 i W_2 — ustanowimy przekształcenia kwadratowe, to wówczas: ogół punktów, z których każdy jest punktem przecięcia się trzech homologicznych płaszczyzn tych wiązek, utworzy powierzchnię krzywoliniową 5-go rzędu.

Krzywa skośna 3-go rzędu S_{12}^3 — będąca miejscem geometrycznym punktów przecięcia się homologicznych prostych kolineacyjnych wiązek (W_1) i (W_2) — jest krzywą podwójną tej powierzchni.

Powierzchnia ta posiada 11 prostych, które są dwusiecznymi krzywej S_{12}^3 . Trzy z pośród nich $x_{12} = \xi_1 \xi_2$, $y_{12} = \eta_1 \eta_2$ i $z_{12} = \zeta_1 \zeta_2$ są krawędziami przecięcia się płaszczyzn głównych wiązek (W_1) i (W_2), dalsze zaś są prostymi $s_{012}^3 = \sigma' \alpha' \alpha_2'$ ($\alpha' = 1, 2, \dots, 8$), z których każda leży na trzech homologicznych płaszczyznach σ' , α_1' i α_2' danych wiązek.

5. Z rozważań ust. 2-go wiadomo nam, że przez każdy z wierzchołków W_1 i W_2 przechodzą dwie trójki homologicznych płaszczyzn danych wiązek. W wierzchołku W_1 niechaj przecinają się trójki płaszczyzn β , β_1 , β_2 i γ , γ_1 , γ_2 . Przez W_1 poprowadźmy dowolną prostą d_1 , która nie leży ani na płaszczyznach β_1 , γ_1 , ani na żadnej płaszczyźnie głównej (ust. 1) wiązki (W_1). Pękowi płaszczyzn d_1 ($e_1, \varphi_1, \dots$) podporządkowany jest w kolineacyjnej wiązce (W_2) pęk płaszczyzn d_2 ($e_2, \varphi_2, \dots$), a w wiązce (W) — na mocy przekształcenia kwadratowego — pęk $\Delta^2(e, \varphi, \dots)$ płaszczyzn stycznych do stożka 2-go stopnia Δ^1 . Utworem rzutowych pęków

$$\Delta^2(e, \varphi, \dots) \propto d_2(e_2, \varphi_2, \dots)$$

jest powierzchnia skośna 3-go stopnia Δ_{02}^3 , której punkty podwójne leżą na kierownicy d_2 , a tworzące $e_{02} = e \varepsilon_2$, $f_{02} = \varphi \varphi_2, \dots$ przynależą (ust. 2) do kongruencji K_{02} . {Utwór Δ_{02}^3 jest jednobieżną (rodzaju 0) powierzchnią 4-go porządku}. Prosta d_1 przecina trzy tworzące $t_{02} = \tau \tau_2, \dots$ powierzchni Δ_{02}^3 , a każdy punkt $T = d_1 t_{02}$ należy do badanej powierzchni krzywolinowej $\mathcal{W}^5$, gdyż

przechodzą przezeń trzy homologiczne płaszczyzny τ , τ_1 i τ_2 danych wiązek. A zatem:

Dowolna prosta d_1 wiązki (W_1), nie leżąca ani na płaszczyznach β_1 , γ_1 , ani na płaszczyznach głównych wiązki (W_1), — przecina powierzchnię 5-go rzędu Ψ^5 w punkcie W_1 i w trzech dalszych punktach $T = d_1 t_{02}, \dots$. Wierzchołek W_1 jest zatem punktem podwójnym powierzchni Ψ^5 .

Załóżmy teraz, że oś d_1 leży na płaszczyźnie głównej np. ξ_1 wiązki (W_1). Z teorii przekształceń kwadratowych wiadomo nam, że płaszczyźnie ξ_1 podporządkowany jest w wiązce (W) pęk płaszczyzn (x), którego osią jest prosta główna x ; natomiast pękowi płaszczyzn (d_1) podporządkowany jest w wiązce (W) pęk płaszczyzn (d), o osi d leżącej na płaszczyźnie głównej λ . Powierzchnia 3-go stopnia Δ_{02}^3 rozpadnie się w tym przypadku na pęk prostych o wierzchołku $X = x \xi_2$ i płaszczyźnie podstawowej ξ_2 , oraz na powierzchnię skośną 2-go stopnia Δ_{02}^2 , będącą utworem rzutowych pęków (d) i (d_2).

Niechaj oś d_1 leży na dwóch płaszczyznach głównych np. ξ_1 i η_1 , t. zn. d_1 jest prostą główną n_1 (ust. 1) wiązki (W_1). Pękowi płaszczyzn $n_1(\epsilon_1, \varphi_1, \dots, \xi_1, \eta_1, \dots)$ podporządkowane są wówczas: w wiązce (W_2) pęk płaszczyzn $n_2(\epsilon_2, \varphi_2, \dots, \xi_2, \eta_2, \dots)$, a w wiązce (W) płaszczyzna główna ν i dwa pęki płaszczyzn (x), (y), których osiami są proste główne x i y tej wiązki. Powierzchnia 3-go stopnia Δ_{02}^3 rozpada się wówczas na trzy pęki prostych, które powstają z przecięcia: a) pęku (n) i płaszczyzny ν , b) pęku (x) i płaszczyzny ξ_2 , c) pęku (y) i płaszczyzny η_2 .

Oś d_1 (wzgl. n_1) przecina w obu powyżej omówionych przypadkach zniekształconą powierzchnię Δ_{02}^3 w trzech punktach, które są zarazem punktami przebicia się owej osi z powierzchnią krzywoliniową Ψ^5 .

Skoro oś d_1 leży na płaszczyźnie β_1 (wzgl. γ_1) wiązki (W_1), to tworząca $b_{02} = \beta \beta_2$ (wzgl. $c_{02} = \gamma \gamma_2$) pomocniczej powierzchni skośnej Δ_{02}^3 przechodzi przez ów wierzchołek W_1 . Wówczas jeden z trzech punktów przebicia się prostej d_1 z powierzchnią Ψ^5 zjednoczył się z wierzchołkiem W_1 . Wnosimy stąd, że dowolna prosta d_1 , leżąca na płaszczyźnie β_1 wzgl. γ_1 jest prostą, posiadającą w wierzchołku W_1 styczność trójpunktową z powierzchnią Ψ^5 (gdyż w owym punkcie zjednoczyły się trzy punkty przebicia się elementu d_1 z powierzchnią Ψ^5), a wierzchołek W_1 jest¹⁾ punktem podwójnym dwupłaszczyznowym. A zatem:

Każda prosta wiązki (W_i), $i = 1, 2$, przebija powierzchnię 5-go rzędu Ψ^5 w wierzchołku W_i i w trzech dalszych punktach. Wierzchołek W_i jest punktem

podwójnym dwupłaszczyznowym powierzchni Ψ^5 , a płaszczyzny β_i i γ_i wiązki (W_i) — którym podporządkowane płaszczyzny w dwóch pozostałych wiązkach przechodzą przez W_i — są płaszczyznami, zawierającymi pęki prostych, posiadających w punkcie W_i styczność trójpunktową z powierzchnią Ψ^5 .

W wierzchołku W wiązki (W) przecinają się (ust. 2) trzy homologiczne płaszczyzny α , α_1 i α_2 danych wiązek. Przez W poprowadziliśmy dowolną prostą c , która nie leży ani na płaszczyźnie α , ani na płaszczyznach głównych wiązki (W). Pękowi płaszczyzn $c(\epsilon, \varphi, \dots)$ podporządkowane są — na mocy przekształceń kwadratowych — w wiązkach (W_1) $\times$ (W_2) dwa rzutowe pęki płaszczyzn stycznych odpow. do stożków 2-go stopnia I_1^2 i I_2^2 . Utworem tych pęków

$$I_1^2(\epsilon_1, \varphi_1, \dots) \times I_2^2(\epsilon_2, \varphi_2, \dots)$$

jest powierzchnia skośna 4-go stopnia I_{12}^4 , której punkty podwójne leżą¹⁾ na krzywej skośnej 3-go rzędu S_{12}^3 , a tworzące $c_{12} = \epsilon_1 \epsilon_2$, $f_{12} = \varphi_1 \varphi_2, \dots$ są dwusiecznymi tej krzywej i należą (ust. 2) do kongruencji K_{12} . Utwór I_{12}^4 jest jednobieżną (rodzaju 0) powierzchnią 6-go porządku. Prosta c przecina cztery tworzące $t_{12} = \epsilon_1 \epsilon_2, \dots$ powierzchni I_{12}^4 , a każdy punkt $T = c t_{12}$ należy do badanej powierzchni krzywoliniowej Ψ^5 , gdyż przechodzą przezeń trzy homologiczne płaszczyzny τ , τ_1 i τ_2 danych wiązek. Uważana prosta c wiązki (W) przecina powierzchnię Ψ^5 rzędu 5-go w wierzchołku W i w czterech dalszych punktach $T = c t_{12}, \dots$. Wierzchołek W jest tedy punktem pojedynczym powierzchni Ψ^5 .

Załóżmy teraz, że oś c leży na płaszczyźnie głównej np. λ wiązki (W). Z teorii przekształceń kwadratowych wiadomo nam, że pękowi płaszczyzn $c(\epsilon, \varphi, \dots, \lambda)$ wiązki (W) podporządkowane są w wiązkach (W_1) $\times$ (W_2) dwa rzutowe pęki płaszczyzn

$$c_1(\epsilon_1, \varphi_1, \dots) \times c_2(\epsilon_2, \varphi_2, \dots)$$

których osie c_1 i c_2 leżą odpow. na płaszczyznach głównych ξ_1 i ξ_2 , a nadto elementowi λ podporządkowane są dwa rzutowe pęki płaszczyzn (l_1) $\times$ (l_2), których osiami są proste główne l_1 i l_2 . Pęki (c_1) i (l_1) posiadają wspólną płaszczyznę $\gamma_1 = c_1 l_1$, a pęki (c_2) i (l_2) wspólną płaszczyznę $\gamma_2 = c_2 l_2$. Powierzchnia I_{12}^4 rozpadnie się na dwie powierzchnie 2-go stopnia I_{12}^2 i Δ_{12}^2 , będące odpow. utworami pęków (c_1) i (c_2), wzgl. (l_1) i (l_2), które posiadają wspólną tworzącą $c_{12} = \gamma_1 \gamma_2$ i przenikają się nadto w krzywej S_{12}^3 .

Niechaj prosta c leży na dwóch płaszczyznach głównych np. λ i μ , t. zn. c jest (ust. 1) prostą główną z wiązki W . Pękowi płaszczyzn $c(\epsilon, \varphi, \dots, \lambda, \mu, \dots)$ podporządkowane są wówczas w wiązkach (W_1) $\times$ (W_2) dwie płaszczyzny

¹⁾ p. Th. Reye, l. c. Bd. II. S. 197.

¹⁾ E. Pascal, Repertorium matematyki wyższej (przełożył S. Dickstein) T. II. Geometria, str. 274, Warszawa 1901.

główne $\xi_1 = l_1 m_1$ i $\xi_2 = l_2 m_2$, a nadto elementom λ i μ podporządkowane są dwie pary rzutowych pęków płaszczyzn: $(l_1) \wedge (l_2)$ i $(m_1) \wedge (m_2)$, których osiami są proste główne. Powierzchnia skośna I_{12}^4 rozpada się na dwie powierzchnie skośne 2-go stopnia Δ_{12}^2 i M_{12}^2 , będące odpow. utworami pęków (l_1) i (l_2) , wzgl. (m_1) i (m_2) , które przenikają się w tworzącej $z_{12} = \xi_1 \xi_2$ i w krzywej skośnej 3-go rzędu S_{12}^3 .

Oś c , wzgl. $c = z$ przecina w obu wymienionych przypadkach zniekształconą powierzchnię I_{12}^4 w czterech punktach, które są zarazem punktami przebiecia się owej osi z powierzchnią krzywoliniową $\mathcal{W}^5$.

Pozostaje nam jeszcze do rozpatrzenia przypadek, w którym prosta c wiązki (W) leży na płaszczyźnie α , jeżeli wierzchołek $W = \alpha \alpha_1 \alpha_2$. Tworząca $a_{12} = \alpha_1 \alpha_2$ pomocniczej powierzchni I_{12}^4 przechodzi przez W , a jeden z czterech punktów $T = ct_{12}, \dots$; przebiecia się osi c z powierzchnią $\mathcal{W}^5$, zjednoczył się z wierzchołkiem W . Wnosimy stąd, że dowolna prosta c wiązki (W) , leżąca na owej płaszczyźnie α , jest styczną w punkcie W , a element α jest płaszczyzną styczną w punkcie W do badanej powierzchni $\mathcal{W}^5$. A zatem:

Każda prosta wiązki (W) przebiega powierzchnię 5-go rzędu $\mathcal{W}^5$ w wierzchołku W i w czterech dalszych punktach. Wierzchołek W jest osobiwym¹⁾ punktem pojedynczym powierzchni $\mathcal{W}^5$, a płaszczyzna α wiązki (W) — której podporządkowane płaszczyzny α_1 i α_2 w dwóch pozostałych wiązkach (W_1) i (W_2) przechodzą przez W — jest płaszczyzną styczną w punkcie W do powierzchni $\mathcal{W}^5$.

6. Trzy homologiczne płaszczyzny np. α , α_1 i α_2 danych (ust. 2) wiązek:

$$(4) \quad (W_1) \propto (W_2) \quad (W) \pi^2 (W_1) \quad (W) \pi^2 (W_2)$$

przecinają się w punkcie $A = \alpha \alpha_1 \alpha_2$ powierzchni krzywoliniowej $\mathcal{W}^5$, będącej utworem tych wiązek. Przez A przechodzą trzy proste: $a_{01} = \alpha \alpha_1$, należąca do kongruencji kremonjańskiej K_{01} (ust. 2), prosta $a_{02} = \alpha \alpha_2$, przynależna do kongruencji K_{02} i prosta $a_{12} = \alpha_1 \alpha_2$, będąca elementem kongruencji K_{12} . Punkt $A = \alpha \alpha_1 \alpha_2$ powierzchni krzywoliniowej $\mathcal{W}^5$ uważać możemy tedy: za punkt $A = \alpha_{01} \alpha_2$ przebiecia się prostej a_{01} z płaszczyzną α_2 , wzgl. za punkt $A = \alpha_{02} \alpha_1$ przebiecia się prostej a_{02} z płaszczyzną α_1 , lub za punkt $A = \alpha_{12} \alpha$ przebiecia się prostej a_{12} z płaszczyzną α .

Za pośrednictwem relacji (4) ustanowić możemy np. pomiędzy płaszczyznami $\alpha_1, \beta_1, \dots$ wiązki (W_1) i prostymi $a_{02} = \alpha \alpha_2$, $b_{02} = \beta \beta_2, \dots$ kongruencji K_{02} rzędu 2-go i klasy 4-ej odpowiedniość [1, 1]-znaczną. Jeżeli płaszczyzny $\alpha_1, \beta_1, \dots$ należą do pęku (d_1) o dowolnej osi d_1 , to podporządkowane im

w kongruencji K_{02} proste $a_{02}, b_{02}, \dots$ są (ust. 5) tworzącymi jednobieżnej powierzchni skośnej Δ_{02}^2 stopnia 3-go i porządku 4-go, z podwójną kierownicą d_2 . W ust. 5 rozważyliśmy przypadki rozpadania się tej powierzchni Δ_{02}^2 , skoro oś d_1 pęku płaszczyzn (d_1) leży na płaszczyźnie głównej np. ξ_1 lub jest prostą główną np. n_1 wiązki (W_1) . A zatem:

Skoro pomiędzy płaszczyznami $\alpha_1, \beta_1, \dots$ danej wiązki (W_1) i prostymi $a_{02} = \alpha \alpha_2$, $b_{02} = \beta \beta_2, \dots$ kongruencji kremonjańskiej K_{02} rzędu 2-go i klasy 4-ej — będącej utworem danych wiązek $(W) \pi^2 (W_2)$ — ustanowimy, za pośrednictwem relacji (4), powyższą odpowiedniość [1, 1]-znaczną, to wówczas: ogół punktów $A = \alpha \alpha_{02}$, $B = \beta \beta_{02}, \dots$, przecięcia się homologicznych elementów tej odpowiedniości, utworzy powierzchnię krzywoliniową 5-go rzędu $\mathcal{W}^5$ z podwójną krzywą skośną 3-go rzędu S_{12}^3 .

W podobny sposób ustalić możemy analogiczną odpowiedniość [1, 1]-znaczną pomiędzy płaszczyznami $\alpha_2, \beta_2, \dots$ danej wiązki (W_2) a prostymi $a_{01} = \alpha \alpha_1$, $b_{01} = \beta \beta_1, \dots$ kongruencji kremonjańskiej K_{01} rzędu 2-go i klasy 4-ej, będącej utworem danych wiązek $(W) \pi^2 (W_1)$. Wówczas ogół punktów $A = \alpha \alpha_{01}$, $B = \beta \beta_{01}, \dots$ należy do badanej powierzchni $\mathcal{W}^5$.

Wreszcie, również za pośrednictwem relacji (4), ustanowić możemy pomiędzy płaszczyznami $\alpha, \beta, \dots$ danej wiązki (W) a prostymi $a_{12} = \alpha_1 \alpha_2$, $b_{12} = \beta_1 \beta_2, \dots$ kongruencji (ust. 2) 1-go rzędu i 3-ej klasy K_{12} odpowiedniość [1, 1]-znaczną. Skoro płaszczyzny $\alpha, \beta, \dots$ należą do pęku (c) o dowolnej osi c , to podporządkowane im w kongruencji K_{12} proste $a_{12}, b_{12}, \dots$ są (ust. 5) tworzącymi jednobieżnej powierzchni skośnej I_{12}^4 stopnia 4-go i porządku 6-go, z krzywą podwójną S_{12}^3 . W ust. 5 rozważyliśmy przypadki rozpadania się tej powierzchni, skoro oś c pęku płaszczyzn (c) leży na płaszczyźnie głównej np. λ lub jest prostą główną np. z wiązki (W) . A zatem:

Skoro pomiędzy płaszczyznami $\alpha, \beta, \dots$ danej wiązki (W) i prostymi $a_{12} = \alpha_1 \alpha_2$, $b_{12} = \beta_1 \beta_2, \dots$ kongruencji K_{12} rzędu 1-go i klasy 3-ej — będącej utworem danych wiązek kolineacyjnych (W_1) i (W_2) — ustanowimy, za pośrednictwem relacji (4), powyższą odpowiedniość [1, 1]-znaczną, to wówczas: ogół punktów $A = \alpha \alpha_{12}$, $B = \beta \beta_{12}, \dots$, przecięcia się homologicznych elementów tej odpowiedniości, utworzy powierzchnię krzywoliniową 5-go rzędu $\mathcal{W}^5$ z podwójną krzywą skośną 3-go rzędu S_{12}^3 .

W szczególnym przypadku proste $WA, WB, \dots$, łączące wierzchołek wiązki (W) z poszczególnymi punktami $A = \alpha_{12} \alpha$, $B = \beta_{12} \beta, \dots$ powierzchni $\mathcal{W}^5$, mogą być prostymi *prostopadłymi* do odpow. dwusiecznych $a_{12}, b_{12}, \dots$ krzywej S_{12}^3 . Powierzchnia $\mathcal{W}^5$ z podwójną krzywą S_{12}^3 jest wówczas¹⁾ miejscem

¹⁾ Prof. R. Sturm, *Metrische Eigenschaften der cubischen Raumcurve*. Zeitschrift f. Math. u. Phys. 1895, Bd. 40. S. 13—14.

¹⁾ por. ust. 10.

geometrycznym spodków prostych prostopadłych, wykreślonych z punktu W do poszczególnych dwusiecznych krzywej skośnej S_{12}^3 .

Z dwóch dowolnych punktów W_1^* i W_2^* krzywej skośnej 3-go rzędu S_{12}^3 rzucmy poszczególne proste $a_{12} = \alpha_1 \alpha_2$, $b_{12} = \beta_1 \beta_2 \dots$ kongruencji 1-go rzędu i 3-ej klasy K_{12} , to otrzymamy wówczas¹⁾ homologiczne płaszczyzny: $\alpha_1^* = W_1^* \alpha_{12}$ i $\alpha_2^* = W_2^* \alpha_{12}$, $\beta_1^* = W_1^* b_{12}$ i $\beta_2^* = W_2^* b_{12} \dots$ kolineacyjnych wiązek (W_1^*) i (W_2^*). Ogół wiązek kolineacyjnych, których wierzchołki W_1 , W_2 , W_1^* , W_2^* , ... leżą na krzywej skośnej S_{12}^3 , a płaszczyzny homologiczne α_1 , α_2 , α_1^* , α_2^* , ... przecinają się w jednej i tej samej dwusiecznej a_{12} krzywej S_{12}^3 , t. zn. ogół wiązek kolineacyjnych, które wyznaczają wspólną kongruencję 1-go rzędu i 3-ej klasy K_{12} prostych dwusiecznych krzywej S_{12}^3 , nazywa²⁾ Th. Reye „szeregiem kolineacyjnych wiązek“.

Z relacji (4) tego ustępu i przyjęcia szeregu kolineacyjnych wiązek

$$(6) \quad (W_1) \kappa (W_2) \kappa (W_1^*) \kappa (W_2^*)$$

wynikają bezpośrednio (ust. 1) przekształcenia kwadratowe

$$(7) \quad (W) \pi^2 (W_1^*) \quad (W) \pi^2 (W_2^*)$$

między płaszczyznami wypisanych wiązek. Płaszczyzny λ , μ , ν wiązki (W) i płaszczyzny ξ_i^* , η_i^* , ζ_i^* wiązki (W_i^*), $i = 1, 2$, są płaszczyznami głównymi, a proste $x = \nu \mu$, $y = \nu \lambda$, $z = \lambda \mu$ wiązki (W) i proste $l_i^* = \xi_i^* \eta_i^*$, $m_i^* = \zeta_i^* \xi_i^*$, $n_i^* = \xi_i^* \eta_i^*$ wiązki (W_i^*) są prostymi głównymi tych przekształceń kwadratowych.

Ponieważ dowolny punkt $A = \alpha_1 \alpha_2$ badanej powierzchni krzywolinowej Ψ^5 uważać możemy, na podstawie ostatniego twierdzenia, za punkt $A = \alpha_1 \alpha_2$, a prosta $a_{12} = \alpha_1 \alpha_2$ kongruencji K_{12} jest elementem $a_{12} = \alpha_1^* \alpha_2^*$, przeto: trzy płaszczyzny homologiczne α , α^* i α^* wiązek (W), (W_1^*) i (W_2^*) — spełniających relacje (6) i (7) — przecinają się w punkcie $A = \alpha \alpha^* \alpha^*$ powierzchni Ψ^5 . Wierzchołki W_1^* i W_2^* , t. zn. dowolne punkty krzywej S_{12}^3 , wiązek (W_1^*) i (W_2^*) są (ust. 5) punktami podwójnymi dwupłaszczyznowymi powierzchni Ψ^5 .

