Le principe de Hamilton et l'holonomisme

(Zasada Hamiltona a holonomizm)

par

M. Kerner

I. Contenu du travail.

On sait que le principe de Hamilton s'applique aux systèmes holonomes. D'après ce principe la première variation de l'intégrale de la fonction de Lagrange par rapport au temps s'annule pour tout mouvement réel du système.

Ce principe cesse à être applicable pour les systèmes non holonomes. Déjà Hertz [1]) à donné des exemples des systèmes non holonomes (par exemple, une sphère roulant sans glissement sur un plan), auxquels le principe de Hamilton ne s'applique pas.

Mais il n'en résulte pas qu'il n'est pas applicable aux autres systèmes non holonomes.

Nous posons donc la question:

Quelle est la classe de systèmes mécaniques, auxquels s'applique le principe de Hamilton? Ne contient-elle que des systèmes holonomes, ou bien aussi des systèmes non holonomes?

Nous allons démontrer que c'est la première hypothèse qui est vraie. En d'autres mots: l'holonomisme n'est pas seulement une condition suffisante, mais aussi une condition nécessaire d'applicabilité du principe de Hamilton.

Nous préciserons encore qu'il s'agit du principe de Hamilton proprement dit, qui concerne la condition première d'extremum. Il ne le faut pas confondre avec le principe formel, modifié par Hölder [2]), qui s'applique à tous systèmes non holonomes.

[1]) Die Prinzipien der Mechanik. 1894. p. 23—24.

[2]) Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 1896. p. 122—157.

Nous donnerons la démonstration sous forme d'un lemme en vue d'une autre application de notre méthode. Nous appliquerons d'abord notre lemme au notre but principal, et après à un second problème, concernant le problème général de **Lagrange** dans le Calcul des Variations.

Nous allons repondre à la question, sous quelles conditions peut-on appliquer le *théorème d'existence* des extrémales dans ce problème[1]) *aux extrémales singulières.*

Nous verrons que ces conditions consistent en l'intégrabilité totale du système des équations de condition, définissant le champ fonctionnel du problème.

II. Lemme.

Nous considérons une fonction d'une variable x, de n variables $y_1, y_2, \dots, y_n$. et de leurs dérivées par rapport à x — $y'_1, y'_2, \dots, y'_n$:

$$f(x, y_1, y_2, \dots, y_n,\ y'_1, y'_2, \dots, y'_n); \tag{1}$$

Nous admettons qu'elle est de la classe C''' par rapport à toutes variables (continue et ayant toutes ses derivées partielles jusqu'au troisième ordre inclus continues) dans un certain domaine R de l'éspace à $n+1$ dimmensions $x, y_1, y_2, \dots, y_n$ et pour toutes les valeurs de $y'_1, y'_2, \dots, y'_n$.

Admettons que les variables $y_1, y_2, \dots y_n$ sont liées par h équations différentielles linéaires:

$$\varphi^{(i)}(x, y_1, y_2, \dots, y_n,\ y'_1, y'_2, \dots, y'_n) = 0; \qquad (i = 1, 2 \dots, h) \tag{2}$$

Les fonctions $\varphi^{(i)}$ sont de la forme:

$$\varphi^{(i)}(x, y_1, y_2, \dots, y_n,\ y'_1, y'_2, \dots, y'_n) = a^{(i)} + \sum_{k=1}^{n} a_k^{(i)} y'_k; \qquad (i = 1, 2 \dots, h) \tag{3}$$

où $a_0^{(i)}$ et $a_k^{(i)}$ sont des fonctions de $x, y_1, y_2, \dots, y_h$. Admettons qu'elles sont de la classe C''' dans le domaine R.

Nous admettons encore que les fonctions $\varphi^{(i)}$ sont linéairement indépendantes, comme fonctions des variables $y'_1, y'_2, \dots, y'_k$. Par conséquent, l'un au moins des déterminants d'ordre h de la matrice:

$$\begin{Vmatrix} a_0^{(1)} & a_1^{(1)} & a_2^{(1)} \dots a_n^{(1)} \\ a_0^{(2)} & a_1^{(2)} & a_2^{(2)} \dots a_n^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_0^{(h)} & a_1^{(h)} & a_2^{(h)} \dots a_n^{(h)} \end{Vmatrix} \tag{4}$$

est différent de zéro.

[1]) Voir par exemple: **Bolza**. Vorlesungen über Variationsrechnung. 1909. p. 589—590.

Nous admettrons de plus que les fonctions $\varphi^{(i)}$ n'admettent pas de combinaison linéaire, ne contenant pas de dérivées $y'_1, y'_2, \dots, y'_n$. Par suite, encore dans la matrice un peu plus étroite:

$$\begin{Vmatrix} a_1^{(1)} & a_2^{(1)} \dots a_n^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} \dots a_n^{(2)} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_1^{(h)} & a_2^{(h)} \dots a_n^{(h)} \end{Vmatrix} \tag{5}$$

un au moins des déterminants d'ordre h doit être différent de zéro.

Introduisons la notation:

$$R(x, y_1, y_2, \dots y_n,\ y_n, y'_1, y'_2, \dots y'_n)$$

$$= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial y_1'^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y'_1 \partial y'_2} \cdots \dfrac{\partial^2 f}{\partial y'_1 \partial y'_n} & a_1^{(1)} & a_1^{(2)} \dots a_1^{(h)} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y'_2 \partial y'_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y_2'^2} \cdots \dfrac{\partial^2 f}{\partial y'_2 \partial y'_n} & a_2^{(1)} & a_2^{(2)} \dots a_2^{(h)} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y'_n \partial y'_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y'_n \partial y'_2} \cdots \dfrac{\partial^2 f}{\partial y_n'^2} & a_n^{(1)} & a_n^{(2)} \dots a_n^{(h)} \\ a_1^{(1)} & a_2^{(1)} \dots a_n^{(1)} & 0 & 0 \dots 0 \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} \dots a_n^{(2)} & 0 & 0 \dots 0 \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_1^{(h)} & a_2^{(h)} \dots a_n^{(h)} & 0 & 0 \dots 0 \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Admettons que dans le domaine R pour toutes les valeurs de $y'_1, y'_2 \dots, y'_n$:

$$R(x, y_1, y_2, \dots, y_n,\ y'_1, y'_2, \dots, y'_n) \neq 0; \tag{7}$$

Nous désignerons x par y_0, d'où $y'_0 = 1$; mettons les équations (2) sous la forme:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k^{(i)} \cdot y'_k = 0, \qquad (i = 1, 2 \dots, h) \tag{8}$$

ou sous forme différentielle:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k^{(i)} \cdot dy_k = 0, \qquad (i = 1, 2 \dots, h) \tag{9}$$

C'est pour cette forme, qu'on donne d'habitude les conditions d'intégrabilité totale du système (2).

