icm©

heliozentr. Normalminimum: **J. D. 2 426 014$\overset{\mathrm{d}}{.}$880 m. Z. Gr.** ($E = +13\,783$), und daraus $B-R = -0\overset{\mathrm{d}}{.}0552$ gegenüber H e l l e r i c h's Elemente (A. N. 5167): J. D. 2 410 357$\overset{\mathrm{d}}{.}$6379 + 1$\overset{\mathrm{d}}{.}$13594989 $\times E$. — Die Lichtkurve zeigt deutliche Assymmetrie in dem Sinne, dass die Lichtabnahme viel langsamer als die Lichtzunahme vor sich geht. Obiges Normalminimum weist auf eine weitere Verkürzung der Periode hin (R. S. D u g a n, Contrib. Princeton Univ. Observatory, Nr. 6, $_{50}$).

Streszczenie.

Obserwacje fotometryczne gwiazdy zaćmieniowej *R Canis Majoris*.

Gwiazdę tę obserwowałem fotometrem klinowym G r a f f a w obserwatorjum uniwersyteckiem w Wiedniu oraz w Warszawie w okresie czasu, 1930 I 13$^{\mathrm{d}}$—III 6$^{\mathrm{d}}$. Obserwacje były w znacznym stopniu utrudnione niskiem położeniem gwiazdy w odniesieniu do horyzontu (w Warszawie w kulminacji górnej gwiazda wznosi się zaledwie 22° nad horyzont). Pozatem w Warszawie poważną przeszkodę stanowił dym i ciepłe powietrze, wydobywające się z pobliskich cieplarń ogrodu botanicznego, opalanych zimową porą, to jest wówczas, gdy gwiazda jest u nas widoczna.

Klin fotometru przedtem starannie wycechowałem w ciągu 3 wieczorów za pomocą obserwacyj gwiazd białych grupy Plejad.

Jasność gwiazdy zmiennej nawiązywałem do jasności sąsiednich dwóch gwiazd porównawczych: $b\,(-15^0 1734) = 5\overset{\mathrm{m}}{.}39$ (A 2) oraz $g\,(-17^0 1917) = 6\overset{\mathrm{m}}{.}61$ (B 8). W sumie dokonałem 204 pomiarów jasności gwiazdy zmiennej. Łącząc przeciętnie 4 po sobie następujące odczyty klina w średnią wartość, otrzymałem, po uwzględnieniu ekstynkcji różnicowej, 50 jasności gwiazdy zmiennej (tablica I).

Przy pomocy perjodu $p = 1\overset{\mathrm{d}}{.}135950$, wynikającego z najświeższych obserwacyj tej gwiazdy (B. K u k a r k i n a i J. G a d o m s k i e g o), zredukowałem wszystkie pomiary na minimum $E = +13\,783$ w odniesieniu do linjowych elementów H e l l e r i c h a (A. N. 5167). Otrzymane jasności normalne zestawione zostały w tablicy II oraz przedstawione na wykresie.

Z wykresu wynika: $d = 0\overset{\mathrm{d}}{.}00$ $m = 6\overset{\mathrm{m}}{.}11$ oraz:

minimum normalne heliocentr. **J. D. 2 426 014$\overset{\mathrm{d}}{.}$880** czasu średn. Greenw. ($E = +13\,783$), a stąd: $O-R = -0\overset{\mathrm{d}}{.}0552$ w odniesieniu do elementów H e l l e r i c h a.

Krzywa zmiany blasku przedstawiona na wykresie wykazuje wyraźną asymetrję, otrzymane zaś minimum normalne wskazuje na dalsze wolne skracanie się periodu zaćmień.

Über die kleinste und größte Entfernung zweier Raumkurven

(O najmniejszej i największej odległości dwóch krzywych przestrzennych)

von

S. S t e c k e l

Es seien C und Γ zwei stetige Kurven mit stetig sich ändernden Tangentenrichtungen und Krümmungsradien. Es seien die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes von C mit $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, die Koordinaten eines Punktes von Γ mit $\xi(\tau)$, $\eta(\tau)$, $\zeta(\tau)$ bezeichnet. Von den Funktionen: $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $\xi(\tau)$, $\eta(\tau)$, $\zeta(\tau)$ setzen wir also voraus, daß sie in gewissen Intervallen: $a < t < b$, $\alpha < \tau < \beta$ stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung besitzen. Wir betrachten die Funktion:

$$f(t,\tau) = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2$$

und nennen ein Extremum dieser Funktion eine kleinste oder größte Entfernung der beiden Kurven, je nachdem dieses Extremum ein Minimum oder Maximum ist.