Z rozważań naszych wynika tedy (p. ust. 4) prawdziwość podstawowego twierdzenia:

Skoro pomiędzy płaszczyznami wiązki (W), oraz płaszczyznami każdej z dwóch kolineacyjnych wiązek (W_1^) i (W_2^*) — należących do szeregu kolineacyjnych wiązek i posiadających wspólną kongruencję prostych dwusiecznych krzywej skośnej 3-go rzędu S_{12}^3 , która nie przechodzi przez wierzchołek W — ustanowimy przekształcenia kwadratowe, to wówczas: ogół punktów przecięcia się*

¹⁾ Seydewitz, Archiv für Mathematik, 1847, Bd. 10. S. 207.

²⁾ Journal für Mathematik, Bd. 10. S. 214.

poszczególnych trójek homologicznych płaszczyzn owych trzech wiązek utworzy powierzchnię krzywolinową 5-go rzędu Ψ^5 . Powierzchnia ta posiada 11 prostych i krzywą podwójną S_{12}^3 , a dowolny punkt tej krzywej skośnej jest punktem podwójnym dwupłaszczyznowym powierzchni Ψ^5 .

Zauważyć należy, iż na krzywej skośnej S_{12}^3 znajduje się¹⁾ dziesięć punktów jednopłaszczyznowych (p. ostrzowych).

Przyjęcie relacji (6) i (7) powoduje wystąpienie, obok kongruencji K_{01} i K_{02} (ust. 2), jeszcze dalszych kongruencji kremonjańskich 2-go rzędu i 4-ej klasy K_{01}^* , K_{02}^* , ..., których elementami są proste $a_{01}^* = \alpha \alpha_1^*$, $a_{02}^* = \alpha \alpha_2^*$, ..., $b_{01}^* = \beta \beta_1^*$, $b_{02}^* = \beta \beta_2^*$, ... Kongruencje K_{01} , K_{02} , K_{01}^* , K_{02}^* , ... posiadają tę charakterystyczną własność, że proste np. a_{01} , a_{02} , a_{01}^* , a_{02}^* , ... leżą na płaszczyźnie α wiązki (W) i przecinają się w punkcie $A = \alpha \alpha_{12}$ badanej powierzchni krzywolinowej Ψ^5 .

7. Wiadomo nam (ust. 4), że dowolna płaszczyzna ω , która nie przechodzi ani przez żadną z 11-u prostych badanej powierzchni krzywolinowej Ψ^5 , ani przez żaden z wierzchołków danych wiązek (W), (W_1) i (W_2), — przecina tę powierzchnię w krzywej 5-go rzędu K^5 , dla której trzy punkty, przecięcia się płaszczyzn ω z podwójną krzywą skośną 3-go rzędu S_{12}^3 tej powierzchni, są punktami podwójnymi. Krzywa K^5 jest w ogólności klasy 14-ej i rodzaju 3-go.

Zbyteczne jest zastrzeżenie, aby płaszczyzna ω nie przechodziła przez wierzchołki W_1 i W_2 , gdyż każde dwa dowolne punkty krzywej S_{12}^3 uważać można (ust. 6) za wierzchołki takich wiązek (W_1) i (W_2), które wraz z wiązką (W) utworzą powierzchnię Ψ^5 . Zbadajmy tedy charakter krzywej przekroju powierzchni Ψ^5 , jeśli płaszczyzna tnąca ω_1 — która nie należy wcale do wiązki (W) — przechodzi: a) przez wierzchołek wiązki np. (W_1), b) przez wierzchołki wiązek (W_1) i (W_2).

W tym celu oberzmy w przypadku a) na płaszczyźnie ω_1 pęk prostych $W_1(c_1, d_1, \dots)_{\omega_1}$ i skonstruujmy punkty przebicia się owych prostych z powierzchnią Ψ^5 . Pękowi płaszczyzn np. $d_1(e_1, \varphi_1, \dots, \omega_1, \dots)$ wiązki (W_1) podporządkowane są (ust. 5) w wiązkach (W) i (W_2) dwa rzutowe pęki płaszczyzn

$$\Delta^2(e, \varphi, \dots, \omega, \dots) \wedge d_2(e_2, \varphi_2, \dots, \omega_2, \dots),$$

których podstawami są stożek 2-go stopnia Δ^2 o wierzchołku W i prosta d_2 , przechodząca przez wierzchołek W_2 . Utworem tych pęków jest jednobieżna powierzchnia skośna Δ_{02}^3 stopnia 3-go i porządku 4-go, z podwójną kierownicą d_2 , której tworzącymi są proste $e_{02} = e e_2$, $f_{02} = \varphi \varphi_2, \dots, w_{02} = \omega \omega_2, \dots$, należące (ust. 2) do kongruencji 2-go rzędu i 4-ej klasy K_{02} . Trzy punkty prze-

¹⁾ A. Clebsch, l. c. str. 293, R. Sturm Math. Ann. IV. str. 251 i Geom. Verw. Bd. IV. str. 312.

bicia się osi d_1 pęku płaszczyzn (d_1) z powierzchnią A_{02}^3 leżą (ust. 5) na powierzchni $\mathcal{W}^5$ i są zatem punktami krzywej, powstałej z przecięcia się płaszczyzny ω_1 z powierzchnią $\mathcal{W}^5$.

Korzystając z naszych rozważań, ustanowić możemy odpowiedniość [1,1]-znaczną pomiędzy prostą d_1 a powierzchnią A_{02}^3 , wzgl. pomiędzy prostą d_1 a jednobieżną krzywą 3-go rzędu i 4-ej klasy D_{02}^3 , w której płaszczyzna ω_1 przecina powierzchnię A_{02}^3 . Kierownica podwójna d_2 tej ostatniej powierzchni leży na płaszczyźnie ω_2 wiązki (W_2), a punkt podwójny $D_2 = d_2 \omega_1$ krzywej D_{02}^3 należy do prostej $w_{12} = \omega_1 \omega_2$. — Poszczególnym prostym $c_1, d_1, \dots$ pęku (W_1)₀₁ podporządkowane są na płaszczyźnie ω_1 jednobieżne krzywe 3-go rzędu i 4-ej klasy $C_{02}^3, D_{02}^3, \dots$. Krzywe te, których punkty podwójne $C_2 = c_2 \omega_1, D_2 = d_2 \omega_1, \dots$ leżą na prostej $w_{12} = \omega_1 \omega_2$, posiadają wspólny punkt pojedynczy $W_{012} = w_{02} \cdot \omega_1 = \omega_2 \cdot \omega_1$, leżący również na prostej w_{12} . Skonstruowany w ten sposób układ krzywych $C_{02}^3, D_{02}^3, \dots$ posiada tę charakterystyczną własność, iż: przez dowolny punkt Q płaszczyzny podstawowej ω_1 — który nie jest punktem osobliwym kongruencji K_{02} — przechodzą *dwie i tylko dwie* krzywe tego układu.

W istocie bowiem przez Q przechodzą dwie proste $a_{02} = \alpha \alpha_2$ i $b_{02} = \beta \beta_2$ kongruencji 2-go rzędu K_{02} , przyczem niechaj elementy α_2 i β_2 są płaszczyznami $\alpha_2 = W_2 a_{02}$ i $\beta_2 = W_2 b_{02}$ wiązki (W_2). Prostym $a_2 = \alpha \omega_2$ i $b_2 = \beta \omega_2$ podporządkowane są na płaszczyźnie ω_1 proste a_1 i b_1 , należące do wiązki (W_1). Pękowi płaszczyzn np. $a_1(\alpha_1, \dots, \omega_1, \dots)$ podporządkowane są w wiązkach (W) i (W_2) dwa rzutowe pęki płaszczyzn

$$A^2(\alpha, \dots, \omega, \dots) \wedge \alpha_2(\alpha_2, \dots, \omega_2, \dots),$$

których utworem jest powierzchnia skośna A_{02}^3 . Ponieważ na tej powierzchni leży tworząca $a_{02} = \alpha \alpha_2$, przeto przez punkt $Q = a_{02} \omega_1$ przechodzi krzywa A_{02}^3 , należąca do uważanego układu. Podobnie, za pośrednictwem pęku płaszczyzn $b_1(\beta_1, \dots, \omega_1, \dots)$, skonstruujemy powierzchnię B_{02}^3 o tworzących $b_{02} = \beta \beta_2, \dots$, oraz krzywą B_{02}^3 , przechodzącą przez punkt $Q = b_{02} \omega_1$. Przez dowolny punkt Q płaszczyzny ω_1 przechodzą tedy dwie krzywe A_{02}^3 i B_{02}^3 badanego układu, c. b. d. w.

Uwaga: O ile Q jest punktem osobliwym kongruencji K_{02} , to przechodzą przezeń wszystkie krzywe badanego układu.

Dowiedziemy teraz prawdziwości *twierdzenia*:

Skoro na płaszczyźnie ω_1 dane są: pęk prostych $W_1(c_1, d_1, \dots)$ i skonstruowany poprzednio układ krzywych ($C_{02}^3, D_{02}^3, \dots$), pomiędzy których elementami zachodzi odpowiedniość [1,1]-znaczna, to punkty przecięcia się homologicznych elementów c_1 i C_{02}^3, d_1 i $D_{02}^3, \dots$ tworzą

krzywą 5-go rzędu K^5 . Wierzchołek W_1 i dwa dalsze punkty przecięcia się płaszczyzny ω_1 z krzywą skośną S_{12}^3 są punktami podwójnymi krzywej K^5 .

Celem wyznaczenia rzędu tej krzywej, skonstruujemy punkty przecięcia się tej krzywej z dowolną prostą q , leżącą na płaszczyźnie ω_1 . Przez dowolny punkt A prostej q przechodzi prosta $a_1 = W_1 A$ pęku (W_1). Podporządkowana jej w przyjętym układzie krzywa A_{02}^3 przecina się z prostą q w trzech punktach A_1, A_2 i A_3 , które niechaj odpowiadają elementowi A . Przez każdy z owych trzech punktów, np. przez A_2 , przechodzą dwie krzywe A_{02}^3 i np. B_{02}^3 , należące do przyjętego układu. Homologiczne proste a_1 i b_1 pęku (W_1) przecinają podstawę q w dwóch punktach A i B , które podporządkujemy elementowi A_2 . Skonstruowana w ten sposób odpowiedniość [2,3]-znaczna pomiędzy punktami dowolnie przyjętej prostej q posiada $(2+3)=5$ punktów zjednoczonych, a każdy z nich, jako przynależny do prostej pęku (W_1) i do homologicznej krzywej danego układu, jest punktem krzywej wynikowej. Owa krzywa jest zatem rzędu 5-go K^5 .

Oznaczmy przez P_2 i R_2 punkty, które wraz z wierzchołkiem W_1 są punktami przecięcia się płaszczyzny ω_1 z krzywą skośną S_{12}^3 (t. j. krzywą podwójną powierzchni $\mathcal{W}^5$). Proste $p_1 = W_1 P_2$ i $p_2 = W_2 P_2$, $r_1 = W_1 R_2$ i $r_2 = W_2 R_2$ są oczywiście elementami homologicznymi kolineacyjnych wiązek (W_1) i (W_2), a elementom p_1 i r_1 podporządkowane są na płaszczyźnie ω_1 krzywe P_{02}^3 i R_{02}^3 , należące do przyjętego układu. Element P_2 jest punktem podwójnym krzywej P_{02}^3 , a R_2 punktem podwójnym krzywej R_{02}^3 . Skoro założymy, że przez punkt P_2 przechodzi podstawa q , to w skonstruowanej powyżej odpowiedniości [2,3]-znacznej punktowi $P_2 = A$ podporządkowane są trzy punkty A_1, A_2 i A_3 przecięcia się prostej $p_1 = W_1 P_2 = W_1 A$ z homologiczną krzywą P_{02}^3 . Ponieważ jednak dwa z tych punktów, np. A_1 i A_2 zjednoczyły się w punkcie podwójnym P_2 krzywej P_{02}^3 , przeto z pięciu elementów zjednoczonych owej odpowiedniości o podstawie q dwa elementy $A = A_1$ i $A = A_2$ schodzą się w punkcie P_2 . Innymi słowy: prosta q przecina krzywą K^5 w pięciu takich punktach, z których dwa zjednoczyły się w punkcie P_2 . Ponieważ q jest dowolną prostą, przeto P_2 jest punktem podwójnym krzywej K^5 . W podobny sposób wykazemy, iż R_2 jest również punktem podwójnym krzywej K^5 .

Każda prosta np. c_1 pęku (W_1)₀₁ przecina homologiczną krzywą C_{02}^3 w trzech punktach C_1, C_2 i C_3 , które zarazem są punktami krzywej 5-go rzędu K^5 . Wnosimy stąd, że wierzchołek W_1 tego pęku jest punktem podwójnym krzywej K^5 , c. b. d. w.

Z dotychczasowych rozważań wynika, że płaszczyzna ω_1 w przypadku $a)$ przecina w ogólności powierzchnię $\mathcal{W}^5$ w krzywej K^5 rzędu 5-go z trzema punktami podwójnymi W_1, P_2 i R_2 .

W przypadku b), skoro płaszczyzna tnąca ω_1 przechodzi przez obydwie wierzchołki wiązek (W_1 i (W_2), wspólna tworząca $\omega_{12} = \omega_1 \omega_2$ powierzchni $I_{02}^3, A_{02}^3, \dots$ przechodzi przez wierzchołek W_2 , a krzywe $C_{02}^3, D_{02}^3, \dots$ rozważanego poprzednio układu, posiadają wspólny punkt podwójny W_2 . Również i w tym przypadku przekrój powierzchni $\mathcal{W}^5$ płaszczyzną ω_1 jest krzywą K^5 rzędu 5-go z trzema punktami podwójnymi W_1, P_2 i R_2 , przy czym jeden z dwóch ostatnich punktów, np. P_2 , zjednoczył się z wierzchołkiem W_2 wiązki (W_2).

8. Niechaj płaszczyzna tnąca ω_1 , nie przynależna do wiązki (W), przechodzi przez wierzchołek wiązki np. (W_1) i przez prostą $s_{012} = \sigma \sigma_1 \sigma_2$ (ust. 3) powierzchni $\mathcal{W}^5$. Wówczas pękowi prostych $W_1(c_1, d_1, \dots)_{\sigma_1}$ o wierzchołku W_1 i płaszczyźnie podstawowej $\omega_1 = W_1 s_{012} = \sigma_1$, podporządkowany jest — w myśl rozważań ad a) ust. 7-go — układ powierzchni $I_{02}^3, A_{02}^3, \dots$ o wspólnej tworzącej $\omega_{12} = \omega_1 \omega_2 = \sigma_1 \sigma_2 = s_{012}$. Płaszczyzna $\omega_1 = \sigma_1$ przecina te powierzchnie w prostej s_{012} , oraz w stożkowych $C_{02}^3, D_{02}^3, \dots$, przy czym przez każdy punkt Q płaszczyzny podstawowej σ_1 — który nie jest punktem osobliwym kongruencji K_{02} — przechodzą dwie stożkowe skonstruowanego układu. Pomiędzy prostymi $c_1, d_1, \dots$ pęku (W_1) $_{\sigma_1}$ i stożkowymi $C_{02}^3, D_{02}^3, \dots$ tego układu zachodzi odpowiedniość [1, 1]-znaczna, a homologiczne elementy tej odpowiedniości przecinają się w punktach krzywej K^4 rzędu 4-go z jednym punktem podwójnym W_1 .

Rząd tej krzywej wyznaczmy, skoro na płaszczyźnie σ_1 przyjmujemy dowolną prostą q i skonstruujemy na niej — podobnie jak to uczyniliśmy w ust. 7. — odpowiedniość [2, 2]-znaczna pomiędzy punktami przecięcia podstawy q z homologicznymi elementami pęku prostych (W_1) $_{\sigma_1}$ i układu stożkowych. Cztery punkty zjednoczone tej odpowiedniości są punktami przecięcia się q z krzywą wynikową K^4 rzędu 4-go. Z uwagi na to, iż każda prosta np. c_1 pęku (W_1) $_{\sigma_1}$ przecina homologiczną stożkową C_{02}^3 w dwóch punktach, które są zarazem punktami krzywej K^4 , przeto wierzchołek W_1 tego pęku jest punktem podwójnym krzywej K^4 , c. b. d. w.

Płaszczyzna $\omega_1 = \sigma_1$ w rozważanym przypadku przecina powierzchnię krzywoliniową $\mathcal{W}^5$ w krzywej 5-go rzędu K^5 z trzema punktami podwójnymi W_1, P_2 i R_2 , która rozpada się na prostą $s_{012} = \sigma \sigma_1 \sigma_2 = P_2 R_2$ (dwusieczną krzywej S_{12}^5) i na krzywą 4-go rzędu K^4 z jednym punktem podwójnym W_1 , przechodzącą przez punkty P_2 i R_2 .

Załóżmy teraz, że płaszczyzna tnąca ω_1 przechodzi przez jedną z trzech prostych $x_{12} = \xi_1 \xi_2, y_{12} = \eta_1 \eta_2$ i $z_{12} = \zeta_1 \zeta_2$ (ust. 4) powierzchni $\mathcal{W}^5$ i należy do wiązki np. (W_1). Skoro na płaszczyźnie $\omega_1 = W_1$ $x_{12} = \xi_1$ obierzemy pęk prostych $W_1(c_1, d_1, \dots)_{\xi_1}$, to wówczas prostej np. d_1 tego pęku podporządkowana jest powierzchnia Δ_{02}^3 , która rozpada się (ust. 5) na pęk prostych o wierzchołku $X = x \xi_2$ i płaszczyźnie podstawowej ξ_2 , oraz na powierzchnię skośną 2-go stopnia Δ_{02}^2 , będącą utworem rzutowych pęków płaszczyzn (d) i (d_2). W miejsce

układu powierzchni $I_{02}^3, A_{02}^3, \dots$ otrzymamy w tym przypadku, oprócz wspólnego pęku prostych (X) $_{\xi_2}$, układ powierzchni skośnych 2-go stopnia $I_{02}^2, A_{02}^2, \dots$. Płaszczyzna $\omega_1 = \xi_1$ przecina te powierzchnie w stożkowych $C_{02}^3, D_{02}^3, \dots$, przy czym pomiędzy układem tych stożkowych a pękiem prostych $W_1(c_1, d_1, \dots)_{\xi_1}$ zachodzi odpowiedniość [1, 1]-znaczna. W sposób analogiczny do poprzedniego wykazemy, że płaszczyzna ξ_1 przecina powierzchnię krzywoliniową $\mathcal{W}^5$ w prostej $x_{12} = \xi_1 \xi_2$ i w krzywej 4-go rzędu K^4 z punktem podwójnym W_1 .

Na podstawie rozważań ust. 7-go i 8-go dochodzimy zatem do następujących twierdzeń:

Dowolna płaszczyzna, która nie przechodzi ani przez wierzchołek wiązki (W) ani przez żadną z 11-u prostych badanej powierzchni krzywoliniowej $\mathcal{W}^5$, przecina tę powierzchnię w krzywej 5-go rzędu K^5 . Krzywa K^5 jest w ogólności klasy 14-ej, rodzaju 3-go i posiada trzy punkty podwójne, które leżą na podwójnej krzywej skośnej 3-go rzędu S_{12}^3 powierzchni $\mathcal{W}^5$.

Skoro płaszczyzna tnąca, nie należy do wiązki (W) i przechodzi przez jedną z 11-u prostych powierzchni $\mathcal{W}^5$, to przecina tę powierzchnię w owej prostej p_0 i krzywej 4-go rzędu K^4 . Punkty przecięcia się dwusiecznej p_0 z krzywą S_{12}^3 są punktami pojedynczymi, a trzeci punkt przecięcia się płaszczyzny tnącej z krzywą S_{12}^3 jest punktem podwójnym krzywej K^4 . Krzywa ta jest w ogólności klasy 10-ej i rodzaju 2-go.

Skoro płaszczyzna tnąca jest styczną w dowolnym punkcie (pojedynczym) A do powierzchni $\mathcal{W}^5$, to przecina tę powierzchnię w krzywej K^5 , która oprócz trzech punktów podwójnych (leżących na krzywej skośnej S_{12}^3), posiada czwarty punkt podwójny A . Krzywa K^5 rzędu 5-go jest wówczas 12-ej klasy i 2-go rodzaju.

Z ostatniego twierdzenia ust. 6-go wiadomo nam, że dowolny punkt P krzywej skośnej S_{12}^3 jest punktem podwójnym dwupłaszczyznowym powierzchni $\mathcal{W}^5$. Oznaczmy przez α i β te płaszczyzny, które zawierają dwa pęki prostych, posiadających w punkcie P styczność trójpunktową z powierzchnią $\mathcal{W}^5$. Każda z tych płaszczyzn przetnie powierzchnię $\mathcal{W}^5$ w krzywej 5-go rzędu K^5 , która — jak wiadomo — w punkcie P posiada punkt potrójny; krzywa ta posiada dwa dalsze punkty podwójne (leżące na krzywej skośnej S_{12}^3), więc jest 10-ej klasy i 1-go rodzaju.

Skoro płaszczyzna tnąca przechodzi przez krawędź $c = \alpha \beta$, to krzywa przekroju K^5 posiada — jak wiadomo — punkt zwrotu P i dwa dalsze punkty podwójne. Krzywa 5-go rzędu K^5 jest wówczas 13-ej klasy i 3-go rodzaju.

9. W dwóch ostatnich ustępach uwzględnialiśmy takie płaszczyzny tnące, które nie przechodziły przez wierzchołek wiązki (W). Zbadajmy teraz charakter krzywej przekroju powierzchni krzywoliniowej $\mathcal{W}^5$, skoro płaszczyzna

tnąca ω przechodzi przez wierzchołek W wiązki (W), ale jest różna od płaszczyzn głównych λ , μ i ν (ust. 1) tej wiązki. Rozważyć musimy dwa przypadki: a) płaszczyzna ω nie przechodzi przez żadną z 11-u prostych powierzchni Ψ^5 ; b) element ω przechodzi przez jedną z tych 11-u prostych.