Désignons pour abréger:

(10) $$b_{kl}^{(i)} = \frac{\partial a_k^{(i)}}{\partial y_l} - \frac{\partial a_l^{(i)}}{\partial y_k};$$

$$(i = 1, 2 \ldots, h;\ k, l = 0, 1, 2 \ldots, n)$$

D'où

(11) $$b_{kl}^{(i)} = -b_{lk}^{(i)};$$

(12) $$b_{kk}^{(i)} = 0.$$

Désignons:

(13) $$A = \begin{vmatrix} a_{n-h+1}^{(1)} & a_{n-h+2}^{(1)} \ldots a_n^{(1)} \\ a_{n-h+1}^{(2)} & a_{n-h+2}^{(2)} \ldots a_n^{(2)} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n-h+1}^{(h)} & a_{n-h+2}^{(h)} \ldots a_n^{(h)} \end{vmatrix};$$

Nous désignerons le déterminant, qu'on reçoit du déterminant A, en remplaçant les indices des colonnes par d'autres, en ajoutant à A entre paranthèse: en haut — les indices à remplaçer; en bas — ceux, qui doivent venir à leur place. Par exemple, le symbole $A\binom{n-h+s,\,n-h+t}{k,\,l}$ déstgne le déterminant (13), dans lequel on a remplacé l'indice $n-y+s$ par k, et l'indice $n-h+t$ par l.

Si nous voulons marquer que dans une somme double, étendue à deux indices (par exemple s et t), il n'y a que des termes dont les indices vérifient une certaine inégalité (par exemple: $s < t$) nous écrirerons cette inégalité en parenthèse devant le signe de sommation.

Soient maintenant $2h$ fonctions de la variable x:

(14) $$\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ldots, \lambda_h(x)$$

et

(15) $$\mu_1(x), \mu_2(x), \ldots, \mu_h(x).$$

Posons:

(16) $$F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n,\ y_1', y_2', \ldots, y_n',\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h) = f + \sum_{i=1}^{h} \lambda_i \cdot \varphi^{(i)}.$$

Considérons maintenant deux systèmes d'équations différentielles. Le premier soit:

(17) $$\frac{\partial F}{\partial y_l} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_l'}\right) = 0;$$

$$(l = 1, 2 \ldots, n)$$

ou bien, en développant:

(18) $$\frac{\partial f}{\partial y_l} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_l'}\right) + \sum_{i=1}^{h}\left[\lambda_i \cdot \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial y_l} - \lambda_i \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial y_l'}\right) - \lambda_i' \cdot \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial y_l'}\right] = 0,$$

$$(l = 1, 2 \ldots, n)$$

Le deuxième soit:

(19) $$\frac{\partial f}{\partial y_l} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_l'}\right) + \sum_{i=1}^{h} \mu_i \cdot \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial y_l'} = 0;$$

$$(l = 1, 2 \ldots, n)$$

Le système, composé des équations (2) et (18), contient $n+h$ équations et autant des variables: $y_1, y_2, \ldots, y_n, \lambda, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$ et le système (2), (19) — $n+h$ équations avec les variables $y_1, y_2, \ldots, y_n, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_h$.

D'après l'inégalité (7) on peut mettre les deux systèmes sous forme normale. Donc ils définissent $y_1, y_2, \ldots, y_n$, comme fonctions de x dépendantes de $n+h$ constantes.

Nous avons admis une fois pour toutes, que les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ vérifient les équations (2). Cela admis, nous pouvons dire que le système (18) ou (19) définit les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Nous posons la question, dans quel cas les deux systèmes (18) et (19) sont équivalents, comme définissants les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Nous démontrerons que l'intégrabilité totale du système (2) ou (9) est une condition nécessaire et suffisante d'équivalence des systèmes (18) et (19). En d'autres mots, pour que les deux systèmes soient équivalents, il faut et il suffit, qu'il existe h combinaisons linéaires, linéairement indépendantes, des fonctions $\varphi^{(i)}$, qui seraient des dérivées des fonctions finies.

Nous répetons notre lemme.

L'intégrabilité totale du système (2) est une condition nécessaire et suffisante d'équivalence des systèmes (18) et (19), comme définissants les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_h$ (le système (2) étant vérifié).

III. Démonstration du lemme. Condition nécessaire.

Nous montrerons d'abord que l'intégrabilité totale du système (2) est une condition nécessaire d'équivalence des deux systèmes.

Nous admettons que le système (18) entraîne (19) et vice-versa. Nous n'utiliserons que la première partie de la proposition, c'est à dire, que le système (18) entraîne (19).

Nous admettons ainsi que, si les fonctions de la classe C'':

(20) $$y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$$

et les fonctions de la classe C':

(21) $$\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ldots, \lambda_h(x)$$

vérifient les équations (2) et (18), il existe alors des fonctions continues:

$$\mu_1(x),\ \mu_2(x),\ \dots,\ \mu_h(x); \tag{22}$$

telles, que les fonctions (20) et (22) vérifient les équations (19).

Supposons que les fonctions (20) et (21), que nous définirons plus exactement dans la suite, satisfont au système (2) et (18). Notre dernière proposition entraîne l'existence des fonctions (22), vérifiant les équations (19).

Retranchons les équations correspondantes (19) de (18):

$$\sum_{i=1}^{h}\left[\lambda_i\cdot\frac{\partial\varphi^{(i)}}{\partial y_l}-\lambda_i\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\varphi^{(i)}}{\partial y'_l}\right)-\lambda'_i\cdot\frac{\partial\varphi^{(i)}}{\partial y'_l}\right]-\sum_{i=1}^{h}\mu_i\cdot\frac{\partial\varphi^{(i)}}{\partial y'_l}=0; \tag{23}$$
$$(l=1,2\dots,n)$$

Il résulte de l'identité (3):

$$\frac{\partial\varphi^{(i)}}{\partial y'_l}=a_l^{(i)}; \tag{24}$$
$$(i=1,2\dots,h;\ l=1,2\dots,n)$$

et

$$\frac{\partial\varphi^{(i)}}{\partial y_l}=\frac{\partial a_0^{(i)}}{\partial y_l}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial a_k^{(i)}}{\partial y_l}\cdot y'_k; \tag{25}$$
$$(i=1,2\dots,h;\ l=1,2\dots,n)$$

Substituons dans les équations (23) les valeurs (24) et (25); développons la dérivée $\frac{d}{dx}$, en tenant compte de ce, que les $a_l^{(i)}$ dépendent de $x, y_1, y_2, \dots, y_n$:

$$\sum_{i=1}^{h}\lambda_i\left(\frac{\partial a_0^{(i)}}{\partial y_l}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial a_k^{(i)}}{\partial y_l}\cdot y'_k\right)-\sum_{i=1}^{h}\lambda_i\left(\frac{\partial a_l^{(i)}}{\partial x}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial a_l^{(i)}}{\partial y_k}y'_k\right) \tag{26}$$
$$=\sum_{i=1}^{h}\lambda'_i a_l^{(i)}+\sum_{i=1}^{h}\mu_i a_l^{(i)};$$
$$(l=1,2,\dots,n)$$