Eine notwendige Bedingung für eine kleinste oder größte Entfernung ist, wie bekannt, das Bestehen der folgenden Beziehungen:

$$(1^{a}) \qquad \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial \tau} = 0$$

$$(1^{b}) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t\cdot\partial \tau}\right)^2 \geqslant 0.$$

Wenn dagegen außer (1^{a}) noch die Bedinguug:

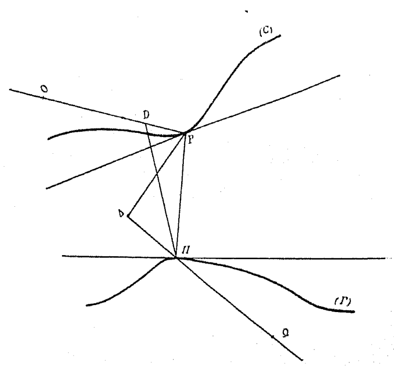
$$(2^{b}) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t\cdot\partial \tau}\right)^2 > 0$$

icm©

erfüllt ist, so ist dies für eine kleinste oder größte Entfernung hinreichend. Das Extremum ist dann eine kleinste oder größte Entfernung, je nachdem $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} > 0$ oder $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} < 0$.

In der vorliegenden Note versuchen wir den analytischen Bedingungen (1^a, 1^b) beziehungsweise (1^a, 2^b) eine einfache geometrische Interpretation zu verleihen.

Die geometrische Bedeutung der Bedingung (1^a) ist ohne weiteres klar:



Wenn die Strecke $P\Pi$ eine extremale Entfernung der Kurven C und Γ ist, dann steht diese Strecke senkrecht zu den entsprechenden Tangenten an die Kurven in den Punkten P und Π.

Es handelt sich also darum, die Bedingung (2^a) bezw. (2^b) in die geometrische Sprache zu übersetzen.

Es sei also die Strecke $P\Pi$ eine extremale Entfernung der Kurven C und Γ. Wir machen den Punkt P (der Kurve C) zum Ursprung des Koordinatensystems und setzen voraus, daß die x-Achse mit der Tangentenrichtung an C im Punkte P, die y-Achse mit der Hauptnormalenrichtung, und zwar so, daß der Krümmungsmittelpunkt O auf der positiven Seite zu liegen kommt, zusammenfällt. Nimmt man noch an, daß die Parameter t und τ die Bogenlänge von C und Γ bedeuten, so hat man für den Punkt P:

$$(3)\qquad \begin{cases} x = y = z = 0 \\ x' = 1; \quad y' = 0 \quad z' = 0 \\ x'' = 0; \quad y'' = \frac{1}{r}, \quad z'' = 0, \end{cases}$$

wobei: $\frac{1}{r}$ die Krümmung von C im Punkte P bedeutet. Aus der Voraussetzung, daß die Strecke $P\Pi$ eine extremale Entfernung ist, folgt nun aus (1^a):

$$(4)\qquad \begin{cases} \xi = 0 \\ \eta\eta' + \zeta\zeta' = 0, \end{cases}$$

wo: ξ, η, η', ζ, ζ' die entsprechenden Funktionswerte für den Punkt Π bedeuten. Bildet man die Ableitungen zweiter Ordnung von $f(t, \tau)$, so erhält man:

$$(5)\qquad \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = (x-\xi)x'' + (y-\eta)y'' + (z-\zeta)z'' + x'^2 + y'^2 + z'^2 \\ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t \cdot \partial \tau} = -(\xi' x' + \eta' y' + \zeta' z') \\ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2} = (\xi - x)\xi'' + (\eta - y)\eta'' + (\zeta - z)\zeta'' + \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2. \end{cases}$$

Berücksichtigt man, daß:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$$
$$\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = 1$$

und setzt man in (5) die den Punkten P und Π entsprechenden Werte unter Beachtung der Gleichungen (3) ein, so hat man:

$$(6)\qquad \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 1 - \frac{\eta}{r} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t \cdot \partial \tau} = -\xi' \\ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2} = 1 + \xi\xi'' + \eta\eta'' + \zeta\zeta''. \end{cases}$$

Die Bedingung (1^b) kann man daher auf die folgende Form bringen:

$$(7)\qquad \xi'^2 \leq \left(1 - \frac{\eta}{r}\right)(1 + \xi\xi'' + \eta\eta'' + \zeta\zeta'').$$