W przypadku a) oberzmy na płaszczyźnie przekroju ω pęk prostych $W(c, d, \dots)_\omega$ i skonstruujmy punkty przebiecia się poszczególnych prostych tego pęku z powierzchnią Ψ^5 . Skoro prosta np. c jest osią pęku płaszczyzn $c(e, \varphi, \dots, c\alpha, c\gamma, c\beta, \omega, \dots)$, należącego do wiązki (W), to jemu podporządkowane są (ust. 5) w wiązkach (W_1) i (W_2) dwa rzutowe pęki

$$I_1^2(e_1, \varphi_1, \dots, \xi_1, \eta_1, \zeta_1, \omega_1, \dots) \wedge I_2^2(e_2, \varphi_2, \dots, \xi_2, \eta_2, \zeta_2, \omega_2, \dots)$$

płaszczyzn stycznych do stożków 2-go stopnia I_1^2 i I_2^2 . Utworem tych pęków jest jednobieżna powierzchnia skośna I_{12}^4 stopnia 4-go i porządku 6-go, z podwójną krzywą skośną 3-go rzędu S_{12}^3 , której tworzącymi są proste $e_{12} = e_1 e_2$, $f_{12} = \varphi_1 \varphi_2, \dots, x_{12} = \xi_1 \xi_2, y_{12} = \eta_1 \eta_2, z_{12} = \zeta_1 \zeta_2, w_{12} = \omega_1 \omega_2, \dots$. Cztery punkty przebiecia się osi c uważanego pęku płaszczyzn (c) z powierzchnią I_{12}^4 (oraz wierzchołek W) leżą (ust. 5) na powierzchni krzywoliniowej Ψ^5 i są zatem punktami krzywwej, powstałej z przecięcia się płaszczyzn ω z powierzchnią Ψ^5 .

Korzystając z dotychczasowych rozważań naszych, ustaliliśmy odpowiedniość [1, 1]-znaczną pomiędzy prostą c a powierzchnią I_{12}^4 . Poszczególnym prostym $c, d, \dots$ przyjętego pęku (W) $_\omega$ o płaszczyźnie podstawowej ω podporządkowane są jednobieżne powierzchnie skośne 4-go stopnia $I_{12}^4, D_{12}^4, \dots$. Ponieważ powierzchnie te posiadają wspólną podwójną krzywą skośną 3-go rzędu S_{12}^3 i wspólne cztery tworzące x_{12}, y_{12}, z_{12} i w_{12} , przeto przenikają się w krzywwej rzędu $(3 \cdot 2 \cdot 2 + 4) = 16$ -go i tworzą pęk powierzchni. Płaszczyzna podstawowa ω przecina poszczególne powierzchnie tego pęku w krzywych 4-go rzędu $C_{12}^4, D_{12}^4, \dots$, dla których punkty E, F i G przecięcia się podwójnej krzywwej skośnej S_{12}^3 z płaszczyzną ω są wspólnymi punktami podwójnymi, a elementy $X = x_{12}\omega, Y = y_{12}\omega, Z = z_{12}\omega$ i $W_0 = w_{12}\omega$ są wspólnymi punktami pojedynczymi. Ponieważ z wypisanej powyżej odpowiedniości wynika bezpośrednio też odpowiedniość [1, 1]-znaczną pomiędzy prostymi pęku $W(c, d, \dots)_\omega$ a krzywymi pęku ($C_{12}^4, D_{12}^4, \dots$) $_\omega$, przeto utworem tych pęków jest krzywa 5-go rzędu K^5 z trzema punktami podwójnymi E, F i G , dla której wierzchołek W wiązki (W) i punkty X, Y, Z, W_0 są punktami pojedynczymi. Krzywa K^5 jest oczywiście (ust. 5) przekrojem powierzchni Ψ^5 płaszczyzną ω . A zatem:

Dowolna płaszczyzna wiązki (W), która nie jest płaszczyzną główną i nie przechodzi przez żadną z 11-u prostych powierzchni krzywoliniowej Ψ^5 , przecina tę powierzchnię w krzywwej K^5 rzędu 5-go. Wierzchołek wiązki (W) jest punktem pojedynczym, a trzy punkty, przecięcia się podwójnej krzywwej skośnej 3-go rzędu S_{12}^3 tej powierzchni z płaszczyzną tnącą, są punktami podwójnymi krzywwej K^5 . Krzywa ta jest w ogólności klasy 14-ej i rodzaju 3-go.

Przejdźmy teraz do przypadku b) i założmy, iż płaszczyzna tnąca ω przechodzi przez wierzchołek W wiązki (W) i przez jedną z ośmiu (ust. 4) prostych $s_{012} = \sigma^i \sigma^j \sigma^k$, np. $s_{012} = \sigma \sigma_1 \sigma_2$, powierzchni Ψ^5 . Na płaszczyźnie $\omega = W_{s_{012}} = \sigma$ oberzmy — podobnie jak w przypadku a) — pęk prostych $W(c, d, \dots)_\sigma$, a poszczególnym prostym $c, d, \dots$ tego pęku podporządkujemy jednobieżne powierzchnie 4-go stopnia $I_{12}^4, D_{12}^4, \dots$; powierzchnie te tworzą pęk, gdyż posiadają wspólną podwójną krzywą skośną 3-go rzędu S_{12}^3 i cztery wspólne tworzące $x_{12} = \xi_1 \xi_2, y_{12} = \eta_1 \eta_2, z_{12} = \zeta_1 \zeta_2, s_{012} = \sigma \sigma_1 \sigma_2$. Uważana płaszczyzna $\sigma = W_{s_{012}}$ przecina krzywą S_{12}^3 w trzech punktach E, F i G , przy czym dwa z nich np. E i F leżą na dwusiecznej $s_{012} = \sigma \sigma_1 \sigma_2$ tej krzywwej. Płaszczyzna σ przecina — po wyeliminowaniu wspólnej tworzącej $s_{012} = \sigma \sigma_1 \sigma_2 = EF$ — ów pęk powierzchni w pęku krzywych 3-go rzędu $(C_{12}^3, D_{12}^3, \dots)_\sigma$, dla którego punktami podstawowymi są wspólne punkty pojedyncze $E, F, X = x_{12}\sigma, Y = y_{12}\sigma$ i $Z = z_{12}\sigma$, oraz wspólny punkt podwójny G tych krzywych. Ponieważ pomiędzy krzywymi tego pęku a prostymi pęku $W(c, d, \dots)_\sigma$ ustanowić możemy (w poprzednio omówiony sposób) odpowiedniość [1, 1]-znaczną, przeto utworem tych pęków jest krzywa 4-go rzędu K^4 , dla której wierzchołek W i punkty E, F, X, Y, Z są punktami pojedynczymi, a element G punktem podwójnym. Krzywa K^4 jest w ogólności klasy 10-ej i rodzaju 2-go.

Z rozważań naszych wynika, że każda z ośmiu płaszczyzn $\sigma^i = W_{s_{012}^i}$ wiązki (W) przecina powierzchnię Ψ^5 w prostej s_{012}^i i krzywwej K^4 . W wiązce (W) uwzględnić musimy jeszcze te płaszczyzny, które przechodzą przez proste $x_{12} = \xi_1 \xi_2, y_{12} = \eta_1 \eta_2$, wzgl. $z_{12} = \zeta_1 \zeta_2$ (ust. 4) powierzchni Ψ^5 . Pękowi prostych $W(c, d, \dots)_\omega$, o wierzchołku W i płaszczyźnie podstawowej np. $\omega = W_{x_{12}}$, podporządkujemy (w analogiczny do poprzedniego sposobu) pęk jednobieżnych powierzchni 4-go stopnia $(I_{12}^4, D_{12}^4, \dots)$, które posiadają wspólną podwójną krzywą skośną S_{12}^3 i cztery wspólne tworzące x_{12}, y_{12}, z_{12} i $w_{12} = \omega_1 \omega_2$. Również i w tym przypadku, po wyeliminowaniu wspólnej tworzącej x_{12} , która jest dwusieczną $x_{12} = \xi_1 \xi_2 = EF$ krzywwej S_{12}^3 , na płaszczyźnie $\omega = W_{x_{12}}$, otrzymamy pęk krzywych 3-go rzędu $(C_{12}^3, D_{12}^3, \dots)$, dla którego punktami podstawowymi są wspólne punkty pojedyncze $E, F, Y = y_{12}\omega, Z = z_{12}\omega$ i $W_{12} = w_{12}\omega$, oraz punkt podwójny G tych krzywych. Wnosimy stąd, że płaszczyzna $\omega = W_{x_{12}}$ przecina powierzchnię Ψ^5 w prostej x_{12} i w krzywwej 4-go rzędu K^4 z jednym punktem podwójnym G . A zatem:

Każda płaszczyzna wiązki (W), przechodząca przez jedną z 11-u prostych powierzchni krzywoliniowej Ψ^5 , przecina tę powierzchnię w owej prostej p_0 i w krzywwej 4-go rzędu K^4 . Wierzchołek wiązki (W) i dwa punkty, w których prosta p_0 przecina podwójną krzywą skośną 3-go rzędu S_{12}^3 powierzchni Ψ^5 , są punktami pojedynczymi, a trzeci punkt przecięcia się krzywwej S_{12}^3 z płaszczyzną tnącą jest punktem podwójnym krzywwej K^4 . Krzywa ta jest w ogólności 10-ej klasy i 2-go rodzaju.

10. Zbadajmy teraz charakter krzywej przekroju powierzchni $\mathcal{W}^5$, skoro płaszczyzna tnąca jest jedną z płaszczyzn głównych λ, μ wzgl. ν (ust. 1) wiązki (W).

Z teorii przekształceń kwadratowych wiadomo nam, iż płaszczyźnie λ podporządkowane są w wiązkach (W_1) i (W_2) dwa rzutowe pęki płaszczyzn

$$l_1(a_1, \beta_1, \dots, \eta_1, \xi_1, \dots) \cap l_2(a_2, \beta_2, \dots, \eta_2, \xi_2, \dots),$$

których osiami są proste główne l_1 i l_2 . Utworem tych pęków jest powierzchnia skośna 2-go stopnia Δ_{12}^2 , o tworzących $a_{12} = a_1 a_2$, $b_{12} = \beta_1 \beta_2, \dots$, $y_{12} = \eta_1 \eta_2$, $z_{12} = \xi_1 \xi_2, \dots$; ponieważ te tworzące należą (ust. 2) do kongruencji K_{12} i są dwusiecznymi skośnej S_{12}^3 , przeto S_{12}^3 leży na kwadryce Δ_{12}^2 . Płaszczyzna główna λ przecina powierzchnię Δ_{12}^2 w stożkowej L^2 , która *przynależy* do badanej powierzchni $\mathcal{W}^5$, gdyż każdy punkt $A = \lambda a_{12}$, $B = \lambda b_{12}, \dots$, $Y = \lambda y_{12}$, $Z = \lambda z_{12}, \dots$ owej stożkowej L^2 jest przecięciem trzech homologicznych płaszczyzn danych wiązek (W), (W_1) i (W_2). Skonstruowana w ten sposób stożkowa L^2 powierzchni krzywolinijowej $\mathcal{W}^5$ przecina się zatem w punktach Y i Z odpow. z prostymi y_{12} i z_{12} tej powierzchni, oraz przechodzi przez trzy punkty przecięcia się płaszczyzny głównej λ z krzywą skośną S_{12}^3 . Natomiast stożkowa L^2 nie może — w rozważanym tu przez nas ogólnym przypadku — przecinać ani prostej $x_{12} = \xi_1 \xi_2$, ani żadnej z ośmiu dalszych prostych $s_{12}^i = \sigma^i \sigma_1^i \sigma_2^i$ (ust. 4) powierzchni krzywolinijowej $\mathcal{W}^5$. W istocie bowiem płaszczyzna główna ξ_1 wiązki (W_1) nie należy (ust. 1) do prostej głównej $l_1 = \eta_1 \xi_1$, a tem samem prosta $x_{12} = \xi_1 \xi_2$ nie jest tworzącą kwadryki Δ_{12}^2 . Również prosta $s_{12}^i = \sigma^i \sigma_2^i$ nie jest w ogólnym przypadku tworzącą kwadryki Δ_{12}^2 , gdyż płaszczyzna σ^i wiązki (W) jest różna od płaszczyzny głównej λ , a tem samem płaszczyzny σ^i i σ_2^i nie mogą należeć do pęków (l_1) i (l_2). Wnosimy stąd, iż w ogólnym przypadku punkty $X = \lambda x_{12}$ i $S^i = \lambda s_{12}^i$ nie leżą na stożkowej L^2 , c. b. d. w.

Przypuścimy jednak, iż mimo to owe punkty X i S^i leżą na stożkowej L^2 . Skoro przez $e_{12} = e_1 e_2$ i $f_{12} = \varphi_1 \varphi_2$ oznaczmy te tworzące skonstruowanej poprzednio kwadryki Δ_{12}^2 , które przechodzą — odpow. przez punkty X i S^i , — to z uwagi na to, iż przez punkt X (wzgl. S^i) przechodzą dwie dwusieczne x_{12} i e_{12} (wzgl. s_{12}^i i f_{12}) krzywej skośnej S_{12}^3 , przeto element X (wzgl. S^i) należy do krzywej S_{12}^3 . Płaszczyzna główna λ wiązki (W) miałaby wówczas szczególne położenie, gdyż przecinałaby się z prostymi x_{12} i s_{12}^i w punktach, leżących na krzywej podwójnej S_{12}^3 powierzchni krzywolinijowej $\mathcal{W}^5$.

Z uwagi na to, iż płaszczyzna główna λ wiązki (W) przecina powierzchnię krzywolinijową $\mathcal{W}^5$ w krzywej 5-go rzędu, a otrzymana poprzednio stożkowa L^2 należy do λ i $\mathcal{W}^5$, przeto owa krzywa przekroju rozpada się na stożkową L^2 i na krzywą płaską 3-go rzędu L^3 . Celem podania konstrukcji krzywej L^3 , oraz zbadania jej własności, oberzmy na płaszczyźnie λ pęk prostych $W(c, d, \dots, y, z, \dots, s^i = \sigma^i \lambda, \dots)$ i poszczególne proste tego pędu uwa-

żajmy za osie pęków płaszczyzn. Wówczas dowolnemu pękowi płaszczyzn np. $c(e, \varphi, \dots, c x, \lambda, \dots)$ wiązki (W) podporządkowane są (ust. 5) w wiązkach (W_1) i (W_2) dwa rzutowe pęki płaszczyzn

$$c_1(e_1, \varphi_1, \dots, \xi_1, \gamma_1 = c_1 l_1, \dots) \cap c_2(e_2, \varphi_2, \dots, \xi_2, \gamma_2 = c_2 l_2, \dots),$$

których osie leżą odpow. na płaszczyznach głównych ξ_1 i ξ_2 , a nadto płaszczyźnie głównej λ podporządkowane są pęki płaszczyzn (l_1) i (l_2). Utworem tych dwóch par rzutowych pęków płaszczyzn są dwie kwadryki skośne Γ_{12}^2 i Δ_{12}^2 , które przenikają się (ust. 5) w tworzącej $c_{12} = \gamma_1 \gamma_2$ i krzywej skośnej 3-go rzędu S_{12}^3 . Podkreślić należy, iż na powierzchni Γ_{12}^2 leży prosta $x_{12} = \lambda \nu$ lub $z = \lambda \mu$ wiązki (W), to w miejsce kwadryki Γ_{12}^2 wystąpi powierzchnia N_{12}^2 lub M_{12}^2 , utworzona (ust. 1) odpow. przez rzutowe pęki płaszczyzn (n_1) i (n_2), wzgl. (m_1) i (m_2), których osiami są proste główne n_1 , m_1 i n_2 , m_2 . Skoro zaś weźmiemy jedną z ośmiu prostych $s^i = \lambda \sigma^i$ (dla $i = 1, 2, \dots, 8$) za oś pędu, to zamiast Γ_{12}^2 otrzymamy wówczas kwadrykę Σ_i^2 , przechodzącą przez prostą $s_{12}^i = \sigma^i \sigma_1^i \sigma_2^i$ (ust. 4) powierzchni krzywolinijowej $\mathcal{W}^5$.

Poszczególne proste $c, d, \dots, y, z, \dots, s^i, \dots$ pędu (W)₂ podporządkowaliśmy — po wyeliminowaniu wspólnej kwadryki Δ_{12}^2 — powierzchnie skośnej 2-go rzędu $\Gamma_{12}^2, \Delta_{12}^2, \dots, N_{12}^2, M_{12}^2, \dots, \Sigma_i^2, \dots$. Ponieważ one przenikają się w krzywej skośnej S_{12}^3 i tworzącej x_{12} , przeto tworzą pęk kwadryk. Płaszczyzna główna λ przecina ten pęk w pędu stożkowych ($C_{12}^2, D_{12}^2, \dots, N_{12}^2, M_{12}^2, \dots, S_{12}^3, \dots$), którego punktami podstawowymi są trzy punkty E, F, G przecięcia się λ z krzywą S_{12}^3 i punkt $X = \lambda x_{12}$. Z rozważań naszych wynika odpowiedniość [1, 1]-znaczna pomiędzy elementami pędu stożkowych i prostymi pędu (W)₂, a ich utworem jest ogólna krzywa płaska L^3 rzędu 3-go, klasy 6-ej i rodzaju 1-go. Krzywa L^3 przechodzi przez punkty E, F, G, X , przez wierzchołek W wiązki (W), oraz przez ośm punktów przecięcia się każdej prostej s^i ze stożkową S_i^2 , t. zn. przez każdy punkt $S^i = s^i s_{12}^i = \lambda s_{12}^i$.

Dowiedliśmy zatem prawdziwości twierdzenia:

Płaszczyzna główna $\lambda = yz$ wiązki (W) przecina powierzchnię krzywolinijową $\mathcal{W}^5$ w stożkowej L^2 i ogólnej krzywej L^3 rzędu 3-go, klasy 6-ej i rodzaju 1-go. Obie te krzywe przechodzą przez trzy punkty przecięcia się płaszczyzny λ z podwójną krzywą skośną 3-go rzędu S_{12}^3 powierzchni $\mathcal{W}^5$. Krzywa L^3 przechodzi przez wierzchołek wiązki (W). Proste $y_{12} = \eta_1 \eta_2$ i $z_{12} = \xi_1 \xi_2$ powierzchni $\mathcal{W}^5$ są siecznymi pojedynczymi stożkowej L^2 , a nie przecinają wcale krzywej L^3 . Natomiast proste $x_{12} = \xi_1 \xi_2$ i $s_{12}^i = \sigma^i \sigma_1^i \sigma_2^i$ ($i = 1, \dots, 8$) powierzchni $\mathcal{W}^5$ są siecznymi pojedynczymi krzywej L^3 , a nie przecinają wcale stożkowej L^2 .

W analogiczny sposób wykazać możemy prawdziwość twierdzeń:

Płaszczyzna główna $\mu = xz$ wiązki (W) przecina powierzchnię $\mathcal{W}^5$ w stoż-

Płaszczyzna główna $\nu = xy$ wiązki (W) przecina powierzchnię $\mathcal{W}^5$ w stoż-

kowej M^2 i ogólnej krzywej 3-go rzędu M^3 . Obie te krzywe przechodzą przez trzy punkty przecięcia się płaszczyzny μ z krzywą skośną S_{12}^3 . Proste x_{12} i z_{12} powierzchni $\mathcal{W}^5$ są siecznami pojedynczymi stożkowej M^2 , a nie przecinają wcale krzywej M^3 . Natomiast proste y_{12} i s_{012}^4 ($i = 1, \dots, 8$) powierzchni $\mathcal{W}^5$ są siecznami pojedynczymi krzywej M^3 , a nie przecinają wcale stożkowej M^2 .

Krzywe M^3 i N^3 przechodzą przez wierzchołek W wiązki (W).

Z ustalonej poprzednio odpowiedniości [1,1]-znacznej pomiędzy prostymi pęku W ($c, d, \dots, y, z, \dots$)₂ a stożkowymi pęku ($C_{12}^2, D_{12}^2, \dots, N_{12}^2, M_{12}^2, \dots$) wynika, iż krzywa 3-go rzędu L^3 , będąca utworem tych pęków, przechodzi przez punkty N' i N'' przecięcia się prostej $y = \lambda\nu$ ze stożkową N_{12}^2 , t. zn. przez punkty przebicia się prostej y z powierzchnią skośną N_{12}^3 . Ponieważ jednak kwadrykę N_{12}^2 , będącą utworem rzutowych pęków płaszczyzn $(n_1) \wedge (n_2)$, przecina płaszczyzna główna ν wiązki (W) w stożkowej N^2 , przeto stożkowa N^2 przechodzi przez punkty N' i N'' . — Podobnie punkty M' i M'' , przecięcia się prostej $z = \lambda\mu$ ze stożkową M_{12}^2 , są punktami krzywej L^3 , a ponieważ należą one do kwadryki M_{12}^2 , będącej utworem pęków płaszczyzn $(m_1) \wedge (m_2)$, przeto są również punktami stożkowej M^2 , powstałej z przecięcia kwadryki M_{12}^2 płaszczyzną główną μ . Wykazaliśmy tedy, iż:

Pomiędzy krzywymi L^3 , N^3 i M^3 powierzchni krzywoliniowej $\mathcal{W}^5$ zachodzi ten związek, iż L^3 i N^3 przecinają się w takich dwóch punktach, które leżą na prostej głównej $y = \lambda\nu$ wiązki (W), a krzywe L^3 i M^3 przecinają się w dwóch punktach, leżących na prostej głównej $z = \lambda\mu$ tej wiązki.

W analogiczny sposób wykazać możemy, iż:

Krzywe M^3 i L^3 powierzchni $\mathcal{W}^5$ przecinają się w dwóch punktach, leżących na prostej głównej $z = \mu\lambda$ wiązki (W), a krzywe M^3 i N^3 przecinają się w dwóch punktach, leżących na prostej głównej $x = \mu\nu$ tej wiązki.