Remplaçons dans ces équations x par y_0; ajoutons pour la symétrie le facteur $y'_0=1$ aux termes $\frac{\partial a_0^{(i)}}{\partial y_l}$ et $\frac{\partial a_l^{(i)}}{\partial x}$; étendons la somme sur ces termes:

$$\sum_{i=1}^{h}\sum_{k=0}^{n}\lambda_i\frac{\partial a_k^{(i)}}{\partial y_l}y'_k-\sum_{i=1}^{h}\sum_{k=0}^{n}\lambda_i\frac{\partial a_l^{(i)}}{\partial y_k}y'_k=\sum_{i=1}^{h}\lambda'_1 a_l^{(i)}+\sum_{i=1}^{h}\mu_i a_l^{(i)}; \tag{27}$$
$$(l=1,2\dots,n)$$

En tenant compte de la notation (10):

$$\sum_{i=1}^{h}\sum_{k=0}^{n}\lambda_i y'_k b_{kl}^{(i)}=\sum_{i=1}^{h}(\lambda'_i+\mu_i)a_l^{(i)}; \tag{28}$$
$$(l=1,2\dots,n)$$

Prenons dans le domaine R un point arbitraire P, dont les coordonnées sont:

$$y_0^{(0)}=x^{(0)},\quad y_1^{(0)},\quad y_2^{(0)},\dots,y_n^{(0)}. \tag{29}$$

Au point P l'un au moins des déterminants d'ordre h de la matrice (5) doit être différent de zéro. Supposons, pour fixer les idées, que c'est celui formé des h dernières colonnes. Nous l'avons désigné par Δ (13); donc au point P:

$$\Delta \neq 0; \tag{30}$$

Cette inégalité a lieu dans un certain voisinage du point P.

Prenons maintenant l'équation (28) numéro l, où $l\leqslant n-h$, et h dernières équations (28). Nous avons formé un système de $h+1$ équations. Eliminons entre elles les h quantités $\lambda'_i+\mu_i$ $(i=1,2,\dots,h)$:

$$\begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{h}\sum\limits_{k=0}^{n}\lambda_i y'_k b_{k,l}^{(i)} & a_l^{(1)} & a_l^{(2)} & \dots a_l^{(h)} \\ \sum\limits_{i=1}^{h}\sum\limits_{k=0}^{h}\lambda_i y'_k b_{k,n-h+1}^{(i)} & a_{n-h+1}^{(1)} & a_{n-h+1}^{(2)} & \dots a_{n-h+1}^{(h)} \\ \sum\limits_{i=1}^{h}\sum\limits_{k=0}^{n}\lambda_i y'_k b_{k,n-h+2}^{(i)} & a_{n-h+2}^{(1)} & a_{n-h+2}^{(2)} & \dots a_{n-h+2}^{(h)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum\limits_{i=1}^{h}\sum\limits_{k=0}^{n}\lambda_i y'_k b_{k,n}^{(i)} & a_n^{(1)} & a_n^{(2)} & \dots a_n^{(h)} \end{vmatrix}=0. \tag{31}$$
$$(l=1,2\dots,n-h)$$

Développons les équations (31) par rapport aux variables $\lambda_i y'_k$:

$$\sum_{i=1}^{h}\sum_{k=0}^{n}\lambda_i y'_k\begin{vmatrix} b_{k,l}^{(i)} & a_l^{(1)} & a_l^{(2)} & \dots a_l^{(h)} \\ b_{k,n-h+1}^{(i)} & a_{n-h+1}^{(1)} & a_{n-h+1}^{(2)} & \dots a_{n-h+1}^{(h)} \\ b_{k,n-h+2}^{(i)} & a_{n-h+2}^{(1)} & a_{n-h+2}^{(2)} & \dots a_{n-h+2}^{(h)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k,n}^{(i)} & a_n^{(1)} & a_n^{(2)} & \dots a_n^{(h)} \end{vmatrix}=0. \tag{32}$$
$$(l=1,2,\dots,n-h)$$

Remplaçons pour abréger le coëfficient de $\lambda_i y'_k$ par $D^{(i)}_{k,l}$. Changeons dans $D^{(i)}_{k,l}$ les lignes en colonnes:

$$(33)\qquad D^{(i)}_{k,l}=\begin{vmatrix} b^{(i)}_{k,l} & b^{(i)}_{k,n-h+1} & b^{(i)}_{k,n-h+2} & \dots & b^{(i)}_{k,n} \\ a^{(1)}_{l} & a^{(1)}_{n-h+1} & a^{(1)}_{n-h+2} & \dots & a^{(1)}_{n} \\ a^{(2)}_{l} & a^{(2)}_{n-h+1} & a^{(2)}_{n-h+2} & \dots & a^{(2)}_{n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a^{(h)}_{l} & a^{(h)}_{n-h+1} & a^{(h)}_{n-h+2} & \dots & a^{(h)}_{n} \end{vmatrix},$$

$$(i=1,2,\ \dots,h)$$
$$(k=0,1,2,\dots,n)$$
$$(l=1,2,\ \dots,n-h)$$

Par conséquent, les équations (32) prennent la forme:

$$(34)\qquad \sum_{i=1}^{h}\sum_{k=0}^{n}\lambda_i y'_k D^{(i)}_{k,l}=0;$$
$$(l=1,2,\dots,n-h)$$

Prenons maintenant l'équation (34) numéro l et h équations (8). Nous avons obtenu un système de $h+1$ équations, entre lesquelles nous éliminons les λ variables $y'_{n-h+1}, y'_{n-h+2},\dots,y'_n$:

$$(35)\qquad \begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{h}\sum\limits_{k=0}^{n-h}\lambda_i y'_k D^{(i)}_{k,l} & \sum\limits_{i=1}^{h}\lambda_i D^{(i)}_{n-h+1,l} & \sum\limits_{i=1}^{h}\lambda_i D^{(i)}_{n-h+2,l} & \dots & \sum\limits_{i=1}^{h}\lambda_i D^{(i)}_{n,l} \\ \sum\limits_{k=0}^{n-h} y'_k a^{(1)}_k & a^{(1)}_{n-h+1} & a^{(1)}_{n-h+2} & \dots & a^{(1)}_n \\ \sum\limits_{k=0}^{n-h} y'_k a^{(2)}_k & a^{(2)}_{n-h+1} & a^{(2)}_{n-h+1} & \dots & a^{(2)}_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum\limits_{k=0}^{n-h} y'_k a^{(h)}_k & a^{(h)}_{n-h+1} & a^{(h)}_{n-h+2} & \dots & a^{(h)}_n \end{vmatrix}=0.$$
$$(l=1,2,\dots n-h)$$

