Note sur deux fonctions arithmétiques

(Nota o dwóch funkcjach liczbowych)

par

S. Wigert.

1. Soit

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

la fonction Eulérienne qui indique combien il y a de nombres premiers à n et non supérieurs à n. Un calcul élémentaire montre que la fonction sommatoire correspondante peut s'écrire ainsi

$$\sum_{n \leq x} \varphi(n) = \frac{3}{\pi^2} x^2 + O(x \log x).$$

On n'a pas encore su préciser ce résultat, même en ayant recours à toutes les ressources de l'analyse. Il est donc assez remarquable que la fonction analogue [1])

$$\psi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 + \frac{1}{p}\right)$$

est de plus facile accès.

Désignons en effet par $S(n)$ la somme des diviseurs de n et posons

$$Z(x) = \sum_{n \leq x} S(n) = \frac{\pi^2}{12} x^2 + f(x).$$

---

[1]) On sait que $\varphi(n)$ est le nombre des racines primitives de l'équation

$$x^n - 1 = 0.$$

Le nombre $\psi(n)$ a une signification semblable; c'est le degré d'une équation algébrique importante de la théorie des fonctions modulaires elliptiques. (Voir Hurwitz: Thèse, Leipzig 1881).

Il était connu depuis longtemps que

$$f(x) = O(x \log x),$$

mais en 1927 M. A. Walfisz [1]) est arrivé à une approximation meilleure, à savoir

$$f(x) = O\left(\frac{x \log x}{\log \log x}\right).$$

Nous allons utiliser ce résultat en étudiant la fonction

$$\sum_{n \leq x} \psi(n).$$

On a d'abord pour $\sigma > 2$: $(s = \sigma + i\tau)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\psi(p^\nu)}{p^{\nu s}}\right) = \prod_p \frac{1 + \frac{1}{p^s}}{1 - \frac{1}{p^{s-1}}}$$

$$= \frac{\zeta(s)\,\zeta(s-1)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^{2s}} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{S(m)}{m^s}$$

et par conséquent

$$\sum_{n \leq x} \psi(n) = \sum_{n \leq x} \mu(n)\, Z\left(\frac{x}{n^2}\right) = \sum_{n \leq x} \mu(n) \left\{\frac{\pi^2 x^2}{12 n^4} + f\left(\frac{x}{n^2}\right)\right\}$$

$$= \frac{\pi^2}{12\,\zeta(4)} x^2 + O\left(\frac{1}{x}\right) + \sum_{n \leq x} \mu(n)\, f\left(\frac{x}{n^2}\right).$$

En désignant par k un nombre fixe, $f\left(\frac{x}{n^2}\right)$ est limitée pour $n > \sqrt{\frac{x}{k}}$, d'où

$$\sum_{\sqrt{\frac{x}{k}} < n \leq x} \mu(n)\, f\left(\frac{x}{n^2}\right) = O(x).$$

D'autre part

$$\sum_{n \leq \sqrt{\frac{x}{k}}} \mu(n)\, f\left(\frac{x}{n^2}\right) = O\left(\sum_{n \leq \sqrt{\frac{x}{k}}} \frac{x}{n^2} \frac{\log \frac{x}{n^2}}{\log \log \frac{x}{n^2}}\right)$$

$$= x\, O\left(\int_1^{\sqrt{\frac{x}{k}}} \frac{\log \frac{x}{t^2}\, dt}{t^2 \log \log \frac{x}{t^2}}\right) = O\left(\frac{x \log x}{\log \log x}\right),$$

[1]) Teilerprobleme (Math. Zeitschrift, Bd. 26, Heft 1).

de sorte que nous avons le résultat

$$\sum_{n \leq x} \psi(n) = \frac{15}{2\pi^2} x^2 + O\left(\frac{x \log x}{\log \log x}\right). \tag{1}$$

M. Walfisz a montré aussi que

$$\sum_{n \leq x} \frac{S(n)}{n} = \frac{\pi^2}{6} x - \frac{1}{2} \log x + O\left(\frac{\log x}{\log \log x}\right),$$

ce qui nous donne, après des calculs analogues

$$\sum_{n \leq x} \frac{\psi(n)}{n} = \frac{15}{\pi^2} x - \frac{3}{\pi^2} \log x + O\left(\frac{\log x}{\log \log x}\right). \tag{2}$$

Pour la fonction $\varphi(n)$ on a seulement

$$\sum_{n \leq x} \frac{\varphi(n)}{n} = \frac{6}{\pi^2} x + O(\log x).$$

Il est possible que le dernier terme atteint réellement des valeurs d'ordre $\log x$, bien qu'il ne puisse pas être de la forme $A \log x + o(\log x)$, la constante A étant $\neq 0$. Il faut avouer pourtant que ma tentative de tirer de l'hypothèse

$$\sum_{n \leq x} \frac{\varphi(n)}{n} = \frac{6}{\pi^2} x + o(\log x)$$

une contradiction a échoué.