Z uwagi na to, iż rzutowe pęki płaszczyzn $(l_1) \wedge (l_2)$, oraz $(n_1) \wedge (n_2)$ posiadają jedną wspólną parę płaszczyzn homologicznych $\eta_1 = l_1 n_1$ i $\eta_2 = l_2 n_2$, przeto kwadryki Δ_{12}^3 i N_{12}^3 (przechodzące przez krzywą skośną S_{12}^3) posiadają

kowej N^2 i ogólnej krzywej 3-go rzędu N^3 . Obie te krzywe przechodzą przez trzy punkty przecięcia się płaszczyzny ν z krzywą skośną S_{12}^3 . Proste x_{12} i y_{12} powierzchni $\mathcal{W}^5$ są siecznami pojedynczymi stożkowej N^2 , a nie przecinają wcale krzywej N^3 . Natomiast proste z_{12} i s_{012}^4 ($i = 1, \dots, 8$) powierzchni $\mathcal{W}^5$ są siecznami pojedynczymi krzywej N^3 , a nie przecinają wcale stożkowej N^2 .

wspólną tworzącą $y_{12} = \eta_1 \eta_2$. Przez punkt λy_{12} przechodzi stożkowa L^2 , a przez punkt νy_{12} przechodzi stożkowa N^2 ; prosta y_{12} jest zatem wspólną sieczną pojedynczą stożkowych L^2 i N^2 . Prosta główna $y = \lambda\nu$ wiązki (W) nie jest (ust. 1) dwusieczną krzywej skośnej S_{12}^3 , więc punkty L' i L'' przebicia się elementu y z kwadryką Δ_{12}^3 są różne od punktów N' i N'' przebicia się prostej y z powierzchnią N_{12}^3 . Prosta y przecina się zatem ze stożkową L^2 w punktach L' i L'' , a ze stożkową N^2 w innych punktach N' i N'' . A zatem:

Stożkowe L^2 i N^2 powierzchni krzywoliniowej $\mathcal{W}^5$ posiadają wspólną sieczną pojedynczą $y_{12} = \eta_1 \eta_2$, która leży na powierzchni $\mathcal{W}^5$, oraz wspólną dwusieczną $y = \lambda\nu$, która jest prostą główną wiązki (W). Stożkowe L^2 i N^2 nie posiadają żadnego punktu wspólnego.

Stożkowe L^2 i M^2 powierzchni $\mathcal{W}^5$ posiadają wspólną sieczną pojedynczą $z_{12} = \xi_1 \xi_2$, oraz wspólną dwusieczną $z = \lambda\mu$. Stożkowe L^2 i M^2 nie posiadają wspólnego punktu.

Stożkowe N^2 i M^2 powierzchni $\mathcal{W}^5$ posiadają wspólną sieczną pojedynczą $x_{12} = \xi_1 \xi_2$, oraz wspólną dwusieczną $x = \nu\mu$. Stożkowe N^2 i M^2 nie posiadają wspólnego punktu.

Każda z trzech płaszczyzn głównych λ , μ i ν wiązki (W) przecina zatem powierzchnię krzywoliniową $\mathcal{W}^5$ w zniekształconej krzywej 5-go rzędu, która rozpada się na stożkową i na ogólną krzywą 3-go rzędu. Przez wierzchołek W , który jest (ust. 5) punktem pojedynczym powierzchni $\mathcal{W}^5$, przechodzą owe trzy ogólne krzywe płaskie 3-go rzędu. Wnosimy stąd, iż wierzchołek wiązki (W) jest punktem pojedynczym osobliwym badanej powierzchni krzywoliniowej $\mathcal{W}^5$.

Uwaga: Oprócz trzech płaszczyzn λ , μ i ν , istnieją (ust. 17) jeszcze 52 dalsze płaszczyzny o tej charakterystycznej własności, iż każda z nich przecina powierzchnię $\mathcal{W}^5$ w stożkowej i ogólnej krzywej 3-go rzędu.

11. Zajmiemy się teraz konstrukcją i badaniem własności krzywych skośnych wyższych rzędów, leżących na powierzchni krzywoliniowej $\mathcal{W}^5$.

W tym celu weźmy pod uwagę stożek Γ^ε klasy ε i rodzaju 0, który należy do wiązki (W) i nie jest styczny do żadnej z ośmiu płaszczyzn σ^i ($i = 1, \dots, 8$) tej wiązki, przechodzących odpow. przez proste $s_{012}^4 = \sigma^i \sigma^j \sigma^k$ powierzchni $\mathcal{W}^5$. Załóżmy nadto, iż płaszczyznami odpow. u , v , wzgl. w -krotnie-stycznymi do jednobieżnego stożka Γ^ε . Liczby u , v i w spełniać muszą oczywiście warunek

$$\frac{1}{2}u(u-1) + \frac{1}{2}v(v-1) + \frac{1}{2}w(w-1) \leq \frac{1}{2}(\varepsilon-1) \cdot (\varepsilon-2),$$

gdyż jednobieżny stożek Γ^ε klasy ε posiada w ogólności $\frac{1}{2}(\varepsilon-1)(\varepsilon-2)$ płaszczyzn podwójnie-stycznych, przyczem każdą jego płaszczyznę q -krotnie-styczną liczyć należy za $\frac{1}{2}q(q-1)$ płaszczyzn podwójnie-stycznych.

Z teorii przekształceń kwadratowych wiadomo, iż pękowi $I^e(\alpha, \dots)$ płaszczyzn stycznych do stożka I^e podporządkowany jest w wiązce (W_1) pęk płaszczyzn stycznych do stożka klasy 2ε , który rozpada się na u -krotnie liczony pęk płaszczyzn (l_1) , v -krotny pęk płaszczyzn (m_1) i w -krotny pęk płaszczyzn (n_1) — przy czym osiami tych pęków są proste główne l_1 , m_1 i n_1 wiązki (W_1) — oraz na pęk płaszczyzn $I_1^{\tau}(\alpha_1, \dots)$ stycznych do stożka I_1^{τ} klasy $\tau = 2\varepsilon - (u + v + w)$. Płaszczyzny główne ξ_1, η_1, ζ_1 wiązki (W_1) są odpow. płaszczyznami $\varepsilon - (v + w)$ -krotnie-, $\varepsilon - (w + u)$ -krotnie-, względnie $\varepsilon - (u + v)$ -krotnie-stycznymi stożka I_1^{τ} . Ponieważ jednocześnie stożek I^e — poza osobliwymi płaszczyznami λ, μ i ν — posiada w ogólności

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{1}{2}(\varepsilon - 1)(\varepsilon - 2) - \frac{1}{2}u(u - 1) - \frac{1}{2}v(v - 1) - \frac{1}{2}w(w - 1) = \\ &= \frac{1}{2}(\varepsilon - 1)(\varepsilon - 2) - \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2 - u - v - w) \end{aligned}$$

płaszczyzn podwójnie-stycznych (wzgl. równoważną liczbę płaszczyzn q -krotnie-stycznych), które są różne od płaszczyzn głównych λ, μ, ν wiązki (W) , przeto — na mocy przekształceń kwadratowych — stożek I_1^{τ} posiada również δ płaszczyzn podwójnie-stycznych, wzgl. równoważną liczbę płaszczyzn q -krotnie-stycznych. Stożek I_1^{τ} jest tedy rodzaju 0.

Zauważyć wkońcu należy, iż nawzajem pękowi płaszczyzn stycznych do jednobieżnego stożka I_1^{τ} podporządkowany jest w wiązce (W) pęk płaszczyzn stycznych do stożka klasy $2\tau = 4\varepsilon - 2(u + v + w)$, który rozpada się na $\varepsilon - (v + w)$ -krotnie liczony pęk płaszczyzn (x) , na $\varepsilon - (w + u)$ -krotny pęk płaszczyzn (y) i $\varepsilon - (u + v)$ -krotny pęk płaszczyzn (z) — przy czym osiami tych pęków są proste główne x, y i z wiązki (W) — oraz na pęk płaszczyzn stycznych do stożka klasy

$$4\varepsilon - 2(u + v + w) - (\varepsilon - v - w) - (\varepsilon - w - u) - (\varepsilon - u - v) = \varepsilon.$$

Płaszczyzny główne λ, μ i ν wiązki (W) są odpow. płaszczyznami $\tau - (\varepsilon - w - u) - (\varepsilon - u - v) = u$ -krotnie-, $\tau - (\varepsilon - u - v) - (\varepsilon - v - w) = v$ -krotnie-, wzgl. $\tau - (\varepsilon - v - w) - (\varepsilon - w - u) = w$ -krotnie-stycznymi stożka I^e .

W ust. 6 przyjęliśmy „szereg kolineacyjnych wiązek“

$$(6) \quad (W_1) \times (W_2) \times (W_1^*) \times (W_2^*) \times \dots$$

których wierzchołkami są poszczególne punkty $W_1, W_2, W_1^*, W_2^*, \dots$ krzywej skośnej S_2^3 . Jednocześnie stożkowi I_1^{τ} wiązki (W_1) podporządkowane są kolineacyjnie w dalszych wiązkach $(W_2), (W_1^*), (W_2^*), \dots$ odpow. stożki $F_2^{\tau}, I_1^{\tau}, I_2^{\tau}, \dots$, z których każdy jest klasy $\tau = 2\varepsilon - (u + v + w)$ i rodzaju 0, oraz posiada δ płaszczyzn podwójnie-stycznych, wzgl. równoważną liczbę płaszczyzn q -krotnie-stycznych. Trzem płaszczyznom ξ_1, η_1, ζ_1 wiązki (W_1) podporządkowane w każdej z wiązek wypisanego szeregu (6) odpow. płaszczyzny: ξ_2, η_2, ζ_2 ;

$\xi_1^*, \eta_1^*, \zeta_1^*; \xi_2^*, \eta_2^*, \zeta_2^*; \dots$ są dla stożków $I_2^{\tau}, I_1^{\tau}, I_2^{\tau}, \dots$ odpow. płaszczyznami $\varepsilon - (v + w)$ -krotnie-, $\varepsilon - (w + u)$ -krotnie-, wzgl. $\varepsilon - (u + v)$ -krotnie-stycznymi.

Z relacji

$$(4) \quad (W_1) \times (W_2) \quad (W) \pi^2 (W_1) \quad (W) \pi^2 (W_2)$$

ustępu 2-go, oraz z relacji (6) i (7)

$$(7) \quad (W) \pi^2 (W_1^*), \quad (W) \pi^2 (W_2^*), \dots$$

ustępu 6-go wynika bezpośrednio, iż jednobieżnemu stożkowi I^e , należącemu do wiązki (W) , — podporządkowane są w myśl powyższych przekształceń kwadratowych odpow. jednobieżne stożki $I_1^{\tau}, I_1^{\tau}, I_2^{\tau}, \dots$

Z relacji (4) wynika wprost rzutowość pęków

$$(8) \quad I^e(\alpha, \beta, \dots) \times I_1^{\tau}(\alpha_1, \beta_1, \dots) \times I_2^{\tau}(\alpha_2, \beta_2, \dots)$$

płaszczyzn stycznych do jednobieżnych (rodzaju 0) stożków klasy ε , wzgl. $\tau = 2\varepsilon - (u + v + w)$, a trójki homologicznych płaszczyzn tych pęków przecinają się w punktach: $A = \alpha\alpha_1\alpha_2, B = \beta\beta_1\beta_2, \dots$ krzywej skośnej C , która należy oczywiście (ust. 4) do badanej powierzchni krzywoliniowej $\mathcal{W}^5$. Krzywa ta C jest 1)

jednobieżną krzywą skośną rzędu $5\varepsilon - 2(u + v + w)$, klasy $3(5\varepsilon - 2) - 6(u + v + w)$ i porządku $2(5\varepsilon - 1) - 4(u + v + w)$, która posiada

$$\delta = \frac{1}{2}(\varepsilon - 1)(\varepsilon - 2) - \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2 - u - v - w)$$

punktów podwójnych (wzgl. równoważną liczbę punktów wielokrotnych), oraz

$$\delta_0 = 6\varepsilon(2\varepsilon - 1) - \frac{5}{2}(4\varepsilon - 1)(u + v + w) + 2(u + v + w)^2 + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)$$

punktów podwójnych pozornych.

Przez prostą główną $x = \mu\nu$ wiązki (W) przechodzi — oprócz płaszczyzn głównych μ i ν , które są odpow. v -, wzgl. w -krotnie-stycznymi do stożka I^e — jeszcze $\varepsilon - (v + w)$ płaszczyzn stycznych do owego stożka I^e . Ponieważ każdej z tych płaszczyzn podporządkowane są (ust. 1) płaszczyzny główne ξ_1 i ξ_2 wiązek (W_1) i (W_2) , przeto każda z tych płaszczyzn przecina prostą $x_{12} = \xi_1\xi_2$ w punkcie krzywej skośnej C . A zatem (ust. 4):

Proste $x_{12} = \xi_1\xi_2, y_{12} = \eta_1\eta_2$ i $z_{12} = \zeta_1\zeta_2$ powierzchni krzywoliniowej $\mathcal{W}^5$ są odpow. $\varepsilon - (v + w)$ -krotnymi, $\varepsilon - (w + u)$ -, wzgl. $\varepsilon - (u + v)$ -krotnymi stycznymi badanej krzywej skośnej C rzędu $5\varepsilon - 2(u + v + w)$.

1) Dr. Anton Plamitzer, Erzeugnisse projektiver Involutionen höheren Grades, deren Träger unikursale Gebilde sind (I-e u. II-e Mitteilung) Sitzungsber. d. Akademie d. Wissenschaften in Wien (Math.-naturw. Kl. Abt. II a) Bd. 125 u. 126. Wien 1916—17, Nr. 40—43.

Przez prostą główną $l_1 = \eta_1 \xi_1$ wiązki (W_1) przechodzi $\tau = 2\varepsilon - (u + v + w)$ płaszczyzn stycznych do jednobieżnego stożka Γ_1^* , a mianowicie: płaszczyzn główne η_1 i ξ_1 , z których pierwsza jest $\varepsilon - (w + u)$ -krotnie-styczna, a druga $\varepsilon - (u + v)$ -krotnie-styczna, oraz dalszych $\tau - (\varepsilon - w - u) - (\varepsilon - u - v) = u$ płaszczyzn stycznych $\gamma_1, \dots$. Podobnie przez prostą główną l_2 wiązki (W_2) , oprócz płaszczyzn głównych η_2 i ξ_2 , przechodzi u płaszczyzn stycznych $\gamma_2, \dots$ do stożka Γ_2^* . Ponieważ elementom γ_1 i $\gamma_2, \dots$ podporządkowana jest w wiązce (W) płaszczyzna główna l , przeto punkty $\lambda \gamma_1 \gamma_2, \dots$ leżą na badanej krzywej skośnej C rzędu $5\varepsilon - 2(u + v + w)$. Z rozważań ust. 10-go wynika jednak, iż owe punkty $\lambda \gamma_1 \gamma_2, \dots$ są również punktami stożkowej L^2 , przynależnej do płaszczyzny głównej l i powierzchni krzywolinowej $\mathcal{W}^0$. Wykazaliśmy tedy, iż stożkowa L^2 i jednobieżna krzywa skośna C rzędu $5\varepsilon - 2(u + v + w)$ przecinają się w u punktach $\lambda \gamma_1 \gamma_2, \dots$. Płaszczyzna l , oprócz owych u punktów $\lambda \gamma_1 \gamma_2, \dots$, posiada jeszcze $5\varepsilon - 3u - 2v - 2w$ dalszych punktów wspólnych z krzywą skośną C . Ponieważ każdy z tych ostatnich punktów leży na powierzchni $\mathcal{W}^5$, przeto (ust. 10) musi leżeć na ogólnej krzywej płaskiej L^2 rzędu 3-go. Po uwzględnieniu rozważań ust. 10-go, dochodzimy do twierdzenia:

Jednobieżna krzywa skośna C rzędu $5\varepsilon - 2(u + v + w)$, leżąca na powierzchni krzywolinowej $\mathcal{W}^5$, przecina się ze stożkowami L^2 , M^2 i N^2 tej powierzchni odpow. w u, v, w wzgl. w punktach, a z ogólnymi krzywymi płaskimi 3-go rzędu L^3 , M^3 i N^3 tej powierzchni $\mathcal{W}^0$ przecina się odpow. w $5\varepsilon - 3u - 2v - 2w$, $5\varepsilon - 2u - 3v - 2w$, wzgl. $5\varepsilon - 2u - 2v - 3w$ punktach.

Korzystając z relacji (6) tego ustępu możemy, zamiast wiązek (W_1) i (W_2) , wziąć pod uwagę wiązki (W_1^*) i (W_2^*) . Homologiczne płaszczyzny α_1 i α_2 , wzgl. α_1^* i α_2^* tych kolineacyjnych wiązek przecinają się w jednej i tej samej (ust. 6) dwusiecznej $a_{12} = \alpha_1 \alpha_2 = \alpha_1^* \alpha_2^*$ krzywej skośnej S_{12}^3 . Wówczas w miejsce relacji (8) otrzymamy rzutowość trzech pęków

$$(9) \quad \Gamma^s(\alpha, \beta, \dots) \propto \Gamma_1^{s*}(\alpha_1^*, \beta_1^*, \dots) \propto \Gamma_2^{s*}(\alpha_2^*, \beta_2^*, \dots)$$

płaszczyzn stycznych do jednobieżnych stożków klasy ε , wzgl. $\tau = 2\varepsilon - (u + v + w)$. Homologiczne płaszczyzny tych pęków przecinają się w punktach $A = \alpha \alpha_1^* \alpha_2^*$, $B = \beta \beta_1^* \beta_2^*, \dots$, które są oczywiście punktami $A = \alpha a_{12} = \alpha a_1 a_2$, $B = \beta b_{12} = \beta \beta_1 \beta_2, \dots$, krzywej C . A zatem:

Jednobieżna krzywa skośna C rzędu $5\varepsilon - 2(u + v + w)$, leżąca na powierzchni $\mathcal{W}^5$, może być utworem takich trzech rzutowych pęków płaszczyzn, które spełniają relację (8) lub relację (9).

Chcąc poznać inne sposoby syntetycznego tworzenia krzywej C , weźmy pod uwagę — p. relacja (8) i (9) — dwa rzutowe pęki płaszczyzn

$$(\Gamma_1^s) \propto (\Gamma_2^s) \quad \text{wzgl.} \quad (\Gamma_1^{s*}) \propto (\Gamma_2^{s*}).$$

Homologiczne płaszczyzny tych pęków przecinają się w prostych: $a_{12} = \alpha_1 \alpha_2 = \alpha_1^* \alpha_2^*$, $b_{12} = \beta_1 \beta_2 = \beta_1^* \beta_2^*, \dots$, które są ¹⁾ tworzącymi jednobieżnej (rodzaju 0) powierzchni skośnej Γ_{12}^5 stopnia $2\tau = 4\varepsilon - 2(u + v + w)$ i porządku $2(4\varepsilon - 1) - 4(u + v + w)$. Wierzchołki $W_1, W_2, W_1^*, W_2^*, \dots$, stożków podstawowych uważanych pęków, t. zn. poszczególne punkty krzywej skośnej S_{12}^3 , są ¹⁾ punktami $\tau = 2\varepsilon - (u + v + w)$ -krotnymi powierzchni Γ_{12}^5 , a proste $a_{12} = \xi_1 \xi_2$, $b_{12} = \eta_1 \eta_2$ i $z_{12} = \xi_1 \xi_2$ są odpow. $\varepsilon - (v + w)$ -krotnymi, $\varepsilon - (w + u)$, wzgl. $\varepsilon - (u + v)$ -krotnymi tworzącymi powierzchnię Γ_{12}^5 . Owa powierzchnia skośna posiada nadto $\delta = \frac{1}{2}(\varepsilon - 1)(\varepsilon - 2) - \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2 - u - v - w)$ tworzących podwójnych, wzgl. równoważną liczbę tworzących wielokrotnych.

Powierzchnia skośna Γ_{12}^5 przenika się z powierzchnią krzywolinową $\mathcal{W}^5$ w krzywej rzędu $10\tau = 20\varepsilon - 10(u + v + w)$, która rozpada się oczywiście na $2\tau = 4\varepsilon - 2(u + v + w)$ -krotnie liczoną krzywą skośną 3-go rzędu S_{12}^3 , na $\varepsilon - (v + w)$ -krotną prostą $a_{12} = \xi_1 \xi_2$, na $\varepsilon - (w + u)$ -krotną prostą b_{12} , na $\varepsilon - (u + v)$ -krotną prostą z_{12} i na krzywą skośną C rzędu $5\varepsilon - 2(u + v + w)$.

Za pośrednictwem relacji (8) lub (9) ustanowić możemy rzutowość

$$\Gamma^s(\alpha, \beta, \dots) \propto \Gamma_{12}^5(a_{12}, b_{12}, \dots)$$

między płaszczyznami stycznymi $\alpha, \beta, \dots$ do jednobieżnego stożka Γ^s klasy ε i tworzącymi $a_{12} = \alpha_1 \alpha_2 = \alpha_1^* \alpha_2^*$, $b_{12}, \dots$ jednobieżnej powierzchni skośnej Γ_{12}^5 stopnia $2\tau = 4\varepsilon - 2(u + v + w)$. Utworem tej rzutowości jest ²⁾ badana jednobieżna krzywa skośna C rzędu $5\varepsilon - 2(u + v + w)$, jako miejsce geometryczne punktów $A = \alpha a_{12} = \alpha \alpha_1 \alpha_2 = \alpha \alpha_1^* \alpha_2^*$, $B = \beta b_{12} = \beta \beta_1 \beta_2 = \beta \beta_1^* \beta_2^*, \dots$

Skoro weźmiemy pod uwagę — p. relację (8) — dwa rzutowe pęki płaszczyzn

$$(\Gamma^s) \propto (\Gamma_1^s) \quad \text{wzgl.} \quad (\Gamma^s) \propto (\Gamma_2^s)$$

to utworami ich są ¹⁾ jednobieżne powierzchnie skośne Γ_{01} i Γ_{02} stopnia $\varepsilon + \tau = 3\varepsilon - (u + v + w)$ i porządku $2(3\varepsilon - 1) - 2(u + v + w)$. Z relacji (8) wynikają wprost rzutowości

$$\Gamma_{01}(a_{01}, b_{01}, \dots) \propto \Gamma_{12}^5(a_{12}, b_{12}, \dots), \quad \text{oraz} \quad \Gamma_{02}(a_{02}, b_{02}, \dots) \propto \Gamma_{12}^5(a_{12}, b_{12}, \dots)$$

między tworzącymi $a_{01} = \alpha a_1$, $b_{01} = \beta \beta_1, \dots$ powierzchni Γ_{01} i płaszczyznami $a_{12}, b_{12}, \dots$ stycznymi do stożka Γ_{12}^5 , oraz tworzącymi $a_{02} = \alpha a_2$, $b_{02} = \beta \beta_2, \dots$ powierzchni Γ_{02} i płaszczyznami $a_1, \beta_1, \dots$ stożka Γ_1^* . Homologiczne elementy tych utworów przecinają się ²⁾ w punktach $A = a_{01} a_2 = \alpha a_1 a_2$, $B = b_{01} \beta_2 = \beta \beta_1 \beta_2, \dots$, wzgl. punktach $A = a_{02} a_1 = \alpha a_2 a_1$, $B = b_{02} \beta_1 = \beta \beta_2 \beta_1, \dots$ badanej jednobieżnej krzywej skośnej C rzędu $5\varepsilon - 2(u + v + w)$.

W analogiczny sposób, korzystając z relacji (9), skonstruować możemy

¹⁾ Dr. Anton Plamitzer, l. c. (I Mitteilung) Nr. 11—13.