Développons ces équations par rapport aux quantités $\lambda_i y'_k$ (suivant la première ligne et la première colonne):

$$(36)\qquad \sum_{i=1}^{h}\sum_{k=0}^{n-h}\lambda_i y'_k \begin{vmatrix} D^{(i)}_{k,l} & D^{(i)}_{n-h+1,l} & D^{(i)}_{n-h+2,l} & \dots & D^{(i)}_{n,l} \\ a^{(1)}_k & a^{(1)}_{n-h+1} & a^{(1)}_{n-h+2} & \dots & a^{(1)}_n \\ a^{(2)}_k & a^{(2)}_{n-h+1} & a^{(2)}_{n-h+2} & \dots & a^{(2)}_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a^{(h)}_k & a^{(h)}_{n-h+1} & a^{(h)}_{n-h+2} & \dots & a^{(h)}_n \end{vmatrix}=0;$$
$$(l=1,2,\dots,n-h)$$

Considérons maintenant un système arbitraire des valeurs:

$$(37)\qquad y^{(0)\prime}_1,\ y^{(0)\prime}_2,\dots,y^{(0)\prime}_{n-h},$$

$$(38)\qquad \lambda^{(0)}_1,\ \lambda^{(0)\prime}_2,\dots,\lambda^{(0)}_h.$$

Introduisons pour la symétrie le symbole $y^{(0)\prime}_0$, qui signifie l'unité.

Prenons le système d'équations:

$$(39)\qquad \varphi^{(i)}(x^{(0)}, y^{(0)}_1, y^{(0)}_2,\dots,y^{(0)}_n,\ y^{(0)\prime}_1, y^{(0)\prime}_2,\dots,y^{(0)\prime}_n)=0.$$
$$(i=1,2,\dots h)$$

ou

$$(40)\qquad \sum_{k=0}^{n} a^{(i)}_k y^{(0)\prime}_k=0,$$
$$(i=1,2,\dots,h)$$

où les arguments des $a^{(i)}_k$ sont les coordonnées (29) du point P, où l'inégalité (30) est vérifiée. Donc le système (39) ou (40) définit d'une façon univoque les nouvelles inconnues:

$$(41)\qquad y^{(0)\prime}_{n-h+1},\ y^{(0)\prime}_{n-h+2},\dots,y^{(0)\prime}_n.$$

Le système des valeurs (37) et (41) vérifie les équations (39).

Au point P, appartenant au domaine R, la condition (7) est vérifiée pour toutes les valeurs de $y'_1, y'_2,\dots,y'_n$. En particulier:

$$(42)\qquad R(x^{(0)}, y^{(0)}_1, y^{(0)}_2,\dots,y^{(0)}_n,\ y^{(0)\prime}_1, y^{(0)\prime}_2,\dots,y^{(0)\prime}_n)\neq 0.$$

Les conditions (39) et (42) vérifiées, il existe un seul système des fonctions de la classe C'':

$$(43)\qquad y_1(x),\ y_2(x),\dots,y_n(x)$$

et des fonctions de la classe C':

$$(44)\qquad \lambda_1(x),\ \lambda_2(x),\dots,\lambda_h(x);$$

satisfaisant aux conditions initiales:

$$(45)\qquad y_k(x^{(0)})=y^{(0)}_k,$$

$$(46)\qquad y'_k(x^{(0)})=y^{(0)\prime}_k;$$
$$(k=1,2,\dots,n)$$

$$(47)\qquad \lambda_i(x^{(0)})=\lambda^{(0)}_i,$$
$$(i=1,2,\dots,h)$$

et vérifiant dans le voisinage de la valeur $x=x^{(0)}$ les équations (2) et (18)[1].

[1]) Voir Bolza, loc. cit. p. 589—590. Le déterminant R dépend en général de λ_i. Dans notre cas, où les équations (2) sont linéaires, cette dépendance n'a pas lieu.

Pour démontrer (36) nous avons admis que les fonctions (20) et (21) vérifient les équations (2) et (18). Les fonctions (43) et (44) vérifient ces conditions. Par conséquent ces fonctions vérifient les équations (36).

En particulier les équations (36) sont vérifiées pour $x = x^{(0)}$; donc, en tenant compte de (45), (46) et (47), nous obtenons:

$$\sum_{i=1}^{h}\sum_{k=0}^{n-h} \lambda_i^{(0)} y_k^{(0)\prime} \begin{vmatrix} D_{k,l}^{(i)} & D_{n-h+1,l}^{(i)} & D_{n-h+2,l}^{(i)} & \dots & D_{n,l}^{(i)} \\ a_k^{(1)} & a_{n-h+1}^{(1)} & a_{n-h+2}^{(1)} & \dots & a_n^{(1)} \\ a_k^{(2)} & a_{n-h+1}^{(2)} & a_{n-h+2}^{(2)} & \dots & a_n^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_k^{(h)} & a_{n-h+1}^{(h)} & a_{n-h+2}^{(h)} & \dots & a_n^{(h)} \end{vmatrix} = 0, \tag{48}$$
$$(l = 1, 2, \dots, n-h)$$

où les arguments dans le déterminant sont les coordonnées (29) du point P. Ici $y_0^{(0)\prime} = 1$.

Désignons pour abréger:

$$E_{k,l}^{(i)} = \begin{vmatrix} D_{k,l}^{(i)} & D_{n-h+1,l}^{(i)} & D_{n-h+2,l}^{(i)} & \dots & D_{n,l}^{(i)} \\ a_k^{(1)} & a_{n-h+1}^{(1)} & a_{n-h+2}^{(1)} & \dots & a_n^{(1)} \\ a_k^{(2)} & a_{n-h+1}^{(2)} & a_{k-h+2}^{(2)} & \dots & a_n^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_k^{(h)} & a_{n-h+1}^{(h)} & a_{n-h+2}^{(h)} & \dots & a_n^{(h)} \end{vmatrix}. \tag{49}$$
$$(i = 1, 2, \dots, h)$$
$$(k = 0, 1, 2, \dots, n-h)$$
$$(l = 1, 2, \dots, n-h)$$

Dans ces notations les équations (48) prennent la forme:

$$\sum_{i=1}^{h}\sum_{k=0}^{n-h} \lambda_i^{(0)} y_k^{(0)\prime} E_{k,l}^{(i)} = 0. \tag{50}$$
$$(l = 1, 2, \dots, n-h)$$

Dans ces équations les quantités $\lambda_i^{(0)}$ et $y_k^{(0)\prime}$ ($y_0^{(0)\prime}$ excepté) sont tout-à-fait arbitraires (car la somme n'est étendue qu'aux valeurs de k jusqu'à $k = n-h$.