Bezeichnet man die Entfernung $P\Pi$ mit d, die Krümmung der Kurve Γ im Punkte Π mit: $\frac{1}{\varrho}$, den Winkel, den die (nach dem Krümmungsmittelpunkt Ω gerichtete) Hauptnormale von Γ im Punkte Π mit der Strecke ΠP (gerichtet von Π nach P) bildet, mit φ, so kann man, wie man leicht sieht:

$$(8)\qquad \xi\xi'' + \eta\eta'' + \zeta\zeta'' = -\frac{d\cos\varphi}{\varrho}$$

schreiben. Beachtet man noch, daß ξ' dem Cosinus des Winkels ϑ gleich ist, den die Tangenten an C und Γ in den Punkten P und Π mit einander bilden, so kann man, nach einer einfachen Umformung, (7) in der Form schreiben:

(9) $$r\varrho\cos^2\vartheta \leq (r-\eta)(\varrho - d\cos\varphi).$$

Bezeichnet man (Fig. I) die senkrechte Projektion von $P\Pi$ auf die Hauptnormale PO mit PD, dagegen die Projektion von ΠP auf die Hauptnormale $\Pi\Omega$ mit $\Pi\Delta$, so hat man:

(10) $$\begin{cases} r-\eta = PO + DP = DO \\ \varrho - d\cos\varphi = \Pi\Omega + \Delta\Pi = \Delta\Omega \end{cases}$$

und die Bedingung (1^b) nimmt die geometrisch einfach deutbare Form an:

(11) $$r\varrho\cos^2\vartheta \leq DO\cdot\Delta\Omega.$$

Wenn die Strecke $P\Pi$ zu den Tangenten an C und Γ in den Punkten P und Π senkrecht steht und außerdem die Bedingung:

(12) $$r\varrho\cos^2\vartheta < DO\cdot\Delta\Omega$$

erfüllt ist, so ist $P\Pi$ sicher eine extremale Entfernung der Kurven C und Γ. Die Entfernung ist eine kleinste oder größte, je nachdem die Strecken DO und $\Delta\Omega$ dieselben Richtungen besitzen wie die (auf denselben Geraden liegenden) Krümmungsradien PO und $\Pi\Omega$.

Streszczenie.

Niech będą dane dwie krzywe (C) i (Γ), określone odpowiednio zapomocą wzorów:

(1) $$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad (a < t < b)$$

oraz:

(2) $$\begin{cases} \xi = \xi(\tau) \\ \eta = \eta(\tau) \\ \zeta = \zeta(\tau) \end{cases} \qquad \alpha < \tau < \beta),$$

przyczem zakładamy, że funkcje: $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $\xi(\tau)$, $\eta(\tau)$, $\zeta(\tau)$ posiadają w przedziale (a, b) lub (α, β) ciągłe pochodne pierwszego i drugiego rzędu. Rozpatrzmy funkcję:

(3) $$f(t,\tau) = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2$$

i nazwijmy każde minimum (maximum) tej funkcji najmniejszą (największą) odległością krzywych (C) i (Γ). W niniejszej Nocie podaję warunki konieczne a także dostateczne na to, aby dany odcinek $P\Pi$, łączący

punkt P krzywej (C) z punktem Π krzywej (Γ) był najmniejszą lub największą odległością krzywych (C) i (Γ).

Oznaczmy (fig. I) przez O i Ω środki krzywizny, odpowiadające punktom P i Π, zaś przez D i Δ rzuty prostokątne punktów Π i P na normalne PO i $\Pi\Omega$. Ustalmy na normalnych PO i $\Pi\Omega$ zwroty dodatnie zgodne ze zwrotami odcinków PO i $\Pi\Omega$, połóżmy: $PO = r$, $\Pi\Omega = \varrho$, zaś kąt zawarty między stycznemi do (C) i (Γ) w punktach P i Π oznaczmy przez ϑ.

Otrzymujemy wynik następujący:

Warunkiem koniecznym na to, aby odcinek $P\Pi$ był najmniejszą lub największą odległością krzywych (C) i (Γ) jest, aby:

1° odcinek ten był najkrótszą odległością stycznych do (C) i (Γ) w punktach P i Π

oraz aby spełniona była nierówność:

2° $$r\varrho\cos^2\vartheta \leq DO\cdot\Delta\Omega.$$

Gdy w układzie warunków (1°, 2°) zastąpimy warunek 2° mocniejszym warunkiem:

$$r\varrho\cos^2\vartheta < DO\cdot\Delta\Omega,$$

otrzymamy układ warunków dostatecznych na to, aby odcinek $P\Pi$ był najmniejszą lub największą odległością krzywych (C) i (Γ). Przytem zachodzi wypadek najmniejszej odległości, gdy odcinki DO i $\Delta\Omega$ są dodatnie zaś największej odległości, gdy te odcinki są ujemne.