²⁾ " " " l. c. (II " ") Nr. 32.

jednobieżne powierzchnie skośne Γ_{01}^* i Γ_{02}^* , będące utworami rzutowych pęków płaszczyzn

$$(\Gamma^e) \cap (\Gamma^{*e}) \quad \text{wzgl.} \quad (\Gamma^e) \cap (\Gamma_{\frac{1}{2}}^{*e}).$$

Z dotychczasowych rozważań wynika, że:

Przez jednobieżną krzywą skośną C rzędu $5\varepsilon - 2(u + v + w)$, leżącą na powierzchni krzywoliniowej $\mathcal{W}^5$, przechodzą jednobieżne powierzchnie skośne Γ_{12}^* , Γ_{01} , Γ_{02} , Γ_{01}^* , Γ_{02}^* , ...; pierwsza z nich jest stopnia $2\pi = 4\varepsilon - 2(u + v + w)$ i porządku $2(4\varepsilon - 1) - 4(u + v + w)$, każda z pozostałych powierzchni jest stopnia $3\varepsilon - (u + v + w)$ i porządku $2(3\varepsilon - 1) - 2(u + v + w)$.

Z łatwością zauważymy, że na dowolnej płaszczyźnie stycznej α wspólnego stożka kierowniczego Γ^e powierzchni skośnych Γ_{01} , Γ_{02} , Γ_{01}^* , Γ_{02}^* , ... leżą tworzące: $a_{01} = \alpha\alpha_1$, $a_{02} = \alpha\alpha_2$, $a_{01}^* = \alpha\alpha_1^*$, $a_{02}^* = \alpha\alpha_2^*$, ... tych powierzchni. Owe tworzące wyznaczają pęk prostych $A(a_{01}, a_{02}, a_{01}^*, a_{02}^*, \dots)$, którego wierzchołkiem jest punkt $A = \alpha\alpha_1\alpha_2 = \alpha\alpha_1^*\alpha_2^* = \dots = \alpha\alpha_{12}$ krzywej skośnej C rzędu $5\varepsilon - 2(u + v + w)$.

12. Zamiast stożka Γ^e weźmy teraz pod uwagę jednobieżny stożek $\Gamma^{e'}$ klasy ε' , który należy do wiązki (W) i nie jest styczny do żadnej z ośmiu płaszczyzn σ' tej wiązki, przechodzących odpow. przez proste $s_{012}^* = \sigma'\sigma_1\sigma_2$ powierzchni $\mathcal{W}^5$. Niechaj płaszczyzny główne λ , μ i ν wiązki (W) będą płaszczyznami odpow. u' -, v' -, wzgl. w' -krotnie stycznymi stożka $\Gamma^{e'}$.

Temu stożkowi podporządkowano są w wiązkach (W_1) i (W_2) dwa (ust. 11) jednobieżne stożki Γ_1^* i Γ_2^* klasy $\varepsilon' = 2\varepsilon' - (u' + v' + w')$. Płaszczyzny główne ξ_1 , η_1 , ξ_2 wiązki (W_1) — (wzgl. ξ_2 , η_2 , ξ_2 wiązki (W_2)) — są odpow. płaszczyznami $\varepsilon' - (v' + w')$ -, $\varepsilon' - (w' + u')$ -, $\varepsilon' - (u' + v')$ -krotnie stycznymi stożka Γ_1^* (wzgl. stożka Γ_2^*).

Z rozważań ust. 11-go wynika, iż za pośrednictwem stożków $\Gamma^{e'}$, Γ_1^* i Γ_2^* otrzymamy na powierzchni $\mathcal{W}^5$ leżącą jednobieżną krzywą skośną C' rzędu $5\varepsilon' - 2(u' + v' + w')$, klasy $3(5\varepsilon' - 2) - 6(u' + v' + w')$ i porządku $2(5\varepsilon' - 1) - 4(u' + v' + w')$.

Celem wyznaczenia liczby punktów przecięcia się krzywych C i C' , zauważymy, iż płaszczyźnie u -krotnie stycznej λ stożka Γ^e podporządkowanych jest: u płaszczyzn $\beta_1, \dots$ w wiązce (W_1) , które przechodzą przez prostą główną $l_1 = \eta_1\xi_1$ tej wiązki i są styczne do stożka Γ_1^* klasy $\varepsilon = 2\varepsilon - (u + v + w)$, — oraz u płaszczyzn $\beta_2, \dots$ w wiązce (W_2) , które przechodzą przez prostą główną $l_2 = \eta_2\xi_2$ tej wiązki i są styczne do stożka Γ_2^* . Natomiast płaszczyźnie u -krotnie stycznej λ stożka $\Gamma^{e'}$ podporządkowanych jest: u' płaszczyzn $\beta'_1, \dots$ w wiązce (W_1) , które przechodzą przez l_1 i są styczne do stożka Γ_1^* , — oraz u' płaszczyzn $\beta'_2, \dots$ w wiązce (W_2) , które przechodzą przez l_2 i są styczne do stożka Γ_2^* . W ogólnym przypadku płaszczyzny β_1 i $\beta'_1, \dots$, oraz β_2 i $\beta'_2, \dots$ są różne od siebie, a tem samem punkty $B = \lambda\beta_1\beta_2, \dots$ krzywej skośnej C

(ust. 11) nie leżą na krzywej C' , a punkty $B' = \lambda\beta'_1\beta'_2, \dots$ krzywej skośnej C' wcale nie leżą na krzywej C . — Te same uwagi stosują się do dwóch pozostałych płaszczyzn głównych μ i ν wiązki (W) .

Podobnie $\varepsilon - (v + w)$ -krotnie stycznej płaszczyźnie ξ_1 stożka Γ_1^* podporządkowanych jest $(\varepsilon - v - w)$ płaszczyzn $\alpha, \dots$ w wiązce (W) , które przechodzą przez prostą główną $\alpha = \mu\nu$ tej wiązki i są styczne do stożka Γ^e . Płaszczyźnie $\varepsilon' - (v' + w')$ -krotnie stycznej ξ_1 stożka Γ_1^* podporządkowanych jest $(\varepsilon' - v' - w')$ płaszczyzn $\alpha', \dots$ w wiązce (W) , które przechodzą przez α i są styczne do stożka Γ_1^* . W ogólnym przypadku płaszczyzny α i $\alpha', \dots$ są różne od siebie, a tem samem punkty $A = \alpha\xi_1\xi_2, \dots$ krzywej C nie należą do krzywej C' , a punkty $A' = \alpha'\xi_1\xi_2, \dots$ krzywej C' nie należą do krzywej C . — Te same uwagi stosują się do dwóch pozostałych płaszczyzn głównych η_1 i ξ_2 wiązki (W_1) .

Stożki Γ^e i $\Gamma^{e'}$ o wspólnym wierzchołku W , prócz płaszczyzn głównych λ , μ i ν wiązki (W) , — które są odpow. płaszczyznami u -, v -, wzgl. w -krotnie stycznymi stożka Γ^e i równocześnie u' -, v' -, wzgl. w' -krotnie stycznymi stożka $\Gamma^{e'}$ — posiadają jeszcze

$$\omega = \varepsilon\varepsilon' - (u'u' + v'v' + w'w')$$

dalszych wspólnych płaszczyzn stycznych $\gamma, \dots$ Podporządkowane im płaszczyzny $\gamma_1, \dots$ wiązki (W_1) są wspólnymi płaszczyznami stycznymi do stożków Γ_1^* i $\Gamma_1^{e'}$, a płaszczyzny $\gamma_2, \dots$ wiązki (W_2) są wspólnymi płaszczyznami stycznymi do stożków Γ_2^* i $\Gamma_2^{e'}$.

Do tego samego wyniku dojdziemy, jeśli weźmiemy pod uwagę dwa stożki np. Γ_1^* i $\Gamma_1^{e'}$ klasy $\varepsilon = 2\varepsilon - (u + v + w)$, wzgl. $\varepsilon' = 2\varepsilon' - (u' + v' + w')$. Oprócz płaszczyzn głównych ξ_1 , η_1 , ξ_1 — które są odpow. płaszczyznami $\varepsilon - (v + w)$ -, $\varepsilon - (w + u)$ -, $\varepsilon - (u + v)$ -krotnie stycznymi do stożka Γ_1^* , oraz $\varepsilon' - (v' + w')$ -, $\varepsilon' - (w' + u')$ -, $\varepsilon' - (u' + v')$ -krotnie stycznymi do stożka $\Gamma_1^{e'}$ — owe dwa stożki posiadają jeszcze

$$\begin{aligned} \tau\varepsilon - (\varepsilon - v - w)(\varepsilon' - v' - w') - (\varepsilon - w - u)(\varepsilon' - w' - u') - (\varepsilon - u - v)(\varepsilon' - u' - v') = \\ = \varepsilon\varepsilon' - (u'u' + v'v' + w'w') = \omega \end{aligned}$$

wspólnych płaszczyzn stycznych $\gamma_1, \dots$ Elementy homologiczne $\gamma, \dots$ wiązki (W_2) są wspólnymi płaszczyznami stycznymi do stożków Γ^e i $\Gamma^{e'}$, a płaszczyzny $\gamma_2, \dots$ wiązki (W_4) są wspólnymi płaszczyznami stycznymi do stożków Γ_2^* i $\Gamma_2^{e'}$.

Z rozważań tych wynika, iż każdy punkt $\gamma\gamma_1\gamma_2$, przecięcia się trójki homologicznych płaszczyzn γ , γ_1 i γ_2 , jest punktem krzywej skośnej C i zarazem punktem krzywej skośnej C' . Krzywe te posiadają zatem ω takich wspólnych punktów.

Gdybyśmy — wbrew dotychczasowym założeniom — przyjęli, iż z pośród u płaszczyzn β_1 i u' płaszczyzn β'_1 (przechodzących przez prostą l_1) zjednoczyło się u^0

plaszczyn $\beta_1 = \beta'_1, \dots$ wiązki (W_1) , to podporządkowane im płaszczyzny w kolineacyjnej wiązce (W_2) byłyby też elementami zjednoczonymi $\beta_2 = \beta'_2, \dots$. Na płaszczyźnie głównej λ wiązki (W) otrzymalibyśmy wówczas u^0 punktów $B = \lambda\beta_1\beta_2 = \lambda\beta'_1\beta'_2 = B'$ przecięcia się krzywych skośnych C i C' . Jednak z uwagi na to, iż stożki Γ_1^* i $\Gamma_1'^*$, oprócz płaszczyzn ξ_1, η_1 i ξ_1 , posiadać mogą tylko ω wspólnych płaszczyzn stycznych, przeto na tę liczbę składa się u^0 płaszczyzn $\beta_1 = \beta'_1, \dots$, oraz $(\omega - u^0)$ płaszczyzn $\gamma_1, \dots$. W rozważanym teraz przypadku krzywe skośne C i C' przecinają się również tylko w ω punktach. — Do tego samego wyniku doszlibyśmy, gdyby z pośród $(\varepsilon - v - w)$ płaszczyzn α i z pośród $(\varepsilon' - v' - w')$ płaszczyzn α' (przechodzących przez prostą $x = \mu v$) zjednoczyło się u^* płaszczyzn $\alpha = \alpha', \dots$ wiązki (W) . Na liczbę ω wspólnych płaszczyzn stycznych do stożków Γ^* i Γ'^* składałoby się u^* płaszczyzn $\alpha = \alpha', \dots$ oraz $(\omega - u^*)$ płaszczyzn $\gamma, \dots$ — A zatem dowiedliśmy prawdziwości następującego twierdzenia:

Dwie dowolne jednobieżne krzywe skośne C rzędu $5\varepsilon - 2(u + v + w)$ i C' rzędu $5\varepsilon' - 2(u' + v' + w')$, leżące na powierzchni krzywoliniowej Ψ^5 , przecinają się w $\varepsilon\varepsilon' - (u u' + v v' + w w')$ punktach.

Przez krzywą C przechodzi (ust. 11) jednobieżna powierzchnia skośna $\Gamma_{12}^{2\varepsilon}$ stopnia $2\varepsilon = 4\varepsilon - 2(u + v + w)$, która posiada $\varepsilon - (v + w)$ -krotną tworzącą $x_{12} = \xi_1\xi_2$, $\varepsilon - (w + u)$ -krotną tworzącą $y_{12} = \eta_1\eta_2$ i $\varepsilon - (u + v)$ -krotną tworzącą $z_{12} = \xi_1\xi_2$, oraz $2\varepsilon - (u + v + w)$ -krotną krzywą skośną 3-go rzędu S_{12}^3 . Podobnie przez krzywą C' przechodzi jednobieżna powierzchnia skośna $\Gamma_{12}^{2\varepsilon'}$ stopnia $2\varepsilon' = 4\varepsilon' - 2(u' + v' + w')$, dla której proste x_{12}, y_{12} i z_{12} są odpow. tworzącami $\varepsilon' - (v' + w')$, $\varepsilon' - (w' + u')$, $\varepsilon' - (u' + v')$ -krotnymi, a krzywa 3-go rzędu S_{12}^3 krzywą $2\varepsilon' - (u' + v' + w')$ -krotną. Nadto — jak z poprzednich rozważań wynika — powierzchnie $\Gamma_{12}^{2\varepsilon}$ i $\Gamma_{12}^{2\varepsilon'}$ posiadają ω wspólnych tworzących $c_{12} = \gamma_1\gamma_2, \dots$. Powierzchnie te przenikają się w krzywej rzędu $2\varepsilon \cdot 2\varepsilon' = [4\varepsilon - 2(u + v + w)][4\varepsilon' - 2(u' + v' + w')]$, która rozpada się na ω prostych $c_{12}, \dots$, na $[2\varepsilon - (u + v + w)][2\varepsilon' - (u' + v' + w')]$ -krotnie liczoną krzywą skośną 3-go rzędu S_{12}^3 , oraz na $(\varepsilon - v - w)(\varepsilon' - v' - w')$ -krotnie liczoną prostą x_{12} , na $(\varepsilon - w - u)(\varepsilon' - w' - u')$ -krotną prostą y_{12} i na $(\varepsilon - u - v)(\varepsilon' - u' - v')$ -krotną prostą z_{12} .

Krzywa skośna C rzędu $5\varepsilon - 2(u + v + w)$, leżąca na powierzchni $\Gamma_{12}^{2\varepsilon}$, przecina powierzchnię skośną $\Gamma_{12}^{2\varepsilon'}$ stopnia $2\varepsilon' = 4\varepsilon' - 2(u' + v' + w')$ w

$$[5\varepsilon - 2(u + v + w)][4\varepsilon' - 2(u' + v' + w')]$$

punktach, które leżeć muszą konieczne na krzywej przenikania się powierzchni $\Gamma_{12}^{2\varepsilon}$ i $\Gamma_{12}^{2\varepsilon'}$. Każda z ω wspólnych tworzących $c_{12}, \dots$ tych powierzchni przecina krzywą C w jednym punkcie $c_{12}\gamma = \gamma\gamma_1\gamma_2$. Ponieważ prosta x_{12} jest $\varepsilon' - (v' + w')$ -krotną tworzącą powierzchni $\Gamma_{12}^{2\varepsilon'}$ i (ust. 11) zarazem $\varepsilon - (v + w)$ -krotną

sieczną krzywej C , przeto mamy $(\varepsilon - v - w)(\varepsilon' - v' - w')$ punktów przynależnych do prostej x_{12} i krzywej skośnej C . Podobnie mamy $(\varepsilon - w - u)(\varepsilon' - w' - u')$ punktów, leżących na prostej y_{12} i krzywej C , oraz $(\varepsilon - u - v)(\varepsilon' - u' - v')$ punktów, przynależnych do prostej z_{12} i krzywej C . Pozostałe dopiero punkty w liczbie

$$[8\varepsilon - 3(u + v + w)][2\varepsilon' - (u' + v' + w')]$$

są takimi punktami przecięcia się krzywej C z powierzchnią $\Gamma_{12}^{2\varepsilon'}$, które leżą na krzywej skośnej 3-go rzędu S_{12}^3 . Ponieważ jednak S_{12}^3 jest $2\varepsilon' - (u' + v' + w')$ -krotną krzywą powierzchni $\Gamma_{12}^{2\varepsilon'}$, przeto w każdym punkcie przecięcia się krzywych C i S_{12}^3 zjednoczyło się $2\varepsilon' - (u' + v' + w')$ punktów przecięcia się krzywej C z powierzchnią $\Gamma_{12}^{2\varepsilon'}$. Wnosimy stąd, że:

Jednobieżna krzywa skośna C rzędu $5\varepsilon - 2(u + v + w)$, leżąca na powierzchni krzywoliniowej Ψ^5 , przecina się z krzywą podwójną 3-go rzędu S_{12}^3 tej powierzchni w $8\varepsilon - 3(u + v + w)$ punktach.

13. W rozważaniach ust. 11-go i 12-go przyjmowaliśmy w wiązce (W) takie jednobieżne stożki Γ^* klasy ε , które nie były styczne do żadnej z ośmiu płaszczyzn σ^t ($t = 1, 2, \dots, 8$) tej wiązki, przechodzących odpow. przez proste $s_{012}^3 = \sigma^t \sigma_1^t \sigma_2^t$ powierzchni krzywoliniowej Ψ^5 .

Żałujemy teraz, iż dla jednobieżnego stożka Γ^* klasy ε płaszczyzny główne λ, μ i v wiązki (W) są płaszczyznami odpow. u, v , wzgl. w -krotnie-stycznymi, a płaszczyzny $\sigma^t = W s_{012}^3$ ($t = 1, \dots, 8$) tej wiązki są odpow. płaszczyznami q^t -krotnie-stycznymi. Liczby u, v, w i q^t spełniać muszą (ust. 11) oczywiście warunek

$$\frac{1}{2}u(u-1) + \frac{1}{2}v(v-1) + \frac{1}{2}w(w-1) + \sum_{t=1}^8 \frac{1}{2}q^t(q^t-1) \leq \frac{1}{2}(\varepsilon-1)(\varepsilon-2).$$

Płaszczyznom σ^t wiązki (W) podporządkowanych jest (ust. 1) w wiązce (W_1) ośm płaszczyzn $\sigma_1^t = W_1 s_{012}^3$, a każdy element σ_1^t jest (ust. 11) dla jednobieżnego stożka Γ_1^* klasy $\varepsilon = 2\varepsilon - (u + v + w)$ płaszczyzną q^t -krotnie-styczną. Podobnie każdej płaszczyźnie σ_1^t ($t = 1, \dots, 8$) wiązki (W_1) podporządkowane są w wiązkach $(W_2), (W_3^*), (W_4^*), \dots$, tworzących — ust. 6 relacja (6) — szeregi kolineacyjnych wiązek, płaszczyzny $\sigma_2^t, \sigma_3^{t*}, \sigma_4^{t*}, \dots$, a każda z nich jest odpow. dla jednobieżnego stożka $\Gamma_2^*, \Gamma_3^{t*}, \Gamma_4^{t*}, \dots$ płaszczyzną q^t -krotnie-styczną.

Z rozważań ust. 11-go wynika bezpośrednio, że:

Jednobieżna krzywa skośna C rzędu $5\varepsilon - 2(u + v + w)$, leżąca na powierzchni krzywoliniowej Ψ^5 , rozpada się na proste $s_{012}^3 = \sigma^t \sigma_1^t \sigma_2^t = \sigma^t \sigma_1^{t} \sigma_2^{t*}$ ($t = 1, 2, \dots, 8$), z których każda jest prostą q^t -krotną, oraz na krzywą skośną C_1 rzędu $5\varepsilon - 2(u + v + w) - \sum_{t=1}^8 q^t$.*

Korzystając z relacji (8) ust. 11-go, weźmy pod uwagę dwie dowolne trójki homologicznych płaszczyzn np. $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$ i β, β_1, β_2 stycznych odpow. do stożków $I^\varepsilon, I_1^\varepsilon$ i I_2^ε . Płaszczyzny te przecinają się w punktach $A = \alpha \alpha_1 \alpha_2$ i $B = \beta \beta_1 \beta_2$ krzywej skośnej C_i rzędu $5\varepsilon - (u + v + w) - \sum_{i=1}^8 q^i$. Skoro płaszczyzna α , pozostając stale styczną do stożka I^ε , zdążać będzie do położenia granicznego β , to równocześnie płaszczyzna α_1 , pozostając stale styczną do stożka I_1^ε , zdążać będzie do położenia granicznego β_1 , a płaszczyzna α_2 , pozostając stale styczną do stożka I_2^ε , zdążać będzie do położenia granicznego β_2 . Również i punkt $A = \alpha \alpha_1 \alpha_2$ krzywej skośnej C_i , pozostając stale punktem tej krzywej, zdążać będzie do położenia granicznego $B = \beta \beta_1 \beta_2$. Weźmy teraz pod uwagę trzy homologiczne płaszczyzny σ', σ_1' i σ_2' , styczne odpow. do stożków $I^\varepsilon, I_1^\varepsilon$ i I_2^ε , które przechodzą przez prostą $s_{012}^\varepsilon = \sigma' \sigma_1' \sigma_2'$. Skoro płaszczyzna α , pozostając stale styczną do I^ε , zdążać będzie do położenia granicznego σ' , to równocześnie płaszczyzna α_1 zdążać będzie do położenia granicznego σ_1' , a płaszczyzna α_2 do położenia granicznego σ_2' . Równocześnie punkt $A = \alpha \alpha_1 \alpha_2$, pozostając stale punktem krzywej C_i , zdążać będzie do położenia granicznego, który to punkt oznaczmy symbolem S . Oczywiście przez ów punkt S krzywej skośnej C_i przejdzie muszą trzy homologiczne płaszczyzny σ', σ_1' i σ_2' . Wnosimy stąd, iż ów punkt S krzywej C_i leży na prostej $s_{012}^\varepsilon = \sigma' \sigma_1' \sigma_2'$.

Z uwagi na to, iż każda z tych płaszczyzn $\sigma', \sigma_1', \sigma_2'$ jest odpow. płaszczyzną q' -krotnie-styczną do stożka $I^\varepsilon, I_1^\varepsilon, I_2^\varepsilon$, wzgl. I_2^ε , przeto na prostej s_{012}^ε leży q' punktów krzywej skośnej C_i . A zatem:

Skoro jednobieżna krzywa skośna C rzędu $5\varepsilon - 2(u + v + w)$, leżąca na powierzchni krzywoliniowej $\mathcal{W}^5$, rozpada się na proste s_{012}^ε ($i = 1, \dots, 8$), z których każda jest prostą q' -krotną, oraz na krzywą skośną C_i rzędu $5\varepsilon - 2(u + v + w) - \sum_{i=1}^8 q^i$, to wówczas: każda prosta s_{012}^ε jest q' -krotną sieczną krzywej C_i .