Posons dans (50) en donnant à i l'une après l'autre les valeurs $1, 2, \dots h$):

$$\lambda_i^{(0)} = 1; \quad \lambda_j^{(0)} = 0 \quad \text{pour } j \neq i. \tag{51}$$

Nous obtenons:

$$\sum_{k=0}^{n-h} y_k^{(0)\prime} E_{k,l}^{(i)} = 0, \tag{52}$$
$$(l = 1, 2, \dots, n-h)$$
$$(i = 1, 2, \dots, h)$$

Posons maintenant:

$$y_k^{(0)\prime} = 0. \tag{53}$$
$$(k = 1, 2, \dots, n-h)$$

En tenant compte de $y_0^{(0)\prime} = 1$, nous obtenons de (52):

$$E_{0,l}^{(i)} = 0. \tag{54}$$
$$(i = 1, 2, \dots, h)$$
$$(l = 1, 2, \dots, n-h)$$

Posons maintenant au lieu de (53) (en prenant pour k l'une après l'autre les valeurs $1, 2, \dots n-h$):

$$y_k^{(0)\prime} = 1; \quad y_j^{(0)\prime} = 0 \quad \text{pour } j \neq k; \tag{55}$$

Nous obtenons de (52), en tenant compte de (54):

$$E_{k,l}^{(i)} = 0. \tag{56}$$
$$(i = 1, 2, \dots, h)$$
$$(k = 1, 2, \dots, n-h)$$
$$(l = 1, 2, \dots, n-h)$$

Joignons (54) et (56):

$$E_{k,l}^{(i)} = 0. \tag{57}$$
$$(i = 1, 2, \dots, h)$$
$$(k = 0, 1, 2, \dots, n-h)$$
$$(l = 1, 2, \dots, n-h)$$

Nous transformerons les égalités (57), qui ont lieu au point P.

Développons le déterminant en (57) suivant la première ligne (quant à la notation, voir (13)):

$$D_{k,l}^{(i)} \cdot A - \sum_{s=1}^{h} D_{n-h+s,l}^{(i)} \cdot A\binom{n-h+s}{k} = 0, \tag{58}$$
$$(i = 1, 2, \dots, h)$$
$$(k = 0, 1, 2, \dots, n-h)$$
$$(l = 1, 2, \dots, n-h)$$

Développons de même le déterminant (33):

$$D_{r,l}^{(i)} = b_{r,l}^{(i)} \cdot A - \sum_{t=1}^{h} b_{r,n-h+t} \cdot A\binom{n-h+t}{l}, \tag{59}$$
$$(i = 1, 2, \dots, h)$$
$$(r = 0, 1, 2, \dots, n)$$
$$(l = 1, 2, \dots, n-h)$$

Substituons maintenant les valeurs (59) dans (58), en prenant les indices convenables r:

$$(60)\qquad b^{(i)}_{k,l}\cdot A^2-\sum_{t=1}^{h} b^{(i)}_{k,n-h+t}\cdot A\cdot A\binom{n-h+t}{l}-\sum_{s=1}^{h} b^{(i)}_{n-h+s,l}\cdot A\cdot A\binom{n-h+s}{k}$$
$$+\sum_{s=1}^{h}\sum_{t=1}^{h}\cdot b^{(i)}_{n-h+s,n-h+t}\cdot A\binom{n-h+s}{k}\cdot A\binom{n-h+t}{l}=0.$$
$$\begin{pmatrix} i=1,2, & \ldots, h\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} k=0,1,2,\ldots,n-h\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} l=1,2, & \ldots, n-h\end{pmatrix}$$

Désignons la somme double dans (60) par $\varphi^{(i)}_{k,l}$. Partageons les termes de cette somme en trois catégories: 1) $s<t$; 2) $s=t$; 3) $s>t$:

$$(61)\qquad \varphi^{(i)}_{k,l}=(s<t)\sum_{s=1}^{h}\sum_{t=1}^{h} b^{(i)}_{n-h+s,n-h+t}\cdot A\binom{n-h+s}{k}\cdot A\binom{n-h+t}{l}$$
$$+\sum_{s=1}^{h} b^{(i)}_{n-h+s,n-h+s}\cdot A\binom{n-h+s}{k}\cdot A\binom{n-h+s}{l}$$
$$+(s>t)\sum_{s=1}^{h}\sum_{t=1}^{h} b^{(i)}_{n-h+s,n-h+t}\cdot A\binom{n-h+s}{k}\cdot A\binom{n-h+t}{l}.$$
$$(i=1,2,\ \ldots, h)$$
$$(k=0,1,2,\ldots,n-h)$$
$$(l=1,2,\ \ldots, n-h)$$

La seconde somme (simple) s'annule d'après (12). Changeons entre eux les indices dans la troisième somme; tenons compte dans cette somme de l'égalité (11), ou:

$$(62)\qquad b^{(i)}_{n-h+t,n-h+s}=-b^{(i)}_{n-h+s,n-h+t}.$$

Nous obtenons ainsi:

$$(63)\qquad \varphi^{(i)}_{k,l}=(s<t)\sum_{s=1}^{h}\sum_{t=1}^{h} b^{(i)}_{n-h+s,n-h+t}\left[A\binom{n-h+s}{k}\cdot A\binom{n-h+t}{l}-A\binom{n-h+t}{k}\cdot A\binom{n-h+s}{l}\right].$$
$$(i=1,2,\ \ldots, h)$$
$$(k=0,1,2,\ldots,n-h)$$
$$(l=1,2,\ \ldots, n-h)$$

Désignons par $C^{(\alpha)}_{\beta}$ le complément algébrique de l'élément $a^{(\alpha)}_{\beta}$ dans le déterminant A (13). Les déterminants entre parenthèse carrée (63) ne diffèrent

de A que par les éléments des colonnes s et t respectivement. Développons les suivant ces colonnes:

$$(64)\qquad A\binom{n-h+s}{k}=\sum_{\alpha=1}^{h} a^{(\alpha)}_{k}\cdot C^{(\alpha)}_{n-h+s},$$

$$(65)\qquad A\binom{n-h+t}{k}=\sum_{\beta=1}^{h} a^{(\beta)}_{k}\cdot C^{(\beta)}_{n-h+t},$$

$$(66)\qquad A\binom{n-h+s}{l}=\sum_{\alpha=1}^{h} a^{(\alpha)}_{l}\cdot C^{(\alpha)}_{n-h+s},$$

$$(67)\qquad A\binom{n-h+t}{l}=\sum_{\beta=1}^{h} a^{(\beta)}_{l}\cdot C^{(\beta)}_{n-h+t}.$$

Désignons, pour abréger, le coëfficient de $b^{(i)}_{n-h+s,n-h+t}$ dans (63) par $B^{(s,t)}_{k,l}$:

$$(68)\qquad B^{(s,t)}_{k,l}=A\binom{n-h+s}{k}\cdot A\binom{n-h+t}{l}-A\binom{n-h+t}{k}\cdot A\binom{n-h+s}{l}.$$
$$(k=0,1,2,\ldots,n-h)$$
$$(l=1,2,\ \ldots, n-h)$$
$$(s,t=1,2,\ \ldots, h)$$

$$(69)\qquad B^{(s,t)}_{k,l}=\sum_{\alpha=1}^{h}\sum_{\beta=1}^{h} a^{(\alpha)}_{k}\cdot a^{(\beta)}_{l}\cdot C^{(\alpha)}_{n-h+s}\cdot C^{(\beta)}_{n-h+t}-\sum_{\alpha=1}^{h}\sum_{\beta=1}^{h} a^{(\beta)}_{k}\cdot a^{(\alpha)}_{l}\cdot C^{(\beta)}_{n-h+t}\cdot C^{(\alpha)}_{n-h+s}.$$
$$(k=0,1,2,\ldots,n-h)$$
$$(l=1,2,\ \ldots, n-h)$$
$$(s,t=1,2,\ \ldots, h)$$

$$(70)\qquad B^{(s,t)}_{k,l}=\sum_{\alpha=1}^{h}\sum_{\beta=1}^{h}\cdot\begin{vmatrix} a^{(\alpha)}_{k} & a^{(\alpha)}_{l}\\ a^{(\beta)}_{k} & a^{(\beta)}_{l}\end{vmatrix}\cdot C^{(\alpha)}_{n-h+s}\cdot C^{(\beta)}_{n-h+t}.$$
$$(k=0,1,2,\ldots,n-h)$$
$$(l=1,2,\ \ldots, n-h)$$
$$(s,t=1,2,\ \ldots, h)$$