Il est vrai qu'on peut exprimer la fonction

$$\sum_{n \leq x} \frac{\varphi(n)}{n}$$

par

$$\sum_{n \leq x} \frac{S(n)}{n}$$

en partant de l'égalité [1])

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^{s+1}} = \frac{\zeta(s)\,\zeta(s+1)}{\zeta^2(s+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{s+1}} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{S(m)}{m^{s+1}},$$

[1]) On trouve

$$a_n = \sum_{dd'=n} \mu(d)\,\mu(d') = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ est divisible par le cube d'un nombre premier,} \\ (-2)^{\nu-\varrho}, & \text{si } n = p_1^2 \dots p_\varrho^2\, p_{\varrho+1} \dots p_\nu. \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$\sum_{n\le x}\frac{\varphi(n)}{n}=\sum_{n\le x}\frac{a_n}{n}\left\{\frac{\pi^2 x}{6n}-\frac{1}{2}\log\frac{x}{n}+\text{ etc.}\right\}.$$

Or, les difficultés qui s'opposent à l'examen de la dernière somme, semblent graves.

2. En somme il ne reste de ma recherche qu'un petit résultat concernant la fonction

$$q(n)=\frac{\varphi(n)}{\psi(n)},$$

dont il m'était impossible de tirer parti pour le problème précédent. Je vais l'exposer cependant, attendu qu'il présente en tout cas un peu d'intérêt.

Disons d'abord quelques mots sur l'ordre de grandeur de $q(n)$. Quant à la fonction $\varphi(n)$, il est bien connu que

$$\underline{\lim}\,\frac{\varphi(n)}{n}\log\log n=e^{-\gamma},$$

en désignant par γ la constante d'Euler. Ce théorème est dû à M. Landau[1]); sa méthode de démonstration est appliquable à la fonction $\psi(n)$ et nous permet d'énoncer la proposition analogue

$$\overline{\lim}\,\frac{\psi(n)}{n\log\log n}=\frac{6e^{\gamma}}{\pi^2},$$

ce qui entraîne

$$\underline{\lim}\,q(n)\,(\log\log n)^2=\frac{\pi^2}{6}e^{-2\gamma}. \tag{3}$$

On a en effet pour n assez grand, le nombre ε étant choisi arbitrairement petit

$$\prod_{\substack{p|n\\ p\le\log n}}\left(1+\frac{1}{p}\right)\le\prod_{p\le\log n}\left(1+\frac{1}{p}\right)=\prod_{p\le\log n}\frac{1-\frac{1}{p^2}}{1-\frac{1}{p}}<\frac{1+\varepsilon}{1+\frac{\varepsilon}{2}}\,\frac{6e^{\gamma}}{\pi^2}\log\log n,$$

$$\prod_{\substack{p|n\\ p>\log n}}\left(1+\frac{1}{p}\right)<\left(1+\frac{1}{\log n}\right)^{\frac{\log n}{\log\log n}}=O\left(e^{\frac{1}{\log\log n}}\right)<1+\frac{\varepsilon}{2},$$

et par suite

$$\frac{\psi(n)}{n\log\log n}<(1+\varepsilon)\frac{6e^{\gamma}}{\pi^2}.$$

1) Cf. son Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Bd. 1, § 59.