Z rozważań ust. 11-go wynika, iż

Proste x_{12}, y_{12} i z_{12} powierzchni krzywoliniowej $\mathcal{W}^5$ są odpow. $\varepsilon - (v + w)$, $\varepsilon - (w + u)$, wzgl. $\varepsilon - (u + v)$ -krotnymi siecznami badanej krzywej skośnej C_i .

Z zachowania się prostych s_{012}^ε względem stożkowej L^3 i krzywej płaskiej L^3 (ust. 10) i twierdzenia ust. 11-go wynika:

Krzywa skośna C_i rzędu $5\varepsilon - 2(u + v + w) - \sum_{i=1}^8 q^i$, leżąca na powierzchni $\mathcal{W}^5$, przecina się ze stożkowymi L^3, M^3 i N^3 tej powierzchni odpow. w u, v , wzgl. w punktach, a z ogólnymi krzywymi płaskimi 3-go rzędu L^3, M^3 i N^3 powierzchni $\mathcal{W}^5$ przecina się odpow. w $5\varepsilon - 3u - 2v - 2w - \sum_{i=1}^8 q^i$, $5\varepsilon - 2u - 3v - 2w - \sum_{i=1}^8 q^i$, wzgl. $5\varepsilon - 2u - 2v - 3w - \sum_{i=1}^8 q^i$ punktach.

Wiadomo nam, iż krzywe skośne C i S_{12}^3 przecinają się (ust. 12) w $8\varepsilon - 3(u + v + w)$ punktach. Ponieważ każda q' -krotna prosta s_{012}^ε jest dwusieczną krzywej S_{12}^3 , przeto na owych ośmiu prostych leży $\sum_{i=1}^8 2q^i$ punktów przecięcia się z krzywą S_{12}^3 . Pozostałe punkty w liczbie $8\varepsilon - 3(u + v + w) - \sum_{i=1}^8 2q^i$ należą do krzywych C_i i S_{12}^3 . A zatem:

Krzywa skośna C_i rzędu $5\varepsilon - 2(u + v + w) - \sum_{i=1}^8 q^i$, leżąca na powierzchni $\mathcal{W}^5$, przecina się z krzywą podwójną 3-go rzędu S_{12}^3 tej powierzchni w $8\varepsilon - 3(u + v + w) - \sum_{i=1}^8 2q^i$ punktach.

Skoro obok stożka I^ε , przyjmijmy w wiązce (W) drugi jednobieżny stożek $I^{\varepsilon'}$ klasy ε' , dla którego płaszczyzny główne λ, μ i ν są odpow. płaszczyznami u', v', w' -krotnie-stycznymi, a płaszczyzny $\sigma' (i = 1, \dots, 8)$ są płaszczyznami q' -krotnie-stycznymi, otrzymamy na powierzchni $\mathcal{W}^5$ leżącą krzywą skośną C_i rzędu $5\varepsilon' - 2(u' + v' + w') - \sum_{i=1}^8 q'^i$, dla której każda prosta s_{012}^ε jest q' -krotną sieczną. W ogólnym przypadku punkty krzywej C_i , leżące na q' -krotnej siecznej s_{012}^ε , są różne od punktów przecięcia się prostej s_{012}^ε z krzywą C_i .

W analogiczny sposób do rozważań ust. 12-go dowiedzimy prawdziwości twierdzenia:

Dwie dowolne krzywe skośne C_i rzędu $5\varepsilon - 2(u + v + w) - \sum_{i=1}^8 q^i$ i C_j rzędu $5\varepsilon' - 2(u' + v' + w') - \sum_{i=1}^8 q'^i$, leżące na powierzchni krzywoliniowej $\mathcal{W}^5$, przecinają się w $\varepsilon\varepsilon' - (uu' + vv' + ww') - \sum_{i=1}^8 q^i q'^i$ punktach.

14. W trzech ostatnich ustępach badaliśmy własności krzywych skośnych wyższych rzędów, które należą do powierzchni krzywoliniowej $\mathcal{W}^5$. Teraz zajmujemy się szczególnymi przypadkami tych krzywych.

Skoro przyjmijmy wartości: $\varepsilon = 1, u = v = w = q' = 0$, to — porównaj relacje (8) i (9) ust. 11-go — otrzymamy rzutowości pomiędzy pękami płaszczyzn

$$(8_1) \quad c(\alpha, \beta, \dots) \propto I_1^3(\alpha_1, \beta_1, \dots) \propto I_2^3(\alpha_2, \beta_2, \dots),$$

$$(9_1) \quad c(\alpha, \beta, \dots) \propto I_1^{**}(\alpha_1^*, \beta_1^*, \dots) \propto I_2^{**}(\alpha_2^*, \beta_2^*, \dots),$$

przyczem oś c jest dowolną prostą wiązki (W), a podstawami dalszych pęków są stożki 2-ej klasy, należące odpow. do wiązek (W_1), (W_2), (W_1^*), (W_2^*), ... Utworem tych pęków rzutowych jest (ust. 11 i 13) na powierzchni krzywoliniowej $\mathcal{W}^5$ leżąca:

jednobieżna krzywa skośna C^5 rzędu 5-go, klasy 9-ej, porządku 8-go,

która posiada 6 punktów podwójnych pozornych. Prosta c jest ¹⁾ sieczną czterokrotną krzywej C^5 .

Rzutowe pęki płaszczyzn

$$(I_1^2) \cap (I_2^2) \text{ wzgl. } (I_1^{*2}) \cap (I_2^{*2})$$

utworzą jednobieżną powierzchnię skośną I_{12}^4 stopnia 4-go i porządku 6-go, z krzywą podwójną S_{12}^3 , której tworzącymi są proste $a_{12} = a_1 a_2 = a_1^* a_2^*$, $b_{12} = \beta_1 \beta_2 = \beta_1^* \beta_2^*$,... Natomiast rzutowe pęki

$$(c) \cap (I_1^2), \quad (c) \cap (I_2^2), \quad (c) \cap (I_1^{*2}), \quad (c) \cap (I_2^{*2}), \dots$$

utworzą jednobieżne powierzchnie skośne 3-go stopnia i 4-go porządku I_{01}^3 , I_{02}^3 , I_{01}^{*3} , I_{02}^{*3} ,..., które posiadają wspólną *kierownicę podwójną* c . Tworzącymi tych powierzchni są proste: $a_{01} = a a_1, \dots$; $a_{02} = a a_2, \dots$; $a_{01}^* = a a_1^*, \dots$; $a_{02}^* = a a_2^*, \dots$;... Z relacji (8₁) i (9₁) wynikają wprost rzutowości

$$c(a, \dots) \cap I_{12}^4(a_{12}, \dots), \quad I_{01}^3(a_{01}, \dots) \cap I_{02}^3(a_{02}, \dots), \quad I_{02}^3(a_{02}, \dots) \cap I_{01}^3(a_{01}, \dots), \\ I_{01}^{*3}(a_{01}^*, \dots) \cap I_{02}^{*3}(a_{02}^*, \dots), \quad I_{02}^{*3}(a_{02}^*, \dots) \cap I_{01}^{*3}(a_{01}^*, \dots), \dots$$

a ich homologiczne elementy przecinają się w punktach: $A = a a_{12} = a_{01} a_2 = a_{02} a_1 = a_{01}^* a_2^* = a_{02}^* a_1^* = \dots = a a_1 a_2, \dots$ krzywej skośnej C^5 .

Z rozważań ust. 11-go wynika, że:

Przez jednobieżną krzywą skośną C^5 , leżącą na powierzchni krzywoliniowej Ψ^5 , przechodzą jednobieżne powierzchnie skośne I_{12}^4 , I_{01}^3 , I_{02}^3 , I_{01}^{*3} , I_{02}^{*3} ,... Dowolna płaszczyzna α pęku (c) przecina owe powierzchnie skośne 3-go stopnia w pęku prostych $A(a_{01}, a_{02}, a_{01}^*, a_{02}^*, \dots)$, którego wierzchołkiem jest punkt $A = a a_1 a_2 = a a_1^* a_2^* = \dots$ krzywej skośnej C^5 .

Oznaczmy przez $k_1, k_2, k_1^*, k_2^*, \dots$ pojedyncze kierownice wypisanych powyżej powierzchni skośnych 3-go stopnia i zbadaćmy zachowanie się tych kierownic względem krzywej skośnej C^5 . Niechaj kierownica np. k_1 powierzchni I_{01}^3 przetnie trzy tworzące b_{02}, c_{02} i d_{02} powierzchni I_{02}^3 w punktach B, C i D . Owe trzy tworzące przecinają oczywiście kierownicę podwójną c powierzchni I_{02}^3 . Skoro weźmiemy pod uwagę tworzącą np. b_{02} , to płaszczyzna $\beta = c b_{02}$ pęku (c) przetnie powierzchnię I_{01}^3 w tworzącą $b_{01} = \beta \beta_1$, która koniecznie przejść musi przez punkt $B = \beta k_1$ pojedynczej kierownicy k_1 tej powierzchni I_{01}^3 . Ponieważ przez punkt B przechodzą dwie tworzące b_{02} i b_{01} , przeto płaszczyzna $\beta = b_{01} b_{02}$ przecina wypisane powyżej powierzchnie skośne 3-go stopnia w pęku prostych $B(b_{01}, b_{02}, b_{01}^*, b_{02}^*, \dots)$, a wierzchołek B tego pęku jest punktem krzywej skośnej C^5 . — W podobny sposób wykazemy, iż dwa dal-

sze punkty C i D przebiecia się kierownicy k_1 z powierzchnią I_{02}^3 są również punktami krzywej C^5 . Wnosimy stąd, iż kierownica k_1 jest trójsieczną krzywej skośnej C^5 . A zatem:

Badana jednobieżna krzywa skośna C^5 , z jedną czterokrotną sieczną c , posiada nieskończenie wiele prostych trójsiecznych, którymi są pojedyncze kierownice $k_1, k_2, k_1^*, k_2^*, \dots$ jednobieżnych powierzchni skośnych $I_{01}^3, I_{02}^3, I_{01}^{*3}, I_{02}^{*3}, \dots$ stopnia 3-go; krzywa skośna C^5 należy zatem ¹⁾ do gatunku 1-go.

Z rozważań ust. 11-go i 12-go wynikają zależności:

Proste x_{12}, y_{12} i z_{12} powierzchni krzywoliniowej Ψ^5 są siecznami pojedynczymi krzywej C^5 . Krzywa skośna C^5 nie przecina się wcale ze stożkowymi L^2, M^2 i N^2 powierzchni Ψ^5 . Krzywa C^5 przecina w pięciu punktach każdą z trzech krzywych płaskich 3-go rzędu L^3, M^3 i N^3 powierzchni Ψ^5 . Krzywa skośna C^5 z krzywą podwójną 3-go rzędu S_{12}^3 powierzchni Ψ^5 przecina się w ośmiu punktach. Dwie dowolne krzywe skośne C^5 i C'^5 , leżące na powierzchni Ψ^5 , przecinają się w jednym i tylko jednym punkcie.

W dotychczasowych rozważaniach tego ustępu prosta c wiązki (W) miała położenie dowolne. Załóżmy teraz, iż c przecina krzywą skośną S_{12}^3 w punkcie W_1^* . Z relacji (9₁) wynika, iż w miejsce powierzchni skośnej I_{01}^{*3} otrzymamy w tym przypadku jednobieżny stożek 3-go rzędu i 4-ej klasy, którego wierzchołkiem jest punkt W_1^* a tworzącą podwójną prosta c . Pomiedzy tworzącymi tego stożka i płaszczyznami stycznymi stożka I_{02}^{*3} zachodzi rzutowość, której utworem jest krzywa skośna C^5 , posiadająca ²⁾ punkt podwójny W_1^* i pięć punktów pozornie-podwójnych.

Niechaj prosta c będzie jedyną dwusieczną krzywej S_{12}^3 , przechodzącą przez wierzchołek wiązki (W). Skoro W_1^* i W_2^* są punktami przecięcia się dwusiecznej c z krzywą S_{12}^3 , to zamiast powierzchni skośnych I_{01}^{*3} i I_{02}^{*3} otrzymamy dwie powierzchnie stożkowe 3-go rzędu a badana krzywa skośna C^5 posiadać będzie wówczas dwa punkty podwójne W_1^*, W_2^* i cztery punkty pozornie-podwójne.

15. Przez wierzchołek wiązki (W) poprowadźmy taką oś c pęku płaszczyzn (c), która przecina jedną z ośmiu prostych $s_{012}^3 = \sigma' \sigma' \sigma_2^*$ powierzchni Ψ^5 , np. prostą s_{012}^3 . Wówczas — dla $\varepsilon = q' = 1, u = v = w = q' = 0, i = 2, \dots, 8$ — jednobieżna krzywa skośna C^5 rzędu 5-go i gatunku 1-go (ust. 14) rozpadnie się (ust. 13) na prostą s_{012}^3 i na krzywą skośną 4-go rzędu C^4 , dla której s_{012}^3 jest sieczną pojedynczą. Przez zniekształconą C^5 przechodzi (ust. 14) powierzch-

¹⁾ Dr. Anton Plamitzer, l. c. (II. Mitteilung) Nr. 41.

¹⁾ E. Pascal (tłum. S. Dickstein), Repertorium matematyki wyższej. Tom II. Geometria str. 321, Warszawa 1901.

²⁾ Dr. Anton Plamitzer, l. c. (II. Mitteilung) Nr. 30.

nia F_{12}^4 , a cztery punkty przecięcia się osi c z F_{12}^4 są punktami tej krzywej. Ponieważ jeden z tych czterech punktów leży na tworzącej $s_{012}^1 = \sigma_1^1 \sigma_2^1$ powierzchni F_{12}^4 , przeto trzy dalsze punkty należą do krzywej C_1^4 . Krzywa skośna 4-go rzędu C_1^4 posiada *trójsieczną* c i należy wobec tego do *gatunku 2-go*.

Z rozważań ust. 13-go wynika bezpośrednio:

Proste x_{12} , y_{12} , z_{12} i s_{012}^1 powierzchni $\mathcal{W}^5$ są *siecznami pojedynczymi* krzywej C_1^4 . Krzywa skośna C_1^4 nie przecina się wcale ani z prostymi s_{012}^1 ($i = 2, \dots, 8$), ani ze stożkowymi L^3 , M^3 i N^3 powierzchni $\mathcal{W}^5$. Natomiast krzywa C_1^4 przecina w *czterech* punktach każdą z trzech krzywych płaskich 3-go rzędu L^3 , M^3 i N^3 powierzchni $\mathcal{W}^5$, oraz przecina w *sześciu* punktach krzywą podwójną S_{12}^3 tej powierzchni. Dwie dowolne krzywe skośne C_1^4 i C_1^4 , leżące na powierzchni $\mathcal{W}^5$ i posiadające wspólną sieczną s_{012}^1 , nie przecinają się wcale. Natomiast takie dwie krzywe C_1^4 i C_1^4 , które nie posiadają wspólnej siecznej s_{012}^1 , przecinają się w *jednym* punkcie.

Niechaj oś c przecina dwie z pośród ośmiu prostych $s_{012}^1 = \sigma^i \sigma_j^i$ powierzchni $\mathcal{W}^5$, np. s_{012}^1 i s_{012}^1 . Wówczas — dla $\varepsilon = q^1 = q^2 = 1$, $u = v = w = 0$, $i = 3, 4, \dots, 8$ — jednobieżna krzywa skośna C^5 rzędu 5-go i gatunku 1-go rozpada się (ust. 13) na dwie proste s_{012}^1 i s_{012}^1 , oraz na *krzywą skośną 3-go rzędu* C_2^3 dla której proste s_{012}^1 i s_{012}^1 , jak również i proste x_{12} , y_{12} i z_{12} powierzchni $\mathcal{W}^5$ są *siecznami pojedynczymi*. Krzywa C_2^3 nie przecina wcale stożkowych L^3 , M^3 i N^3 , natomiast przecina w *trzech* punktach każdą z trzech krzywych płaskich L^3 , M^3 i N^3 powierzchni $\mathcal{W}^5$, oraz przecina w *czterech* punktach krzywą skośną S_{12}^3 tej powierzchni. Dwie dowolne krzywe skośne C_2^3 i C_2^3 , leżące na powierzchni $\mathcal{W}^5$, mogą (oprócz siecznych x_{12} , y_{12} i z_{12}) posiadać co najmniej jedną wspólną sieczną pojedynczą s_{012}^1 . W tym przypadku krzywe C_2^3 i C_2^3 nie przecinają się wcale. Natomiast takie dwie krzywe C_2^3 i C_2^3 , dla których żadna z ośmiu prostych s_{012}^1 nie jest wspólną sieczną, przecinają się (ust. 13) w *jednym* punkcie.

Przez wierzchołek wiązki (W) poprowadźmy teraz taką prostą c , która leży na płaszczyźnie głównej np. λ tej wiązki i nie przecina żadnej z ośmiu prostych s_{012}^1 . Wówczas (ust. 11) dla wartości $\varepsilon = u = 1$, $v = w = q^i = 0$ otrzymamy na powierzchni $\mathcal{W}^5$ leżącą jednobieżną *krzywą skośną 3-go rzędu* C_2^3 dla której prosta x_{12} jest *sieczną pojedynczą*. Krzywa C_2^3 nie przecina wcale ani prostych y_{12} , z_{12} i s_{012}^1 , ani stożkowych M^3 i N^3 powierzchni $\mathcal{W}^5$. Krzywa ta przecina natomiast stożkową L^3 w *jednym* punkcie, krzywą płaską L^3 w *dwóch* punktach, każdą z krzywych płaskich M^3 i N^3 w *trzech* punktach, a krzywą skośną S_{12}^3 (ust. 12) w *pięciu* punktach.

Skoro prosta c leżeć będzie na płaszczyźnie głównej μ lub ν wiązki (W), to otrzymamy krzywe skośne 3-go rzędu C_μ^3 i C_ν^3 . Krzywa C_μ^3 (wzgl. C_ν^3) nie przecina wcale ani prostych s_{012}^1 , z_{12} i x_{12} (wzgl. s_{012}^1 , x_{12} i y_{12}), ani stożko-

wych N^3 i L^3 (wzgl. L^3 i M^3). Krzywa C_μ^3 (wzgl. C_ν^3) przecina natomiast prostą y_{12} (wzgl. z_{12}) w *jednym* punkcie, stożkową M^3 (wzgl. N^3) w *jednym* punkcie, krzywą płaską M^3 (wzgl. N^3) w *dwóch* punktach, każdą z krzywych N^3 i L^3 (wzgl. L^3 i M^3) w *trzech* punktach, a krzywą skośną S_{12}^3 w *pięciu* punktach. — Dwie dowolne krzywe skośne 3-go rzędu C_μ^3 i C_ν^3 , lub C_μ^3 i C_μ^3 , lub C_ν^3 i C_ν^3 nie przecinają się wcale (ust. 12); natomiast każde dwie krzywe C_μ^3 i C_ν^3 lub C_μ^3 i C_μ^3 , lub C_ν^3 i C_ν^3 przecinają się (ust. 12) w *jednym* punkcie.

Gdybyśmy za oś pęku płaszczyzn (c) przyjęli taką prostą c , któraby przynależała do dwóch płaszczyzn głównych np. λ i μ , t. zn. zjednoczyłaby się z prostą główną $z = \lambda\mu$ wiązki (W), to wówczas — dla $\varepsilon = u = v = 1$, $w = q^i = 0$ — w miejsce krzywej skośnej wystąpiłaby (ust. 11) prosta $z_{12} = \zeta_{12}^3$, gdyż pękwowi płaszczyzn (z) podporządkowane są płaszczyzny główne ζ_1 i ζ_2 w wiązkach (W_1) i (W_2).

Załóżmy wkońcu, iż osią pęku płaszczyzn (c) jest taka prosta c , która leży na płaszczyźnie głównej np. λ wiązki (W) i równocześnie *przecina* jedną np. s_{012}^1 z ośmiu prostych s_{012}^1 powierzchni krzywoliniowej $\mathcal{W}^5$. W tym przypadku — dla $\varepsilon = u = q^1 = 1$, $v = w = q^i = 0$, $i = 2, 3, \dots, 8$ — otrzymana poprzednio krzywa skośna 3-go rzędu C_2^3 rozpada się (ust. 13) na prostą s_{012}^1 i na *stożkową* C_2^3 dla której dwie proste s_{012}^1 i x_{12} są *siecznami pojedynczymi*. Stożkowa C_2^3 nie przecina wcale ani prostych y_{12} , z_{12} i s_{012}^1 ($i = 2, 3, \dots, 8$), ani stożkowych M^3 i N^3 powierzchni $\mathcal{W}^5$. Stożkowa C_2^3 przecina natomiast stożkową L^3 w *jednym* punkcie, krzywą płaską L^3 w *jednym* punkcie, każdą z krzywych płaskich M^3 i N^3 w *dwóch* punktach, a krzywą skośną S_{12}^3 w *trzech* punktach. Takich stożkowych C_2^3 leżących na powierzchni krzywoliniowej $\mathcal{W}^5$, mamy oczywiście *ośm*, przyczem żadne dwie (ust. 13) nie przecinają się.

Skoro prosta c leżeć będzie na płaszczyźnie głównej μ lub ν wiązki (W) i równocześnie przecinać będzie jedną np. s_{012}^1 z ośmiu prostych s_{012}^1 , to analogicznie otrzymamy stożkowe C_μ^2 i C_ν^2 .

Stożkowa C_μ^2 dla której dwie proste s_{012}^1 i y_{12} są *siecznami pojedynczymi*, nie przecina wcale ani prostych z_{12} , x_{12} i s_{012}^1 ($i = 2, \dots, 8$), ani stożkowych N^3 i L^3 . Stożkowa C_μ^2 przecina natomiast stożkową M^3 w *jednym* punkcie, krzywą M^3 w *jednym* punkcie, każdą z krzywych N^3 i L^3 w *dwóch* punktach, a krzywą skośną S_{12}^3 w *trzech* punktach. Takich stożkowych C_μ^2 na powierzchni $\mathcal{W}^5$ mamy *ośm*, przyczem żadne dwie nie przecinają się.

Stożkowa C_ν^2 dla której dwie proste s_{012}^1 i z_{12} są *siecznami pojedynczymi*, nie przecina wcale ani prostych x_{12} , y_{12} i s_{012}^1 ($i = 2, \dots, 8$), ani stożkowych L^3 i M^3 . Stożkowa C_ν^2 przecina natomiast stożkową N^3 w *jednym* punkcie, krzywą N^3 w *jednym* punkcie, każdą z krzywych L^3 i M^3 w *dwóch* punktach, a krzywą skośną S_{12}^3 w *trzech* punktach. Takich stożkowych C_ν^2

mamy na powierzchni $\mathcal{W}^5$ również *ośm*, przyczem żadne dwie nie przecinają się.