Partageons les termes de la somme (70) en trois catégories: 1) $\alpha<\beta$; 2) $\alpha=\beta$; 3) $\alpha>\beta$:

$$(71)\qquad B^{(s,t)}_{k,l}=(\alpha<\beta)\sum_{\alpha=1}^{h}\sum_{\beta=1}^{h}\cdot\begin{vmatrix} a^{(\alpha)}_{k} & a^{(\alpha)}_{l}\\ a^{(\beta)}_{k} & a^{(\beta)}_{l}\end{vmatrix}\cdot C^{(\alpha)}_{n-h+s}\cdot C^{(\beta)}_{n-h+t}$$
$$+\sum_{\alpha=1}^{h}\cdot\begin{vmatrix} a^{(\alpha)}_{k} & a^{(\alpha)}_{l}\\ a^{(\alpha)}_{k} & a^{(\alpha)}_{l}\end{vmatrix}\cdot C^{(\alpha)}_{n-h+s}\cdot C^{(\alpha)}_{n-h+t}$$

$$+(\alpha>\beta)\sum_{\alpha=1}^{h}\sum_{\beta=1}^{h}\cdot\begin{vmatrix} a_k^{(\alpha)} & a_l^{(\alpha)} \\ a_k^{(\beta)} & a_l^{(\beta)} \end{vmatrix}\cdot C_{n-h+s}^{(\alpha)}\cdot C_{n-h+t}^{(\beta)}.$$

$$\begin{matrix}(k &= 0, 1, 2, \ldots, n-h) \\ (l &= 1, 2, \quad \ldots, n-h) \\ (s, t &= 1, 2, \quad \ldots, n)\end{matrix}$$

La seconde somme (simple) s'annule identiquement. Changeons entre eux les indices α et β dans la troisième somme. Changeons ensuite entre elles les lignes des déterminants de la troisième somme:

$$(72)\qquad B_{k,l}^{(s,t)}=(\alpha<\beta)\sum_{\alpha=1}^{h}\sum_{\beta=1}^{h}\cdot\begin{vmatrix} a_k^{(\alpha)} & a_l^{(\alpha)} \\ a_k^{(\beta)} & a_l^{(\beta)} \end{vmatrix}\cdot C_{n-h+s}^{(\alpha)}\cdot C_{n-h+t}^{(\beta)}$$

$$-(\alpha<\beta)\sum_{\alpha=1}^{h}\sum_{\beta=1}^{h}\cdot\begin{vmatrix} a_k^{(\alpha)} & a_l^{(\alpha)} \\ a_k^{(\beta)} & a_l^{(\beta)} \end{vmatrix}\cdot C_{n-h+s}^{(\beta)}\cdot C_{n-h+t}^{(\alpha)}.$$

$$\begin{matrix}(k &= 0, 1, 2, \ldots, n-h) \\ (l &= 1, 2, \quad \ldots, n-h) \\ (s, t &= 1, 2, \quad \ldots, n)\end{matrix}$$

Nous joignons les termes correspondants des deux sommes:

$$(73)\qquad B_{k,l}^{(s,t)}=(\alpha<\beta)\sum_{\alpha=1}^{h}\sum_{\beta=1}^{h}\begin{vmatrix} a_k^{(\alpha)} & a_l^{(\alpha)} \\ a_k^{(\beta)} & a_l^{(\beta)} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} C_{n-h+s}^{(\alpha)} & C_{n-h+t}^{(\alpha)} \\ C_{n-h+s}^{(\beta)} & C_{n-h+t}^{(\beta)} \end{vmatrix}.$$

$$\begin{matrix}(k &= 0, 1, 2, \ldots, n-h) \\ (l &= 1, 2, \quad \ldots, n-h) \\ (s, t &= 1, 2, \quad \ldots, n)\end{matrix}$$

Désignons par $C_{\gamma,\delta}^{(\alpha,\beta)}$ le complément algébrique du mineur:

$$\begin{vmatrix} a_\gamma^{(\alpha)} & a_\delta^{(\alpha)} \\ a_\gamma^{(\beta)} & a_\delta^{(\beta)} \end{vmatrix}$$

dans le déterminant A (13).

Dans ces notations nous avons [1]):

$$(74)\qquad \begin{vmatrix} C_\gamma^{(\alpha)} & C_\delta^{(\alpha)} \\ C_\gamma^{(\beta)} & C_\delta^{(\beta)} \end{vmatrix}=A\cdot C_{\gamma,\delta}^{(\alpha,\beta)}.$$

Substituons maintenant les valeurs (74) dans (73), en prenant les indices convenables γ et δ:

[1]) Voir par exemple. Kowalewski, Einführung in die Determinantentheorie. 1909. p. 80.

$$(75)\qquad B_{k,l}^{(s,t)}=\left[(\alpha<\beta)\sum_{\alpha=1}^{h}\sum_{\beta=1}^{h}\begin{vmatrix} a_k^{(\alpha)} & a_l^{(\alpha)} \\ a_k^{(\beta)} & a_l^{(\beta)} \end{vmatrix}\cdot C_{n-h+s,\,n-h+t}^{(\alpha,\beta)}\right]\cdot A.$$

$$\begin{matrix}(k &= 0, 1, 2, \ldots, n-h) \\ (l &= 1, 2, \quad \ldots, n-h) \\ (s, t &= 1, 2, \quad \ldots, n)\end{matrix}$$

On voit aisément que la somme entre la parenthèse carrée est le déterminant $A\left({n-h+s,\,n-h+t \atop k,\quad l}\right)$, développé suivant les mineurs de deuxième ordre, formés des éléments des colonnes numéro s et t. Par conséquent:

$$(76)\qquad B_{k,l}^{(s,t)}=A\cdot A\left({n-h+s,\,n-h+t \atop k,\quad l}\right).$$

$$\begin{matrix}(k &= 0, 1, 2, \ldots, n-h) \\ (l &= 1, 2, \quad \ldots, n-h) \\ (s, t &= 1, 2, \quad \ldots, n)\end{matrix}$$

Substituons (76) dans (63):

$$(77)\qquad \varphi_{k,l}^{(i)}=(s<t)\sum_{s=1}^{h}\sum_{t=1}^{h}b_{n-h+s,\,n-h+t}^{(i)}\cdot A\cdot A\left({a-h+s,\,n-h+t \atop k,\quad l}\right).$$

$$\begin{matrix}(i &= 1, 2, \quad \ldots, h) \\ (k &= 0, 1, 2, \ldots, n-h) \\ (l &= 1, 2, \quad \ldots, n-h)\end{matrix}$$

Substituons maintenant (77) dans (60) au lieu de la somme double. Omettons le facteur commun A, ce qui est légitime d'après (30).