Soit d'autre part x un nombre positif assez grand et mettons

$$n=\prod_{p\le x}p.$$

On a donc

$$\log n=\sum_{p\le x}\log p$$

et $\frac{x}{2}<\log n<2x$. Après avoir fixé ε on peut prendre x de manière que

$$\prod_{p\le x}\left(1+\frac{1}{p}\right)>\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{6e^{\gamma}}{\pi^2}\log x,$$

$$\frac{\log 2}{\log x-\log 2}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Il en résulte

$$\begin{aligned}\frac{\psi(n)}{n}&>\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{6e^{\gamma}}{\pi^2}(\log\log n-\log 2)\\ &>\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{6e^{\gamma}}{\pi^2}\log\log n\left(1-\frac{\log 2}{\log x-\log 2}\right)\\ &>\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)^2\frac{6e^{\gamma}}{\pi^2}\log\log n,\end{aligned}$$

ou bien

$$\frac{\psi(n)}{n\log\log n}>(1-\varepsilon)\frac{6e^{\gamma}}{\pi^2}.$$

Le théorème est donc démontré.

3. Pour trouver la valeur moyenne de $q(n)$ il faut examiner la somme

$$\sum_{n\le x}q(n).$$

Envisageons à cet effet la série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q(n)}{n^s},$$

convergente pour $\sigma>1$, laquelle peut s'écrire aussi

$$\prod_{p}\left(1+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{p-1}{p+1}\,\frac{1}{p^{\nu s}}\right)=\prod_{p}\frac{1+\frac{1}{p}-\frac{2}{p^{s+1}}}{\left(1+\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p^s}\right)}$$
$$=\zeta(s)\prod_{p}\left(1-\frac{2}{(p+1)p^s}\right).$$

Le dernier produit converge absolument et uniformément pour $\sigma \geqq \sigma_0 > 0$; il représente donc une fonction $F(s)$, holomorphe dans chaque domaine $0 < \sigma_0 \leqq \sigma \leqq \sigma_1$, $|\tau| \leqq \tau_0$. On en conclut

$$\sum_{n \leq x} q(n) \log \frac{x}{n} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\substack{a-i\infty \\ (a>1)}}^{a+i\infty} \frac{x^s \zeta(s) F(s)\, ds}{s^2}$$

$$= F(1) x + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\varepsilon - i\infty}^{\varepsilon + i\infty}$$

et, en utilisant les propriétés de $\zeta(s)$

$$|F(s)| < \prod_p \left(1 + \frac{2}{p^{\sigma+1}}\right) < \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^{\sigma+1}}\right)^2 = \left\{\frac{\zeta(\sigma+1)}{\zeta(2\sigma+2)}\right\}^2$$

$$< \zeta^2(\sigma+1) < 4 \frac{1}{\sigma^2},$$

$$\int\limits_{\varepsilon - i\infty}^{\varepsilon + i\infty} \frac{x^s \zeta(s) F(s)\, ds}{s^2} = O\left(\frac{x^\varepsilon}{\varepsilon^3}\right).$$

Fixons maintenant

$$\varepsilon = \frac{1}{\log x};$$

il s'ensuit

$$\sum_{n \leq x} q(n) \log \frac{x}{n} = F(1) x + O(\log^3 x). \tag{4}$$

En passant à

$$\sum_{n \leq x} q(n)$$

nous allons introduire une fonction $t(x)$ d'ordre de grandeur inférieur à x. L'artifice connu de la première différence nous donne alors

$$\sum_{n \leq x+t} q(n) \log \frac{x+t}{n} - \sum_{n \leq x} q(n) \log \frac{x}{n} = \log\left(1 + \frac{t}{x}\right) \sum_{n \leq x} q(n)$$

$$+ \sum_{x < n \leq x+t} q(n) \log \frac{x+t}{n} = F(1)\, t) + O(\log^3 x)$$

et de plus

$$\sum_{n \leq x} q(n) = F(1)\{x + O(t)\} + O\left(\frac{t^2}{x}\right) O\left(\frac{x}{t}\right) + O\left(\frac{x \log^3 x}{t}\right)$$

$$= F(1) x + O(t) + O\left(\frac{x \log^3 x}{t}\right).$$

La meilleure approximation s'obtient évidemment pour

$$t^2 = x \log^3 x;$$

il vient

$$\sum_{n \leq x} q(n) = F(1) x + O\left(\sqrt{x} \log^{\frac{3}{2}} x\right). \tag{5}$$

La valeur moyenne de $q(n)$ est donc égale à

$$F(1) = \prod_p \left(1 - \frac{2}{p(p+1)}\right);$$

c'est un nombre $< \frac{1}{2}$ mais

$$> \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^{\frac{3}{2}}}\right) = \frac{1}{\zeta\left(\frac{3}{2}\right)} > \frac{1}{3}.$$