Skoro weźmiemy pod uwagę dwie stożkowe C_λ^2 i C_μ^2 , albo C_α^2 i C_ν^2 , albo C_σ^2 i C_τ^2 , to mogą być spełnione warunki: a) owe dwie stożkowe posiadają *wspólną sieczną pojedynczą* s_{012}^2 , b) owe dwie stożkowe *nie* posiadają wspólnej siecznej s_{012}^2 . Z ostatniego twierdzenia ust. 13-go wynika bezpośrednio, iż w przypadku: a) owe dwie stożkowe *nie przecinają się* wcale, b) owe dwie stożkowe *przecinają się* w jednym punkcie.

16. W wiązce (W) niechaj dany będzie stożek 2-ej klasy Γ^2 , styczny do trzech płaszczyzn głównych λ , μ i ν tej wiązki. Skoro założymy, iż żadna z ośmiu płaszczyzn $\sigma' = Ws_{012}^4$ nie jest styczna do stożka Γ^2 , to po uwzględnieniu wartości $\varepsilon = 2$, $u = v = w = 1$, $q' = 0$, $\iota = 1, 2, \dots, 8$, otrzymamy (ust. 11) jednobieżną krzywą skośną C^4 rzędu 4-go, klasy 6-ej i porządku 6-go, z trzema punktami pozornie-podwójnymi. Krzywa C^4 należy zatem do *gatunku 2-go*.

Z ust. 11-go i 12-go wynikają zależności:

Krzywa C^4 nie przecina wcale prostych x_{12} , y_{12} , z_{12} i s_{012}^4 powierzchni $\mathcal{W}^5$, przecina w *jednym* punkcie każdą z trzech stożkowych L^2 , M^2 i N^2 , przecina w trzech punktach każdą z trzech krzywych płaskich L^3 , M^3 i N^3 , oraz przecina w *siedmiu* punktach krzywą skośną S_{12}^3 powierzchni $\mathcal{W}^5$. Dwie dowolne krzywe skośne C^4 i C'^4 , leżące na powierzchni $\mathcal{W}^5$, przecinają się w *jednym* punkcie.

Skoro płaszczyzny główne λ , μ , ν i jedna z ośmiu płaszczyzn $\sigma' = Ws_{012}^4$, np. płaszczyzna σ^1 , wiązki (W) będą styczne do stożka Γ^2 , to — dla $\varepsilon = 2$, $u = v = w = q^1 = 1$, $q' = 0$, $\iota = 2, \dots, 8$ — jednobieżna krzywa skośna C^4 rozpadnie się (ust. 13) na prostą s_{012}^4 i na krzywą skośną 3-go rzędu C_2^3 , dla której prosta s_{012}^4 jest *sieczną pojedynczą*. Krzywa skośna C_2^3 nie przecina wcale prostych x_{12} , y_{12} , z_{12} i s_{012}^4 ($\iota = 2, \dots, 8$) powierzchni $\mathcal{W}^5$, natomiast przecina w *jednym* punkcie każdą z trzech stożkowych L^2 , M^2 i N^2 , przecina w *dwóch* punktach każdą z trzech krzywych płaskich L^3 , M^3 i N^3 , oraz przecina w *pięciu* punktach krzywą skośną S_{12}^3 powierzchni $\mathcal{W}^5$. Dwie krzywe skośne C_2^3 i $C_2'^3$, leżące na powierzchni krzywoliniowej $\mathcal{W}^5$ i posiadające wspólną sieczną s_{012}^4 , nie przecinają się wcale. Natomiast takie dwie krzywe C_2^3 i $C_2'^3$, które nie posiadają wspólnej siecznej s_{012}^4 , przecinają się w *jednym* punkcie.

Założmy teraz, iż płaszczyzny główne λ , μ i ν wiązki (W), oraz dwie z pośród ośmiu płaszczyzn $\sigma'_{012} = Ws_{012}^4$, np. płaszczyzny σ_{012}^1 i σ_{012}^2 , są płaszczyznami stycznymi stożka Γ^2 . Wówczas — dla $\varepsilon = 2$, $u = v = w = q^1 = q^2 = 1$, $q' = 0$, $\iota = 3, 4, \dots, 8$ — jednobieżna krzywa skośna C^4 rozpada się (ust. 13) na dwie proste s_{012}^4 , s_{012}^5 i na stożkową C^2 , dla której dwie proste

s_{012}^1 i s_{012}^2 są *siecznami pojedynczymi*. Stożkowa C^2 nie przecina wcale prostych x_{12} , y_{12} , z_{12} i s_{012}^4 ($\iota = 3, 4, \dots, 8$), natomiast przecina w *jednym* punkcie każdą z trzech stożkowych L^2 , M^2 i N^2 , oraz każdą z trzech krzywych płaskich L^3 , M^3 i N^3 , przecina w *trzech* punktach krzywą skośną S_{12}^3 powierzchni $\mathcal{W}^5$.

Takich stożkowych C^2 , leżących na powierzchni krzywoliniowej $\mathcal{W}^5$, mamy oczywiście 28. Skoro weźmiemy pod uwagę dwie stożkowe, to mogą być spełnione warunki: a) owe dwie stożkowe posiadają *wspólną sieczną pojedynczą* s_{012}^4 , b) owe dwie stożkowe *nie* posiadają wspólnej siecznej s_{012}^4 .

Z ostatniego twierdzenia ust. 13-go wynika, iż owe dwie stożkowe w przypadku: a) nie przecinają się wcale, b) przecinają się w *jednym* punkcie.

Wkońcu zbadać należy zachowanie się dowolnej stożkowej C^2 względem (ust. 15) stożkowych C_λ^2 , C_μ^2 i C_ν^2 , leżących na powierzchni $\mathcal{W}^5$. Dla stożkowej C^2 niechaj proste s_{012}^4 i s_{012}^5 są siecznami pojedynczymi, a dla stożkowej np. C_λ^2 jej siecznami są (ust. 15) prosta x_{12} i jedna z ośmiu prostych s_{012}^4 . Dla owych dwóch stożkowych C^2 i C_λ^2 mogą być zatem spełnione następujące warunki: a) owe stożkowe posiadają *wspólną sieczną* np. s_{012}^4 , b) owe stożkowe *nie* posiadają wspólnej siecznej s_{012}^4 . Na podstawie ostatniego twierdzenia ust. 13-go wnosimy, iż owe stożkowe w przypadku: a) nie przecinają się wcale, b) przecinają się w *jednym* punkcie.

17. Z dotychczasowych rozważań naszych wynika, iż do badanej powierzchni krzywoliniowej $\mathcal{W}^5$ należy 55 stożkowych, a mianowicie:

- 1° trzy stożkowe L^2 , M^2 i N^2 (ust. 10),
- 2° ośm stożkowych C_λ^2 , ośm C_μ^2 i ośm C_ν^2 (ust. 15),
- 3° dwadzieścia ośm stożkowych C^2 (ust. 16).

Wykazaliśmy zarazem prawdziwość twierdzeń:

Każda z 55-ciu stożkowych powierzchni krzywoliniowej $\mathcal{W}^5$ przecina się w trzech punktach z podwójną krzywą skośną S_{12}^3 tej powierzchni.

*Każde dwie — z pośród 11-u prostych — powierzchni $\mathcal{W}^5$ są siecznami pojedynczymi jednej i tylko jednej stożkowej tej powierzchni, przyczem owe stożkowa nie przecina wcale 9-ciu dalszych prostych powierzchni $\mathcal{W}^5$. Każde dwie stożkowe, dla których jedna z prostych powierzchni $\mathcal{W}^5$ jest *wspólną sieczną*, nie przecinają się. Każde dwie stożkowe, dla których żadna z 11-u prostych powierzchni $\mathcal{W}^5$ nie jest *wspólną sieczną*, przecinają się w *jednym* punkcie.*

Z jedenastu prostych x_{12} , y_{12} , z_{12} i s_{012}^4 ($\iota = 1, \dots, 8$) powierzchni $\mathcal{W}^5$ utworzyć możemy $\binom{11}{3} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 165$ trójek prostych. Z pośród owych 165-u możliwych trójek weźmy pod uwagę jedną dowolną trójkę prostych

i oznaczmy owe proste symbolami x_{12}^0, y_{12}^0 i z_{12}^0 . Ponieważ — na mocy poprzedniego twierdzenia — każde dwie proste powierzchni $\mathcal{W}^5$ są sieczniami jednej i tylko jednej stożkowej, leżącej na powierzchni $\mathcal{W}^5$, przeto niechaj: proste y_{12}^0 i z_{12}^0 są sieczniami stożkowej, którą oznaczmy symbolem L_0^2 , proste zaś x_{12}^0 i z_{12}^0 są sieczniami stożkowej M_0^2 , a proste x_{12}^0 i y_{12}^0 sieczniami stożkowej N_0^2 . Dla dowolnej trójki prostych x_{12}^0, y_{12}^0 i z_{12}^0 powierzchni $\mathcal{W}^5$ otrzymaliśmy w ten sposób — na powierzchni $\mathcal{W}^5$ leżącą — trójkę stożkowych L_0^2, M_0^2 i N_0^2 , przy czym żadne dwie stożkowe owej trójki nie przecinają się weale. W szczególnym przypadku, dla trójki prostych x_{12}, y_{12} i z_{12} otrzymamy (ust. 10) trójkę stożkowych L^2, M^2 i N^2 , które leżą odpow. na płaszczyznach głównych λ, μ i ν wiązki (W).

W ust. 10-ym dowiedliśmy, iż punkt $W = \lambda\mu\nu$ jest osobliwym punktem pojedynczym powierzchni $\mathcal{W}^5$. Teraz dowiedzimy prawdziwości twierdzeń:

Skoro trzy pary prostych, stanowiących dowolną trójkę prostych powierzchni krzywoliniowej $\mathcal{W}^5$, są odpow. sieczniami trzech stożkowych tej powierzchni, to punkt przecięcia się płaszczyzn tych stożkowych jest osobliwym punktem pojedynczym owej powierzchni $\mathcal{W}^5$.

Powierzchnia krzywoliniowa $\mathcal{W}^5$ posiada 165 takich osobliwych punktów pojedynczych, przy czym żaden z nich nie leży na podwójnej krzywej skośnej S_{12}^3 tej powierzchni.

W tym celu obok trójki prostych $x_{12}^0, y_{12}^0, z_{12}^0$ i trójki stożkowych L_0^2, M_0^2, N_0^2 , przynależnych do powierzchni $\mathcal{W}^5$, weźmy pod uwagę jeszcze jedną z dalszych ośmiu prostych, np. prostą s^0 powierzchni $\mathcal{W}^5$. Dla kolineacyjnych wiązek

$$(1^0) \quad (W_1) \propto (W_2),$$

które spełniają relację (6) ust. 6-go i należą do „szeregu wiązek kolineacyjnych“, elementami homologicznymi są płaszczyzny $\xi_1^0 = W_1 x_{12}^0$ i $\xi_2^0 = W_2 x_{12}^0$, $\eta_1^0 = W_1 y_{12}^0$ i $\eta_2^0 = W_2 y_{12}^0$, $\zeta_1^0 = W_1 z_{12}^0$ i $\zeta_2^0 = W_2 z_{12}^0$, $\sigma_1^0 = W_1 s^0$ i $\sigma_2^0 = W_2 s^0$, oraz proste $\tau_1^0 = \eta_1^0 \zeta_1^0$ i $\tau_2^0 = \eta_2^0 \zeta_2^0$, $m_1^0 = \xi_1^0 \zeta_1^0$ i $m_2^0 = \xi_2^0 \zeta_2^0$, $n_1^0 = \xi_1^0 \eta_1^0$ i $n_2^0 = \xi_2^0 \eta_2^0$.

Stożkowe L_0^2, M_0^2 i N_0^2 uważanej trójki niechaj leżą odpow. na płaszczyznach λ_0, μ_0 i ν_0 , przechodzących przez punkt $W_0 = \lambda_0 \mu_0 \nu_0$. Pomiedzy płaszczyznami wiązek (W_0) i (W_1) ustanówmy ogólne przekształcenie kwadratowe

$$(2^0) \quad (W_0) \pi^2 (W_1),$$

które wyznaczone jest za pośrednictwem płaszczyzn głównych λ_0, μ_0, ν_0 i $\xi_1^0, \eta_1^0, \zeta_1^0$, oraz pary płaszczyzn homologicznych $\sigma_0 = W_0 s^0$ i $\sigma_1^0 = W_1 s^0$. Proste $x_0 = \mu_0 \nu_0$, $y_0 = \nu_0 \lambda_0$ i $z_0 = \lambda_0 \mu_0$ wiązki (W_0), oraz proste $\tau_1^0 = \eta_1^0 \zeta_1^0$, $m_1^0 = \xi_1^0 \zeta_1^0$ i $n_1^0 = \xi_1^0 \eta_1^0$ wiązki (W_1) są prostymi głównymi dla tego przekształcenia. — Z zależności geometrycznych (1⁰) i (2⁰) wynika bezpośrednio przekształcenie kwadratowe

$$(3^0) \quad (W_0) \pi^2 (W_2)$$

między płaszczyznami wiązek (W_0) i (W_2), przy czym płaszczyzny $\xi_2^0, \eta_2^0, \zeta_2^0$ i proste $\tau_2^0 = \eta_2^0 \zeta_2^0$, $m_2^0 = \xi_2^0 \zeta_2^0$, $n_2^0 = \xi_2^0 \eta_2^0$ są elementami głównymi wiązki (W_2).

Utworem trzech wiązek, spełniających relacje (1⁰), (2⁰) i (3⁰), jest (ust. 4) powierzchnia krzywoliniowa 5-go rzędu $\mathcal{W}_0^5$, z podwójną krzywą skośną 3-go rzędu S_{12}^3 . Na powierzchni $\mathcal{W}_0^5$ leżą proste $x_{12}^0, y_{12}^0, z_{12}^0$ i s^0 oraz siedm dalszych prostych. Zbadajmy zachowanie się skonstruowanej w ten sposób powierzchni $\mathcal{W}_0^5$ względem poprzednio rozważanej powierzchni $\mathcal{W}^5$.

Stożkowa L_0^2 powierzchni $\mathcal{W}^5$, leżąca na płaszczyźnie $\lambda_0 = y_0 z_0$, przechodzi przez trzy punkty E, F i G przecięcia się λ_0 z krzywą S_{12}^3 , oraz przez dwa punkty przecięcia się λ_0 z prostymi y_{12}^0 i z_{12}^0 . Płaszczyzna λ_0 , jako płaszczyzna główna wiązki (W_0), przecina powierzchnię $\mathcal{W}_0^5$ w krzywej 5-go rzędu, która rozpada się (ust. 10) na stożkową K^2 i ogólną krzywą 3-go rzędu L_0^3 . Stożkowa K^2 przechodzi jednak (ust. 10) przez trzy punkty przecięcia się elementu λ z krzywą podwójną powierzchni $\mathcal{W}_0^5$, t. zn. z krzywą S_{12}^3 , oraz przez dwa punkty przebicia się płaszczyzny $\lambda_0 = y_0 z_0$ z prostymi y_{12}^0 i z_{12}^0 powierzchni $\mathcal{W}_0^5$. Wnosimy stąd, iż stożkowa K^2 jest identyczna ze stożkową L_0^2 . Innymi słowy: stożkowa L_0^2 , leżąca na λ_0 , należy do obydwu powierzchni $\mathcal{W}^5$ i $\mathcal{W}_0^5$. Analogicznie wykazać możemy, iż stożkowe M_0^2 i N_0^2 , z których pierwsza leży na płaszczyźnie μ_0 a druga na ν_0 , należą też do obydwu powierzchni $\mathcal{W}^5$ i $\mathcal{W}_0^5$.

Ogólna krzywa 3-go rzędu L_0^3 , należąca do płaszczyzny głównej $\lambda_0 = y_0 z_0$ wiązki (W_0) i do powierzchni $\mathcal{W}_0^5$, przecina się z podwójną krzywą skośną S_{12}^3 tej powierzchni (ust. 10) w trzech punktach E, F i G , przechodzi przez cztery punkty 1, 2, 3, 4 przecięcia się stożkowych M_0^2 i N_0^2 z płaszczyzną λ_0 i przez wierzchołek W_0 wiązki (W_0). Krzywa L_0^3 nie przecina się weale z prostymi y_{12}^0 i z_{12}^0 (t. zn. sieczniami stożkowej L_0^2), natomiast przecina proste $x_{12}^0 = \xi_1^0 \xi_2^0$ i $s^0 = \sigma_0 \sigma_1^0$ w punktach $X = \lambda_0 x_{12}^0$, $S = \lambda_0 s^0$, oraz przecina siedm dalszych prostych powierzchni $\mathcal{W}_0^5$.

W rozważaniach naszych prosta s^0 , różna od prostych x_{12}^0, y_{12}^0 i z_{12}^0 , była jedną z ośmiu dalszych prostych powierzchni $\mathcal{W}^5$. Jeżeli zamiast s^0 weźmiemy pod uwagę inną z owych ośmiu prostych, np. prostą s^* , to w relacji (2⁰) i (3⁰) w miejsce płaszczyzn $\sigma_0 = W_0 s^0$, $\sigma_1^0 = W_1 s^0$ i $\sigma_2^0 = W_2 s^0$ wystąpią płaszczyzny $\sigma_* = W_0 s^*$, $\sigma_1^* = W_1 s^*$ i $\sigma_2^* = W_2 s^*$. Otrzymamy teraz, zamiast $\mathcal{W}_0^5$, nową powierzchnię krzywoliniową 5-go rzędu $\mathcal{W}_*^5$ z krzywą podwójną S_{12}^3 . Na powierzchni 5-go rzędu $\mathcal{W}_*^5$ leżą proste $x_{12}^0, y_{12}^0, z_{12}^0$ i s^* , siedm dalszych prostych, oraz — jak to z powyżej przeprowadzonego rozumowania wynika — trzy stożkowe L_0^2, M_0^2 i N_0^2 .

Płaszczyzna główna $\lambda_0 = y_0 z_0$ wiązki (W_0) przecina powierzchnię $\mathcal{W}_*^5$ w stożkowej L_0^2 i w ogólnej krzywej 3-go rzędu L_*^3 , która przechodzi (ust. 10) przez trzy punkty E, F i G krzywej skośnej S_{12}^3 , przez cztery punkty 1, 2 i 3, 4

przecięcia się stożkowych M_0^3 i N_0^3 z płaszczyzną λ_0 , przez wierzchołek W_0 wiązki (W_0), oraz przez punkty $X = \lambda_0 x_{12}^0$ i $S^* = \lambda_0 s^*$.

Krzywe L_0^3 i L_0^3 , leżące na płaszczyźnie λ_0 , przecinają się zatem w dziewięciu punktach $E, F, G, 1, 2, 3, 4, X$ i W_0 . Wszystkie krzywe 3-go rzędu, przechodzące przez którekolwiek ośm z tych dziewięciu punktów, przechodzą — jak wiadomo — również i przez punkt dziewiąty, tworząc pęk krzywych.

Płaszczyzna λ_0 przecina powierzchnię Ψ^5 w krzywej 5-go rzędu, która rozpada się na stożkową L_0^2 (w myśl założeń tego ustępu) i na krzywą 3-go rzędu K^3 . Obydwie krzywe L_0^2 i K^3 przechodzą przez trzy punkty E, F i G przecięcia się λ_0 z krzywą S_{12}^3 . Ponieważ L_0^2 przecina tylko proste y_{12}^0 i z_{12}^0 w punktach pojedynczych powierzchni Ψ^5 , przeto krzywa K^3 przecina proste x_{12}^0 , s^0 i s^* powierzchni Ψ^5 odpow. w punktach $X = \lambda_0 x_{12}^0$, $S = \lambda_0 s^0$ i $S^* = \lambda_0 s^*$, oraz sześć dalszych prostych tej powierzchni. Krzywa K^3 przechodzi również przez punkty $1, 2$ i $3, 4$ przecięcia się płaszczyzny λ_0 ze stożkowymi M_0^3 i N_0^3 powierzchni Ψ^5 . Ponieważ uzyskana krzywa przekroju K^3 przechodzi przez ośm punktów podstawowych $E, F, G, 1, 2, 3, 4$ i X skonstruowanego poprzednio pęku krzywych 3-go rzędu ($L_0^3, L_0^3, \dots$), przeto koniecznie przejść musi i przez *dziewiąty* punkt podstawowy tego pęku, t. zn. przez W_0 . Punkt W_0 leży na krzywej K^3 , t. zn. krzywej przekroju powierzchni Ψ^5 płaszczyzną λ_0 , jest więc punktem powierzchni Ψ^5 . W punkcie $W_0 = \lambda_0 \mu_0 \nu_0$ powierzchni krzywolinijowej Ψ^5 przecinają się trzy płaszczyzny λ_0, μ_0 i ν_0 , na których leżą odpow. stożkowe L_0^3, M_0^3 i N_0^3 powierzchni Ψ^5 . Element W_0 jest tedy *osobliwym punktem pojedynczym* powierzchni Ψ^5 , c. b. d. o.

Krzywe K^3 i L_0^3 posiadają jednak nie tylko dziewięć wspólnych punktów $E, F, G, 1, 2, 3, 4, X$ i W_0 , ale również i dziesiąty wspólny punkt $S = \lambda_0 s^0$ (przecięcia się λ_0 z prostą s^0 , leżącą na powierzchniach Ψ^5 i Ψ_0^5), przeto są identyczne $K^3 = L_0^3$. Podobnie krzywe K^3 i L_0^3 są identyczne, gdyż — oprócz owych dziewięciu punktów — posiadają i dziesiąty wspólny punkt $S^* = \lambda_0 s^*$. Wykazaliśmy tedy, iż krzywa L_0^3 , leżąca na płaszczyźnie głównej λ_0 wiązki (W_0) należy równocześnie do trzech powierzchni Ψ^5, Ψ_0^5 i Ψ_0^5 . — W analogiczny sposób wykazać możemy, iż krzywe M_0^3 i N_0^3 rzędu 3-go, leżące odpow. na płaszczyznach głównych μ_0 i ν_0 wiązki (W_0), należą do powierzchni Ψ^5 i równocześnie do powierzchni Ψ_0^5 (wzgl. Ψ_0^5).

Płaszczyzna λ_0 wiązki (W_0) przecina zatem powierzchnię Ψ^5 w stożkowej L_0^2 i krzywej L_0^3 , a ponieważ L_0^2 była dowolną stożkową powierzchni Ψ^5 , przeto:

Każda płaszczyzna, na której leży jedna z 55-ciu stożkowych powierzchni krzywolinijowej Ψ^5 , przecina tę powierzchnię jeszcze w ogólnej krzywej 3-go rzędu.