En tenant compte de (11), nous obtenons en définitive:

$$(78)\qquad b_{k,l}^{(i)}\cdot A+\sum_{t=1}^{h}b_{n-h+t,k}^{(i)}\cdot A\left({n-h+t \atop l}\right)+\sum_{s=1}^{h}b_{l,\,n-h+s}^{(i)}\cdot A\left({n-h+s \atop k}\right)$$

$$+(s<t)\sum_{s=1}^{h}\sum_{t=1}^{h}b_{n-h+s,\,n-h+t}^{(i)}\cdot A\left({n-h+s,\,n-h+t \atop k,\quad l}\right)=0;$$

$$\begin{matrix}(i &= 1, 2, \quad \ldots, h) \\ (k &= 0, 1, 2, \ldots, n-h) \\ (l &= 1, 2, \quad \ldots, n-h)\end{matrix}$$

Partageons ces équations en trois catégories: 1) $k<l$; 2) $k=l$; 3) $k>l$. On voit aisément que les équations de la deuxième catégorie sont vérifiées identiquement. Quant aux équations de la troisième catégorie, leurs membres gauches ne diffèrent que par le signe des équations correspondantes de la première catégorie (c'est à dire, de celles qu'on obtient en échangeant k et l

entre eux). Nous pouvons donc rejeter la deuxième et la troisième catégorie, en posant:

(79) $$k < l.$$

Nous pouvons ajouter la valeur 0 aux valeurs parcourues par l, car d'après (79) à la valeur $l=0$ ne correspond aucune valeur de k. En ajoutant zéro pour la symétrie, nous ne changeons qu'en apparence le nombre des équations (78).

En définitive les indices dans (78) peuvent parcourir les valeurs:

(80) $$\begin{matrix} (\ i = 1, 2, \quad \ldots, h) \\ (k, l = 0, 1, 2, \ldots, n-h) \end{matrix}$$

sous la condition de vérifier l'inégalité (79).

Les équations obtenues sont des conditions d'intégrabilité totale du système (9)[1], ou du système équivalent (2). Elles ont lieu dans un point P, pris arbitrairement dans le domaine R. Par conséquent, le système (2) est totalement intégrable dans le domaine R.

Dans les équations (78) les h dernières variables jouent un rôle asymétrique. Il faut remarquer qu'aux différents points du domaine R dans les équations analogues à (78) les différents systèmes de variables jouent le même rôle. Mais à tous les points les conditions de l'intégrabilité totale du système seront vérifiées.

Nous avons démontré que les équations (18) ne sont équivalentes aux équations (19), que pour les systèmes totalement intégrables des équations (2). C'est la première partie de notre lemme.

IV. Démonstration du lemme. Condition suffisante.

Nous montrerons maintenant que l'intégrabilité totale du système (2) est aussi une condition suffisante d'équivalence des systèmes (18) et (19) (le système (2) étant vérifié).

Nous admettons dans ce but que le système (2) est totalement intégrable.

Par conséquent, les équations équivalentes (57) sont vérifiées identiquement à chaque point du domaine R. On peut omettre les indices (0). Nous obtenons ainsi les équations (36) ou (35).

[1]) Voir par exemple: E. Weber. Vorlesungen über das Pfaff'sche Problem. 1900. p. 105—106. Les équations, qui y sont fournies, comme des conditions d'intégrabilité totale, doivent être partagées en deux catégories, qui ne diffèrent, que par le signe du membre gauche. Une catégorie sera identique avec notre système (78), où les indices parcourent les valeurs (80) sous la condition (79). Il suffit de développer les deux systèmes pour s'apercevoir de leurs identité.

Nous avons admis que les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ vérifient les équations (2) ou (8). Ces équations et l'équation (35) numéro l entraînent (sous la condition (30)) l'équation (34) numéro l. Donc le système (34) ou (31) est vérifié.

La démonstration d'équivalence des systèmes (18) et (19) se compose de deux parties.

Nous montrerons d'abord que le système (18) entraîne le système (19) avec des fonctions $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_h$, convenables.

Nous admettons que les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$ vérifient les équattons (18).

Regardons les h dernières équations (28), comme définissant les fonctions $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_h$. C'est possible à cause de (30).

Les fonctions $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_h$, ainsi définies, vérifient les h dernières équations (28). Mais ces équations et l'équation (31) numéro l entraînent (sous la condition (30)) l'équation (28) numéro l. Par conséquent, toutes les équations (28) ou bien (23) sont vérifiées.

Les équations (18) et (23) entraînent immédiatement les équations (19).

Nous avons donc démontré l'existence des fonctions $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_h$, qui vérifient avec notres fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ le système (19).

Nous montrerons maintenant que le système (19) entraîne le système (18) avec des fonctions $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$ convenables.

Nous admettons que les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$, $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_h$ vérifient les équations (19).

Regardons les h dernières équations (28), comme un système d'équations différentielles, définissant les fonctions $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$. C'est possible d'après la condition (30), qui nous permet de mettre notre système sous forme normale.

Les fonctions $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$, ainsi définies, (qui peuvent même contenir h constantes arbitraires) vérifient les h dernières équations (28). Mais ces équations et l'équation (31) numéro l entraînent l'équation (28) numéro l. Par conséquent, toutes les équations (28) ou bien (23) sont vérifiées.

Les équations (19) et (23) entraînent identiquement les équations (18). Nous avons donc démontré l'existence d'une infinité des fonctions $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$ qui vérifient avec notres fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_a$ le système (18).

Notre lemme est donc complètement démontré.

V. Le principe de Hamilton et l'holonomisme.

Nous nous occuperons de la première application de notre lemme.

Nous désignerons le temps par x. Les variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$ seront des paramètres, déterminant la position d'un système à n degrés de liberté.

Admettons qu'il existe pour notre système une fonction des forces U, qui peut dépendre du temps. Nous désignerons par T la force vive du système.

Supposons encore que notre système est soumis à des liaisons, exprimées par les équations différentielles (2).

Nous n'examinerons que les mouvements du système, pour lesquels le point aux coordonnées $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$ reste dans un certain domaine R de l'espace à $n+1$ dimmensions.

Nous admettons que la fonction des forces U est une fonction de la classe C''' des variables $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$ dans le domaine.

Admettons que la force vive T est une fonction quadratique des vitesses généralisées $y'_1, y'_2, \ldots, y'_n$ et une fonction de la classe C''' des variables $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$ dans le domaine R.

Admettons que les fonctions $\varphi^{(i)}$ sont linéaires par rapport à $y'_1, y'_2, \ldots, y'_n$ et de la classe C''' par rapport à $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$ dans le domaine R.

Introduisons la fonction de Lagrange:

$$f = T + U. \tag{81}$$

En tenant compte des notations (3) du numéro II, nous admettons de nouveau qu'à chaque point du domaine R l'un au moins des déterminants d'ordre h de la matrice (5) est différent de zéro.

Dans le déterminant R (6) on peut remplacer la fonction f par T, car U ne dépend pas de $y'_1, y'_2, \ldots, y'_n$. Ce déterminant ne dépendra pas de $y'_1, y'_2, \ldots, y'_n$, car T est une fonction quadratique de ces dérivées.

Admettons que le déterminant $R(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ ne s'annule en aucun point du domaine R.

On voit aisément que toutes les hypothèses du numéro II sont vérifiées pour la fonction de Lagrange f.

Admettons maintenant que le principe de Hamilton s'applique à notre système mécanique. Alors le mouvement du système s'exprime par les équations (18) [1]), qui sont la condition première d'extremum de l'intégrale:

$$I = \int_{x_0}^{x_1} (T + U)\, dx \tag{82}$$

dans le cas normal.

Mais, d'autre part, ce mouvement s'exprime par les équations de Lagrange, qui prennent dans notre cas la forme (19) [2]).

Par suite, les équations (18) et (19) doivent être équivalentes.

D'après notre lemme l'intégrabilité totale du système (2) est une condition nécessaire de cette équivalence. Nous pouvons donc remplacer les termes

[1]) Voir, par exemple: Bolza, loc. cit. p. 589—590.

[2]) Voir, par exemple: Appell., Traité de Mécanique rationnelle. Vol. III. 1911. (troisième édition). p. 373—374.

gauches de ces équations par h combinaisons linéaires, linéairement indépendantes, qui seraient des dérivées des fonctions finies. En définitive, on peut remplacer les équations de liaison (2) par des équations finies.

Le système est donc holonome.

La marche inverse de raisonnement n'offre aucune difficulté.

Nous avons donc démontré, que le principe de Hamilton ne s'applique qu'aux systèmes holonomes.

VI. Cas singulier dans le problème de Lagrange.

Nous passons maintenant à la deuxième application de notre lemme.

Si nous avons le système de $n+h$ équations (2) et (18), et les valeurs initiales (29), (37), (41), (38) données, vérifiant les équations (40) et l'inégalité (42), alors il existe des fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$, qui satisfont aux conditions initiales (45), (46), (46), (47), et vérifient les équations (2) et (18) [1]).

C'est le théorème d'existence des extrémales normales dans le problème général de Lagrange, concernant l'extremum de l'intégrale:

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, \; y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)\, dx \tag{83}$$

dans le champ, défini par les équations (2).

Ce théorème n'est pas en général valable, si l'on remplace les équations (18) par les équations des extrémales singulières. Nous nous posons la question, sous quelles conditions le théorème d'existence s'applique encore aux extrémales singulières.

Remplaçons dans (16) et (17) la fonction F par:

$$F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y'_1, y'_2, \ldots, y'_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h) = \sum_{i=1}^{h} \lambda_i \varphi^{(i)}. \tag{84}$$

Les équations (17) définissent maintenant les exteémales singulières. Elles prennent la forme:

$$\sum_{i=1}^{h} \left[\lambda_i \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial y_l} - \lambda_i \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial y'_l}\right) - \lambda'_i \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial y'_l} \right] = 0; \tag{85}$$

Faisons quelques changements dans notre lemme. Remplaçons les équations (23) par (85). Ne retranchons pas les équations (19). Nous obtiendrons ainsi au lieu de (28) les équations:

[1]) Voir, par exemple: Bolza, loc. cit. p. 589—590.

$$(86)\qquad \sum_{i=0}^{h}\sum_{k=0}^{n}\lambda_i\, y'_k\, b_{ki}^{(j)} = \sum_{i=1}^{h}\lambda'_i\cdot a_i^{(j)}.$$

Nous pouvons éliminer les quantités λ'_i au lieu de $\lambda'_i+\mu_i$, et nous obtiendrons ainsi les équations (31).

Admettons maintenant que le théorème d'existence s'applique à notre cas. Alors, toute la démonstration de numéro III reste valable. Le système (2) doit être totalement intégrable.

L'intégrabilité totale du système (2) est donc une condition nécessaire d'applicabilité du théorème d'existence aux extrémales singulières.

Admettons maintenant que cette condition est remplie.

Considérons les valeurs initiales (29), (37), (41), (38), vérifiant les équations (40).

Prenons des fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$, satisfaisant aux conditions initiales (45), (46), et vérifiant le système (2), arbitraires du reste.

Nous pouvons démontrer, comme au numéro IV, qu'on peut trouver h fonctions $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$, dépendant de h constantes arbitraires (par exemple, valeurs initiales), vérifiant avec $y_1, y_2, \ldots, y_n$ le système (86).

On peut choisir ces constantes arbitraires de telle façon que les conditions (47) soient remplies.

Mais dans notre cas les équations (86) sont identiques avec les équations (85) des extrémales singulières.

Nous avons donc démontré le théorème d'existence.

L'intégrabilité totale du système (2) est donc une condition nécessaire et suffisante d'applicabilité du théorème d'existence au cas singulier.

Mais dans le cas normal les valeurs initiales déterminent l'extrémale d'une façon univoque. Dans notre cas cela n'a pas lieu, car les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sont arbitraires, les fonctions $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$ — déterminées.

On voit donc que dans notre cas chaque courbe, appartenant au champ, est une extrémale singulière (pour valeurs convenables des $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$) [1]).

Streszczenie.

Zwykła zasada Hamiltona, dotycząca pierwszego warunku ekstremum całki Hamiltona, stosuje się do układów holonomicznych. Już Hertz zauważył, że stosowanie jej do układów nieholonomicznych może prowadzić do błędnych wyników.

[1]) Voir par exemple: Hadamard, Leçons sur le calcul des variations. 1910. p. 236—237.

Głównem zadaniem pracy niniejszej jest dowód, że zasada Hamiltona nie stosuje się do żadnych układów nieholonomicznych. Innemi słowy, holonomizm jest nietylko warunkiem wystarczającym, ale i koniecznym stosowalności zasady Hamiltona.

Rachunki, przeprowadzone w pracy, pozwalają rozwiązać także pewne zadanie z rachunku warjacyjnego: w jakich warunkach można stosować twierdzenie o istnieniu do ekstremalnych osobliwych w zagadnieniu ogólnem Lagrange'a? Otóż, warunkiem koniecznym i wystarczającym jest całkowalność zupełna równań warunkowych, określających pole funkcyjne zagadnienia.