Z dotychczasowych rozważań tego ustępu wynika, iż obiedwie powierzchnie Ψ^5 i Ψ_0^5 posiadają następujące elementy wspólne: a) trzy stożkowe L_0^2, M_0^3 i N_0^3

b) trzy krzywe 3-go rzędu L_0^3, M_0^3 i N_0^3 , c) cztery proste $x_{12}^0, y_{12}^0, z_{12}^0$ i s^0 , oraz d) podwójną krzywą skośną 3-go rzędu S_{12}^3 . Z uwagi na to, iż krzywa przenikania powierzchni Ψ^5 i Ψ_0^5 rozpada się na elementy, wymienione pod a), b), c) i na czterokrotnie liczoną krzywą 3-go rzędu S_{12}^3 , t. zn. jest zniekształconą krzywą skośną rzędu 31-go, przeto wnosimy stąd o *identyczności* tych powierzchni $\Psi^5 = \Psi_0^5$. Dowiedliśmy prawdziwości następującego twierdzenia podstawowego:

Skoro na danej ogólnej powierzchni krzywolinijowej 5-go rzędu Ψ^5 , z podwójną krzywą skośną 3-go rzędu S_{12}^3 , weźmiemy pod uwagę: cztery dowolne proste $x_{12}^0, y_{12}^0, z_{12}^0$ i s^0 , następnie tę trójkę stożkowych powierzchni Ψ^5 , dla których sieczniami są odpow. poszczególne pary prostych, stanowiących trójkę $x_{12}^0, y_{12}^0, z_{12}^0$, oraz punkt W_0 przecięcia się płaszczyzn λ_0, μ_0 i ν_0 tych stożkowych (t. j. osobliwy punkt pojedynczy powierzchni Ψ^5) i dwa dowolne punkty W_1, W_2 krzywej S_{12}^3 , to wówczas:

Ustanawiając pomiędzy płaszczyznami wiązki (W_0) oraz płaszczyznami każdej z dwóch kolineacyjnych wiązek (W_1) i (W_2) — wyznaczających kongruencję dwusiecznych krzywej S_{12}^3 — przekształcenia kwadratowe w ten sposób, iż elementy λ_0, μ_0, ν_0 i $\xi_0^0 = W_1 x_{12}^0, \eta_0^0 = W_1 y_{12}^0, \zeta_0^0 = W_1 z_{12}^0$ ($\epsilon = 1, 2$) są płaszczyznami głównymi tych wiązek, a płaszczyzny $s_0^0 = W_0 s^0$ i $s_0^0 = W_1 s^0$ są elementami homologicznymi, otrzymamy jako utwór tych trzech wiązek (W_0), (W_1) i (W_2) daną powierzchnię Ψ^5 .

18. Powierzchnia Ψ^5 niechaj będzie utworem trzech wiązek, pomiędzy których płaszczyznami zachodzą (ust. 2) relacje

$$(4) \quad (W_1) \propto (W_2), \quad (W) \pi^2 (W_1), \quad (W) \pi^2 (W_2).$$

Celem odwzorowania powierzchni Ψ^5 na dowolną płaszczyznę ω' , ustanowić możemy: a) korelację między układem płaskim (ω') i wiązką (W), b) korelację między układem (ω') i wiązką (W_1).

Niechaj zachodzi ogólna korelacja

$$(10) \quad (\omega') \propto_0 (W),$$

w której elementami homologicznymi są: punkt L' układu (ω') i płaszczyzna λ wiązki (W), podobnie M' i μ , N' i ν , oraz prosta $x' = M'N'$ i prosta $x = \mu\nu$, $y' = N'L'$ i $y = \nu\lambda$, $z' = L'M'$ i $z = \lambda\mu$. Z zależności geometrycznych (4) i (10) wynikają bezpośrednio *przekształcenia kwadratowe*

$$(11) \quad (\omega') \pi^2 (W_1), \quad (\omega') \pi^2 (W_2)$$

między punktami układu płaskiego (ω') i płaszczyznami każdej z dwóch

kolineacyjnych wiązek (W_1) i (W_2). Punkty L' , M' i N' są punktami głównymi, a proste x' , y' i z' są prostami głównymi układu (ω'), natomiast proste l_i , m_i i n_i ($i = 1, 2$) są prostami głównymi, a płaszczyzny ξ_i , η_i i ζ_i są płaszczyznami głównymi wiązki (W).

Korzystając z relacji (4), (10) i (11), odwzorować możemy powierzchnię krzywoliniową $\mathcal{W}^5$ na płaszczyznę ω' , przy czym każdemu dowolnemu punktowi pojedynczemu $A = \alpha\alpha_1\alpha_2$ powierzchni $\mathcal{W}^5$ podporządkowany jest jeden i tylko jeden punkt (obraz) A' na płaszczyźnie ω' , i naodwrot. Ponieważ przez dowolny punkt B krzywej skośnej S_{12}^3 , która jest krzywą podwójną powierzchni $\mathcal{W}^5$, przechodzą (ust. 2) dwie trójki homologicznych płaszczyzn wiązek (W), (W_1) i (W_2), przeto punktowi $B = \beta\beta_1\beta_2 = \bar{\beta}\bar{\beta}_1\bar{\beta}_2$ podporządkowane są dwa punkty B' i $\bar{B}'$ na płaszczyźnie ω' . Poszczególnym punktom stożkowej np. L^2 , leżącej na płaszczyźnie głównej λ i na powierzchni $\mathcal{W}^5$, podporządkowany jest punkt główny L' płaszczyzny ω' . Podobnie obrazami poszczególnych punktów stożkowych M^2 i N^2 są odpow. punkty główne M' i N' .

Pomiędzy układem płaskim (ω') a dwiema kolineacyjnymi wiązkami (W_1) i (W_2) ustanowimy ogólne korelacje

$$(12) \quad (\omega') \kappa^* (W_1), \quad (\omega') \kappa^* (W_2),$$

w których dowolnemu punktowi A' układu (ω') podporządkowane są dwie homologiczne płaszczyzny α_1 i α_2 kolineacyjnych wiązek (W_1) i (W_2). Dalejszymi elementami homologicznymi są: punkt X' układu (ω') i płaszczyzny ξ_1, ξ_2 wiązek (W_1), (W_2), podobnie Y' i η_1, η_2 , Z' i ζ_1, ζ_2 , oraz prosta $l' = Y'Z'$ i proste $l_1 = \eta_1\xi_1$, $l_2 = \eta_2\xi_2$, podobnie $m' = Z'X'$ i $m_1 = \zeta_1\xi_1$, $m_2 = \zeta_2\xi_2$, $n' = X'Y'$ i $n_1 = \xi_1\eta_1$, $n_2 = \xi_2\eta_2$.

Z zależności geometrycznych (4) i (12) wynika bezpośrednio przekształcenie kwadratowe

$$(13) \quad (\omega') \pi^2 (W)$$

pomiędzy punktami układu (ω') i płaszczyznami wiązki (W). Punkty X' , Y' i Z' są punktami głównymi, a proste l' , m' i n' są prostami głównymi układu (ω'), natomiast proste $x = \mu\nu$, $y = \nu\lambda$ i $z = \lambda\mu$ są prostami głównymi, a płaszczyzny λ , μ i ν są płaszczyznami głównymi wiązki (W).

Korzystając z relacji (4), (12) i (13), odwzorować możemy powierzchnię krzywoliniową $\mathcal{W}^5$ na płaszczyznę ω' , przy czym każdemu dowolnemu punktowi pojedynczemu $A = \alpha\alpha_1\alpha_2$ powierzchni $\mathcal{W}^5$ podporządkowany jest jeden i tylko jeden punkt (obraz) A' na płaszczyźnie ω' , i naodwrot. Również i teraz dowolnemu punktowi $B = \beta\beta_1\beta_2 = \bar{\beta}\bar{\beta}_1\bar{\beta}_2$ krzywej skośnej S_{12}^3 podporządkowane są dwa punkty B' i $\bar{B}'$ na płaszczyźnie ω' . Poszczególnym punktom prostej $x_{12} = \xi_1\xi_2$, leżącej na powierzchni $\mathcal{W}^5$, podporządkowany jest punkt główny X' na płaszczyźnie ω' . Podobnie obrazami poszczególnych punktów, leżących na prostych $y_{12} = \eta_1\eta_2$ i $z_{12} = \zeta_1\zeta_2$, są odpow. punkty główne Y' i Z' .

Ponieważ każdemu punktowi A' układu (ω') podporządkowane są — w myśl relacji (12) — dwie homologiczne płaszczyzny α_1 i α_2 kolineacyjnych wiązek (W_1) i (W_2), przeto punktowi A' podporządkować możemy krawędź $a_{12} = \alpha_1\alpha_2$ tych płaszczyzn i naodwrot. Ponieważ prosta a_{12} (ust. 2) należy do kongruencji K_{12} rzędu 1-go i klasy 3-ej prostych dwusiecznych krzywej skośnej S_{12}^3 , przeto ustanowiliśmy odpowiedniość [1, 1]-znaczną pomiędzy punktami A' , ... układu (ω') i prostami a_{12} , ... kongruencji K_{12} . Z uwagi na to, iż każda prosta a_{12} tej kongruencji, jako dwusieczna krzywej S_{12}^3 , przebiega powierzchnię krzywoliniową $\mathcal{W}^5$ (poza dwoma punktami podwójnymi) tylko w jednym punkcie pojedynczym A (t. zn. $A = \alpha\alpha_1\alpha_2 = \alpha a_{12}$), więc dochodzimy do odpowiedniości [1, 1]-znaczącej pomiędzy punktami A' , ... układu (ω') i punktami A , ... powierzchni $\mathcal{W}^5$.

Szczególny przypadek powyższego odwzorowania otrzymamy wówczas, jeśli kongruencję K_{12} prostych a_{12} , b_{12} , ... przetniemy płaszczyzną ω' w punktach $A' = a_{12}\omega'$, $B' = b_{12}\omega'$, ... Wówczas dowolny punkt A powierzchni $\mathcal{W}^5$ i jego obraz A' na płaszczyźnie ω' wyznaczają prostą AA' , która jest dwusieczną krzywej S_{12}^3 . O tem ostatniemu odwzorowaniu wspomina już Clebsch w swej¹⁾ rozprawie.

Zusammenfassung.

Fläche 5. Ordnung mit einer doppelten kubischen Raumkurve.

Es sei eine allgemeine Kollineation

$$(1) \quad (W_1) \kappa (W_2)$$

zwischen den gegebenen Bündeln (W_1), (W_2) und eine allgemeine quadratische Verwandtschaft (Cremona'sche Verwandtschaft 2-en Grades)

$$(2) \quad (W) \pi^2 (W_1)$$

zwischen den gegebenen Ebenenbündeln (W), (W_1) festgestellt. Aus diesen Relationen ergibt sich unmittelbar eine allgemeine quadratische Verwandtschaft

$$(3) \quad (W) \pi^2 (W_2)$$

zwischen den Ebenenbündeln (W) und (W_2). Die Ebenen λ , μ , ν und die Geraden $x = \mu\nu$, $y = \nu\lambda$, $z = \lambda\mu$ des Bündels (W), die homologen Ebenen

¹⁾ Clebsch, l. c. str. 256, por. też Sturm, l. c. i Jaekel, l. c.

$\xi_1, \xi_2; \eta_1, \eta_2; \zeta_1, \zeta_2$ und die homologen Geraden $l_1 = \eta_1 \zeta_1, l_2 = \eta_2 \zeta_2; m_1 = \zeta_1 \xi_1, m_2 = \zeta_2 \xi_2; n_1 = \xi_1 \eta_1, n_2 = \xi_2 \eta_2$ der kollinearen Bündel $(W_1), (W_2)$ bilden die Haupt- oder Fundamental-elemente dieser quadratischen Verwandtschaften.

Ich bezeichne mit K_{01}, K_{02} und K_{12} die drei Strahlenkongruenzen der Schnittgeraden bzw. $a_{01} = \alpha \alpha_1, \dots; a_{02} = \alpha \alpha_2, \dots$; resp. $a_{12} = \alpha_1 \alpha_2, \dots$, wo $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ sämtliche Tripel entsprechender Ebenen der drei gegebenen Bündel $(W), (W_1)$ und (W_2) sind. Jede von den Kongruenzen K_{01}, K_{02} ist bekanntlich von der 2-ten Ordnung und 4-ten Klasse; die Kongruenz K_{12} ist 1-er Ordnung, 3-er Klasse und ihre Geraden $a_{12}, b_{12}, \dots$ sind Bisekanten einer kubischen Raumkurve S_{12}^3 . — Ich bestätige folgende Sätze:

Es gibt acht Geraden, die gleichzeitig zu den drei Strahlenkongruenzen K_{01}, K_{02} und K_{12} gehören. Durch jede von diesen Geraden $s_{012}^* = \sigma' \sigma_1^* \sigma_2^*$ ($\sigma = 1, \dots, 8$) gehen je drei homologe Ebenen σ', σ_1^* und σ_2^* der betrachteten Bündel $(W), (W_1), (W_2)$.

Die Schnittpunkte sämtlicher Tripel entsprechender Ebenen dieser Bündel erzeugen eine allgemeine Fläche 5-er Ordnung $\mathcal{W}^5$ mit einer Doppelkurve S_{12}^3 . Die 11 Geraden dieser Fläche, nämlich die acht Geraden s_{012}^* und die drei Geraden $x_{12} = \xi_1 \xi_2, y_{12} = \eta_1 \eta_2, z_{12} = \zeta_1 \zeta_2$, sind Bisekanten der Doppelkurve S_{12}^3 .

Aus den Relationen (1), (2) und (3) ergeben sich:

- eine [1, 1]-deutige Verwandtschaft zwischen den Ebenen $\alpha_1, \beta_1, \dots$ des Bündels (W_1) und den Geraden $a_{02}, b_{02}, \dots$ der Kongruenz K_{02} , und
- eine Verwandtschaft [1, 1] zwischen den Ebenen $\alpha, \beta, \dots$ des Bündels (W) und den Geraden $a_{12}, b_{12}, \dots$ der Kongruenz K_{12} .

Homologe Elemente dieser Verwandtschaften schneiden sich in den Punkten $A = \alpha_1 a_{02}, B = \beta b_{02}, \dots$, resp. $A = \alpha a_{12}, B = \beta b_{12}, \dots$ der Fläche $\mathcal{W}^5$.

Sind zwischen dem Ebenenbündel (W) und jedem von den kollinearen Ebenenbündeln $(W_1^*), (W_2^*)$ — die zu einer Reihe kollinearier Bündel gehören — und eine gemeinsame Bisekantenkongruenz der Raumkurve S_{12}^3 bilden — quadratische Verwandtschaften festgestellt, so erzeugen die Schnittpunkte sämtlicher Tripel homologer Ebenen dieser Bündel die Fläche $\mathcal{W}^5$.

In meiner Abhandlung gebe ich genaue Konstruktionen der Plankurven 5-er und 4-er Ordnung, die der Fläche $\mathcal{W}^5$ angehören. Jede von den drei Hauptebenen λ, μ, ν des Bündels (W) schneidet $\mathcal{W}^5$ in einem Kegelschnitte und einer allgemeinen Kurve 3-ter Ordnung. Der Scheitel W , durch welchen diese drei Plankurven 3-ter Ordnung hindurchgehen, ist ein einfacher singulärer Punkt der Fläche $\mathcal{W}^5$.

Es sei im Bündel (W) ein unikursaler Kegel ε . Klasse Γ^ε gegeben, der die Hauptebenen λ, μ, ν bzw. zu u -, v -, resp. w -fachen Tangentialebenen be-

sitzt. Ihm entsprechen bekanntlich in den Bündeln (W_1) und (W_2) zwei unikursale Kegel $\Gamma_1^\varepsilon, \Gamma_2^\varepsilon$ von der Klasse $\tau = 2\varepsilon - (u + v + w)$. Betrachtet man in Bündeln $(W), (W_1)$ und (W_2) drei Tangentialebenenbüschel, deren Träger bzw. die Kegel $\Gamma^\varepsilon, \Gamma_1^\varepsilon$ und Γ_2^ε sind, — so erzeugen den Schnittpunkte homologer Ebenen dieser Büschel eine unikursale Raumkurve C , die auf der Fläche $\mathcal{W}^5$ liegt. Die Kurve C ist $5\varepsilon - 2(u + v + w)$. Ordnung, $3(5\varepsilon - 2) - 6(u + v + w)$. Klasse, $2(5\varepsilon - 1) - 4(u + v + w)$. Rang und besitzt

$$\delta = \frac{1}{2}(\varepsilon - 1)(\varepsilon - 2) - \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2 - u - v - w)$$

Doppelpunkte und

$$\delta_0 = 6\varepsilon(2\varepsilon - 1) - \frac{5}{2}(4\varepsilon - 1)(u + v + w) + 2(u + v + w)^2 + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)$$

scheinbare Doppelpunkte. Die Geraden x_{12}, y_{12} und z_{12} der Fläche $\mathcal{W}^5$ sind bzw. $\varepsilon - (v + w)$ -, $\varepsilon - (w + u)$ -, resp. $\varepsilon - (u + v)$ -fache Sekanten der Raumkurve C . Sie begegnet $8\varepsilon - 3(u + v + w)$ -mal die Doppelkurve S_{12}^3 . Zwei solche Raumkurven C und C' besitzen $\varepsilon\varepsilon' - (uu' + vv' + ww')$ gemeinsame Punkte.

Sind die Ebenen $\sigma' = W s_{012}^*$ ($\sigma = 1, \dots, 8$) des Bündels (W) , welche durch die Geraden s_{012}^* der Fläche $\mathcal{W}^5$ hindurchgehen, bzw. q' -fache Tangentialebenen des Trägerkegels Γ^ε , so zerfällt die Kurve C in q' -fache Geraden s_{012}^* und in eine Raumkurve C_i von der $5\varepsilon - 2(u + v + w) - \sum_{i=1}^8 q'$ -ten Ordnung. Jede Gerade s_{012}^* ist eine q' -fache Sekante der C_i . Die Kurve C_i begegnet $8\varepsilon - 3(u + v + w) - \sum_{i=1}^8 2q'$ -mal die Doppelkurve S_{12}^3 . Zwei solche Raumkurven C_i und C_j schneiden sich in $\varepsilon\varepsilon' - (uu' + vv' + ww') - \sum_{i=1}^8 q'q'$ Punkten.

Insbesondere für: a) $\varepsilon = u = q' = 1, v = w = q' = 0, \sigma = 2, \dots, 8$ und b) $\varepsilon = 2, u = v = w = q' = 1, q' = 0, \sigma = 3, \dots, 8$ — erhalten wir Kegelschnitte, welche auf der Fläche $\mathcal{W}^5$ liegen.

Jeder von den 55 Kegelschnitten der Fläche $\mathcal{W}^5$ begegnet je einmal nur zwei Geraden (seine Stützgeraden) dieser Fläche. Zwei Kegelschnitte, deren Stützgeraden eine, bzw. keine Gerade gemein haben, schneiden sich gar nicht, resp. schneiden sich in einem Punkte.

Die Trägerebenen solcher drei Kegelschnitte, deren Stützgeraden einen und denselben Geradentripel der $\mathcal{W}^5$ bilden, schneiden sich in einem einfachen singulären Punkte der Fläche $\mathcal{W}^5$. Diese Fläche besitzt 165 solche einfache singuläre Punkte.

Betrachtet man auf der Fläche $\mathcal{W}^5$ irgend vier Geraden $x_{12}^0, y_{12}^0, z_{12}^0, s^0$, diesen einfachen singulären Punkt W_0 , durch welchen die drei Trägerebenen λ_0, μ_0, ν_0 solcher drei Kegelschnitte gehen, deren Stützgeraden einen Tripel

$x_{12}^0, y_{12}^0, z_{12}^0$ bilden, und zwei beliebige Punkte W_1, W_2 der Doppelkurve S_{12}^3 dieser Fläche, so gilt folgender Satz:

Sind zwischen den Ebenenbündel (W_0) und jedem von zwei kollinearen Ebenenbündeln $(W_1), (W_2)$ — die eine Bisekantenkongruenz der Raumkurve S_{12}^3 bilden — solche quadratische Verwandtschaften festgestellt, welche die Elemente λ_0, μ_0, ν_0 und $\xi_i^0 = W_i x_{12}^0, \eta_i^0 = W_i y_{12}^0, \zeta_i^0 = W_i z_{12}^0$ ($i = 1, 2$) zu Hauptebenen und die Elemente $\sigma_0 = W_0 s^0, \sigma_i^0 = W_i s^0$ zu homologen Ebenen besitzen,

so erzeugen diese drei Bündel die gegebene Fläche 5. Ordnung $\mathcal{U}^5$.

Bezieht man a) den Bündel (W) , oder b) die kollinearen Bündel (W_1) und (W_2) — auf ein ebenes Feld (ω') korrelativ, so erhält man zwei Abbildungen unserer Fläche $\mathcal{U}^5$ auf die Ebene ω' .

Über die Variationsgleichungen für affine geodätische Linien und nichtholonome, nichtkonservative dynamische Systeme

(Równania na zboczenie dla dowolnych układów dynamicznych)

von

A. Wundheiler

Im Jahre 1926 hat Levi-Civita¹⁾ die Jacobische Formel für die geodätische Abweichung in zwei Dimensionen auf beliebige Riemannsche Räume verallgemeinert. Vranceanu²⁾ und Synge³⁾ haben sie dann auf nichtholonome, immer Riemannsche Räume, übertragen. Vranceanu arbeitet mit Kongruenzen und erhält ziemlich unübersichtliche Formeln, die sich auf affine Räume nicht verallgemeinern lassen und für den an die Schoutensche Symbolik gewöhnten Leser schwer verständlich sind. Synge hat 1928 die nichtholonomen Variationsgleichungen der Geodätischen in einer viel einfacheren, tensoriellen Gestalt gegeben, die sich ebenfalls auf affine Räume nicht übertragen läßt. Die dynamischen Anwendungen sind durchaus auf den Fall eines konservativen skleronomen Systems, von gegebener Totalenergie beschränkt, wobei der klassische Satz von Jacobi, der die Bahnkurven bei solcher Einschränkung mit den Geodätischen eines Riemannschen Raumes identifiziert, benutzt wird.

In der vorliegenden Arbeit werden:

1^o die Abweichungsgleichungen der geodätischen Linien eines allgemeinen

¹⁾ T. Levi-Civita. Sur l'écart géodésique. Math. Ann. 97 (1926).

²⁾ G. Vranceanu. Studio geometrico dei sistemi anolonomi. Ann. di Mat. (4) VI (1928—29). Zusammenfassende Darstellung der Resultate des Verfassers über nichtholonome Räume.

³⁾ J. L. Synge. Geodesics in non-holonomic geometry. Math. Ann. 99 (1928).